This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 8503.35

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

System

der

analytischen Geometrie,

auf neue Betrachtungsweisen gegründet,

und insbesondere

eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung

enthaltend.

Von

Dr. *Julius Plücker*,

ordentl. Professor der Mathematik an der vereinigten Friedrichs-Universität zu Halle.

Mit 6 Kupfertafeln.

Berlin, 1835.

Verlag von Duncker und Humblot.

Math 850.35

HARVARD COLLEGE LIBRARY
1862, Aug. 12.
$2.24
Gray Fund.

Vorrede.

Wenn ich meiner Arbeit einige Worte voransetze, so geschieht dieſs bloſs in der Absicht, darzulegen, wie dieselbe entstanden ist. Während überhaupt in ähnlichen Fällen eine solche Darlegung mir wünschenswerth scheint, finde ich insbesondere für mich eine Art von Wohlbehagen in dem Gedanken, daſs hernach Alles, was die Persönlichkeit des Verfassers betrifft, abgemacht ist, oder wenigstens vom Verfasser als abgemacht angesehen werden kann.

So wie für meine „Entwicklungen," so liegt auch für meine neue Schrift, zu der jene gewissermaſsen die Vorstudien sind, die Veranlassung darin, daſs ich zufällig mir entgegentretende, particuläre Resultate auf eigene Art auffaſste, und diese Auffassungsart zu allgemeinen Methoden mir ausbildete. Es hat Herr Poncelet in Crelle's Journal, so viel ich weiſs zuerst, den Satz gegeben, daſs eine Curve dritter Ordnung ihre Asymptoten in solchen drei Puncten schneidet, die in gerader Linie liegen. Dieser Satz fiel mir gleich zu Anfang auf, als ich im Sommer 1832 meine Aufmerksamkeit auf die Curven höherer Ordnungen richtete. Ich erkannte sogleich, daſs derselbe, in die Sprache der Analysis übertragen, anders nichts hieſse, als daſs es im Allgemeinen möglich sei, eine Curve der dritten Ordnung durch eine Gleichung von der Form: $pqr - \mu s = 0$, darzustellen. Es lag nah, den Nerv dieser Möglichkeit in der Anzahl der neun Constanten, welche auch diese Form *implicite* enthält, zu erblicken; hiernach neue Formen zu bilden und die neuen Formen geometrisch zu deuten. Aus dieser eben so einfachen als fruchtbaren Bemerkung entfaltete sich die hier vorliegende neue Gestaltung der analytischen Geometrie, deren Eigenthümlichkeit und deren Stärke in dem vollständigsten Parallelismus zwischen

geometrischen und analytischen Formen, oder, um mich bestimmter auszudrücken, in dem Umstande beruht, dafs wir, durch das Zusammenrükken, das Zusammenwachsen gleichsam, von Construction und analytischer Darstellung, dahin gelangen, über die grofsartigen Betrachtungsweisen der Analysis gebieten zu können, ohne irgend einen der unersetzlichen Vortheile, welche die unmittelbare Anschauung gewährt, aufzugeben.

Früher schon habe ich mit einer Art von Vorliebe eine Theorie entwickelt, nach welcher man alle Sätze der linearen Geometrie *(géométrie de la règle)*, vermittelst Symbole, welche lineare Functionen bedeuten, und unbestimmter Coefficienten, beweisen kann. Jetzt lasse ich in den Gleichungen der Curven solche Functionen in Evidenz treten: ein neuer Schritt, von dessen Bedeutung das Ganze meiner Arbeit Zeugnifs ablegt. Den linearen Functionen entsprechen solche gerade Linien, welche zu der Curve in einer vollkommen bestimmten, und nur mit der Form der Gleichung wechselnden, Beziehung stehen. Eine Curve dritter Ordnung ist durch vier solche gerade Linien und einen unbestimmten Coefficienten, der auch durch die Annahme eines Punctes der Curve vollkommen ersetzt werden kann, bestimmt. Zunächst knüpfen sich an jede solche Bestimmung einfache Constructionen der Curven, und dann fliefst aus der gegenseitigen Lage der vier geraden Linien einerseits, und der Annahme des Punctes andrerseits, für solche Curven ein natürliches Eintheilungs-Princip. Wenn wir, zum Beispiel, bei der oben schon erwähnten Form stehen bleiben, so sind drei der fraglichen Linien die drei Asymptoten, und die vierte ist diejenige, welche durch die drei Durchschnittspuncte der Curve mit den Asymptoten geht. Ist aufserdem noch irgend ein Punct der Curve gegeben, so stellt sich sogleich eine Construction heraus, nach welcher beliebig viele Puncte derselben sich ganz auf dieselbe einfache Weise ergeben, als die Puncte einer Hyperbel, wenn die beiden Asymptoten und ein beliebiger Punct gegeben sind. Bei dieser Construction tritt der Fall, dafs die Curve einen Doppelpunct hat, auf ausgezeichnete Weise hervor, und weiterhin ergibt sich, dafs die gröfste dem Asymptoten-Dreiecke eingeschriebene Ellipse der geometrische Ort für Rückkehrpuncte ist, und dafs isolirte Puncte innerhalb, Durchschnittspuncte zweier reellen Zweige aufserhalb dieser Ellipse liegen. Hiermit ist eine Eintheilung der Curven dritter Ordnung in 219 Arten gegeben: eine Eintheilung, die ohne die Kenntnifs jener Lage des Rückkehrpunctes und der dadurch bestimmten Lage der vierten gegebenen geraden Linie, gegen die drei Asymptoten, keinen Grund und Boden hat. Newton hat in seiner Aufzählung Fälle übersehen, Euler sagt mit Recht, ihr fehle das Eintheilungs-Princip. Er

selbst umgeht die Schwierigkeit, indem er blofs die Natur der unendlichen Zweige berücksichtigt. Wo Euler 16 Geschlechter zählt, stellt Cramer deren 14 auf. D'Alembert zieht hieraus Schlüsse gegen das Euler'sche Eintheilungs-Princip, und behauptet mit Grund, das Willkührliche sei auch hier keinesweges ausgeschlossen.

Das Fremdartige, welches die Annahme der Coordinaten-Axen in die analytische Darstellung bringt, ist für uns verschwunden; und doch ist wiederum, sei es um die gegenseitige Lage verschiedener Curven zu bestimmen, sei es zum Behuf absoluter Gröfsen-Bestimmung, auf solche Axen unmittelbar Alles bezogen, sobald wir die verschiedenen linearen Functionen als Functionen zweier derselben, die wir beliebig auswählen können, betrachten, und dann die beiden geraden Linien, die diesen entsprechen, für die Coordinaten-Axen nehmen. Belege hierzu liefern namentlich der 2., 4. und 6. Paragraph des dritten Abschnittes. Es wird uns zum Beispiel leicht, die Annäherung der Curven an ihre Asymptoten zu messen und zu vergleichen, und die verschiedenen krummlinigen Asymptoten characteristisch hervortreten zu lassen. Indem Cramer die Definition dieser letztern ausdrücklich an die willkührliche Annahme der Coordinaten-Axen knüpft, nimmt er diesen Asymptoten ihre selbstständige Existenz; ich verstehe Euler nicht, wenn er *) willkührlichen Constanten particuläre Werthe beilegt, und dann immer nur von einer, statt von unendlich vielen parabolischen Asymptoten spricht, und diese eine nicht einmal diejenige ist, die allein in einer ausgezeichneten, einer innigern Beziehung zur Curve steht.

In meiner Arbeit findet man auch die Grundzüge einer neuen Theorie der singulären Puncte, die darauf, dafs man eine Curve, einmal als von einem Puncte beschrieben, das andere Mal als von einer geraden Linie umhüllt, sich vorstellen kann, als einer Fundamental-Unterscheidung beruht. Der Uebergang von der einen Vorstellungsweise zu der andern ist ein discontinuirlicher. In der zweiten entgehen uns zum Beispiel die conjugirten Puncte der Curven; die Polare einer solchen Curve hat eine zugeordnete isolirte gerade Linie, deren Spur wir ganz verlieren, wenn wir uns, um die Curve darzustellen, gewöhnlicher Coordinaten bedienen. Der Begriff der Tangente ist in den beiden Vorstellungsweisen ein, dem Wesen nach, ganz verschiedener. Hiermit steht eine Schwierigkeit in Betreff der Reduction, welche die Ordnung der Polar-Curve in gewissen Fällen erleidet, in Verbindung: eine Schwierigkeit, an der bisher alle Erklärungs-

*) *Introductio ad Analysin infinitorum. T. II. cap. VII.* §. 179.

Versuche gescheitert sind. Ich gebe diese Erklärung vollständig, und glaube in derselben die volle Bestätigung zu finden, dafs die Theorie der singulären Puncte die, man als fertig anzusehen geneigt ist, aus einem neuen Gesichtspuncte behandelt werden mufs. Ich gebe unter andern das unmittelbare analytische Criterium zur Unterscheidung der drei Hauptarten von Doppelpuncten in dem Zeichen des Ausdrucks: $(rt-s^2)$, wobei r, s und t, der gewöhnlichen Bezeichnung gemäfs, die drei zweiten partiellen Differential-Coefficienten der Function, die, gleich Null gesetzt, die bezügliche Curve darstellt, bedeuten. Vor Allem aber findet man neue und fast die ersten Untersuchungen über Wendungspuncte, deren Betrachtung mir zu den subtilsten, welche die Geometrie bietet, zu gehören scheint. Ich gebe ihre allgemeine Construction, und bestimme namentlich ihre Anzahl bei algebraischen Curven. Die Curven der dritten Ordnung haben im Allgemeinen neun Wendungspuncte, und unter diesen immer drei reelle und sechs imaginäre. Die Discussion hierüber knüpft sich an Gleichungen, deren Grad zu hoch ansteigt, als dafs wir auf dem Wege der blofsen Elimination zu einem Resultate kommen könnten; die unmittelbare Anschauung mufs wenigstens einen neuen, noch verwegnern Flug nehmen, als bisher, um das zu ergreifen, was in allen Fällen imaginär ist und imaginär bleibt. Unsere Methode führt hier leicht zum Ziele; ja unmittelbar sogar erkennen wir in der Form: $pqr+\mu s^3=0$, die Nothwendigkeit der obigen Behauptung, dafs eine Curve dritter Ordnung neun Wendungspuncte hat, und von diesen immer sechs imaginär sind (324). Die Existenz imaginärer Wendungspuncte habe ich zuerst aus dem Umstande erschlossen, dafs eine Curve der dritten Ordnung mit einem conjugirten Puncte ihre drei reellen Wendungspuncte beibehält, während, wenn zwei reelle Zweige einer solchen Curve sich schneiden, nur noch ein einziger reeller Wendungspunct übrig bleibt. Ich habe hiernach gezeigt, dafs ein Doppelpunct im Allgemeinen sechs, und insbesondere ein Rückkehrpunct acht Wendungspuncte in sich aufnimmt.

An die Spitze meiner Arbeit habe ich die Worte: „System der analytischen Geometrie“ gestellt, und mich hiernach zu dem erhoben, was mir, als ich die Vorrede zum zweiten Bande meiner Entwicklungen schrieb, vorerst noch unerreichbar dünkte. Nur wenige Bemerkungen über diesen Punct seien mir hier noch gestattet.

Ich habe schon in einer andern Beziehung oben bemerkt, dafs die linearen Functionen, wie sie bei unserer Behandlung in den Gleichungen der Curven erscheinen, ganz den Character von Coordinaten haben. Jede derselben erhält für einen gegebenen Punct einen bestimmten Werth, der sich

geometrisch, durch die Vermittelung der bezüglichen geraden Linie, leicht construiren läfst. Durch irgend zwei derselben ist die Lage des Punctes bestimmt. Diese Bemerkung legt uns nah, den Begriff der Coordinaten zu erweitern, und, statt der beiden gewöhnlichen Parallel-Coordinaten, beliebige Functionen derselben als Coordinaten zu betrachten und selbstständig für sich zu construiren; hiernach aber insbesondere und vorzugsweise diejenigen Coordinaten-Systeme zu bestimmen, in welchen die Gleichung der geraden Linie vom ersten Grade bleibt. Durch Hülfe von acht unbestimmten Constanten gelangen wir dahin, diese Systeme nicht blofs zu vervielfältigen *), sondern alle zu umfassen. Eine und dieselbe Gleichung zwischen zwei so bestimmten Coordinaten enthält hiernach nicht blofs einen einzigen Satz, sondern alle möglichen Sätze, die aus einem derselben durch lineare Umformungen sich ergeben; wobei wir zugleich das Unendlichweitrücken von geraden Linien in der analytischen Form dadurch, dafs die bezüglichen linearen Functionen auf blofse Constante sich reduciren, verfolgen können.

Die Theorie der Transversalen tritt uns als ein Corollarium der allgemeinsten Coordinaten-Bestimmung entgegen, und als solche habe ich sie in gröfster Einfachheit dargestellt. Der allgemeine Begriff der Coordinaten schliefst ferner die verschiedenen Uebertragungs-Principe in sich ein. Es haben diese aber eine solche Wichtigkeit, dafs man sie auch an und für sich zu betrachten nöthig finden wird, und dazu wird uns hier der einfachste Algorithmus geboten. Ich nehme in der Darstellung derselben die Idee auf, welche Herrn Möbius angehört, und nach welcher man sich denkt, dafs zwei (wenn wir wollen, zusammenfallende) Ebenen aus Puncten bestehen, und die Puncte der beiden Ebenen auf bestimmte Weise sich entsprechen, wonach denn auch jede Figur, die man aus Puncten der einen Ebene bilden kann, in der andern eine entsprechende findet. Das Entsprechen der Puncte (ein Begriff, der von allem philosophisch Vagen frei erhalten werden mufs) drücken wir dadurch aus, dafs wir zwei sich entsprechenden Puncten gleiche Coordinaten-Werthe in zwei verschiedenen Systemen zuschreiben. Von Linien-Coordinaten will ich hier nicht reden, auch nicht von dem Entsprechen zwischen Puncten und geraden Linien. Ich bemerke nur, dafs man auch für die Theorie der Reciprocität neue Gesichtspuncte in meiner Arbeit findet.

Ich beabsichtigte anfangs, blofs die Theorie der Curven dritter Ordnung dem Drucke zu übergeben. Zu diesem Ende war der gegenwärtige

*) Vergl. meine Analyt.-geometrische Entwicklungen. Zweiter Band. Vorrede, S. IX.

dritte Abschnitt schon im Sommer 1833 ausgearbeitet. Jetzt erscheint er, zugleich mit den später hinzugekommenen beiden ersten Abschnitten, nachdem er selbst noch eine Ueberarbeitung erfahren hat, und deshalb, in Beziehung auf die Darstellung, vollendeter als diese sich darstellen mag. Die Curven dritter Classe sind, weil ich von ihren mannigfaltigen Formen keine Anschauung geben konnte, nur kurz berührt worden. Der Typus für die Behandlung der Curven höherer Ordnung liegt gröfstentheils schon in dem dritten Abschnitte; nur einen subtilen Punct habe ich ohne Erörterung lassen müssen: die Theorie der gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Zweige derselben Curve, weil diese bei den Curven der dritten Ordnung noch keine Anwendung findet. Eh ich mich ganz von der analytischen Geometrie abwende, gedenke ich noch, der Betrachtung der allgemeinen Gesetze, welchen die algebraischen Curven überhaupt unterworfen sind, eine besondere Schrift zu widmen.

Halle, im November, 1834.

Uebersicht des Inhalts.

Erster Abschnitt.

Ueber allgemeine Coordinaten-Bestimmung.

Seite

§. 1. ***Punct-Coordinaten. Bestimmung aller möglichen Systeme linearer Punct-Coordinaten*** 1

Gewöhnliche Coordinaten 1. Verallgemeinerung dieses Begriffes, indem man an die Stelle der beiden Parallel-Coordinaten zwei beliebige Functionen derselben treten läfst. Geometrische Construction dieser Functionen. 2—6. Bestimmung aller möglichen Coordinaten-Systeme, in welchen die Gleichung einer geraden Linie vom ersten Grade ist. Jedes solches System läfst sich durch jedes andere vermittelst acht Constanten bestimmen. Die Construction der beiden Coordinaten eines Punctes hängt hier von drei festen geraden Linien und zwei constanten Coefficienten ab. Wir können auch von drei Coordinaten eines Punctes sprechen, deren jeder eine ganze und lineare Function entspricht; alsdann werden alle Gleichungen, in Beziehung auf die drei Coordinaten, homogen. Statt zweier Coefficienten können wir auch, der Symmetrie wegen, drei nehmen, indem wir einen als beliebig betrachten; und diese dann auch durch drei Winkel ersetzen. Insbesondere sind die drei von einem Puncte auf die drei festen geraden Linien gefällten Perpendikel Coordinaten dieses Punctes. 7—9. Die beiden constanten Coefficienten kann eine identische Gleichung vertreten. Betrachtung und Construction einzelner Fälle. Pol einer geraden Linie und Polare eines Punctes, in Beziehung auf ein gegebenes Dreieck. 10—16. Wir können die allgemeine Coordinaten-Bestimmung auch von vier geraden Linien abhängig machen. 17 u. 18. Fälle, in welchen die Coordinaten-Bestimmung versagt. 19 u. 20. Besondere Classe von Coordinaten-Systemen, von welchen je zwei sich gegenseitig durch sechs Constante bestimmen. Jede der beiden Coordinaten eines Punctes entspricht einer ganzen linearen Function, und ihre geometrische Construction hängt von einer festen geraden Linie und einem unbestimmten Coefficienten ab. 21—25.. Wir können auch von beliebig vielen Coordinaten eines Punctes sprechen, indem wir jede neue Coordinate als ganze lineare Function der beiden übrigen betrachten. 26. Imaginäre Coordinaten eines Punctes. Die Verwandlung derselben in reelle kann unendlich oft, auf gleich einfache Weise geschehen. Involution von geraden Linien. Einführung zweier Constanten α und a, von welchen die zweite bei einer Drehung der Involution unverändert bleibt. Involutionen der ersten und zweiten Art. 27—37. Particuläre Bestimmungen. 38—41.

Seite

§. 2. *Coordinaten gerader Linien. Bestimmung aller möglichen Systeme linearer Linien-Coordinaten* 29

Einfache Art, die Lage einer geraden Linie durch zwei Coordinaten zu bestimmen. Allgemeinste Coordinaten-Bestimmung. 42 u. 43. Bestimmung aller möglichen Systeme von Linien-Coordinaten, in welchen die Gleichung eines Punctes vom ersten Grade ist. Je zwei solcher Systeme bestimmen sich gegenseitig durch acht Constante. Den beiden Coordinaten einer geraden Linie entsprechen drei lineare Functionen, und sie sind durch drei feste Puncte und zwei constante Coefficienten bestimmt. Drei Coordinaten einer geraden Linie. Für diese können wir insbesondere die von den drei festen Puncten auf die gerade Linie gefällten Perpendikel nehmen. 44 u. 45. Ersetzung der beiden unbestimmten Coefficienten durch eine identische Gleichung. Particuläre Fälle. 46—50. Bestimmung eines Systems linearer Linien-Coordinaten durch vier feste Puncte. 51. Die Analogie zwischen Punct- und Linien-Coordinaten hört da auf, wo das Unendliche characteristisch hervortritt. 52—54. Imaginäre Linien-Coordinaten. Verwandlung derselben in reelle. Involutionen von Puncten der ersten und zweiten Art. Particuläre Bestimmungen. 55—62.

§. 3. *Allgemeine Betrachtungen über Coordinaten-Bestimmung. Theorie der Transversalen. Verwandtschaft geometrischer Constructionen. Uebertragungs-Principe. Collineation. Reciprocität* 42

Theorie der Transversalen ein Corollarium der allgemeinen Coordinaten-Bestimmung. Einfache Darstellung dieser Theorie. Betrachtung der besondern Fälle, dafs Durchschnittspuncte zusammenfallen und dafs sie unendlich weit rücken, und dafs Winkelpuncte des Polygons der Transversalen in die Curve selbst fallen. Ueberall Beispiele. 63—69. Allgemeine Bestimmung der Verwandtschaft geometrischer Constructionen und daran sich anschliefsende Uebertragungs-Principe. 70—72. Collineation: irgend zweien sich entsprechenden Puncten gehören in irgend zwei verschiedenen Coordinaten-Bestimmungen gleiche Coordinaten-Werthe an. 73. Metrische Relationen. 74—76. Bestimmung der Collineation durch acht Constante oder vier Paare sich entsprechender Puncte. 77. Collineare Lage. 78 u. 79. Drei Situations-Axen und Situations-Puncte. 80. Ausgezeichnete gerade Linien in jedem zweier collinearer Systeme. 81. Affinität. Vereinfachung der metrischen Relationen. Eine Situations-Axe ist mit zwei Situations-Puncten unendlich weit gerückt. 82 u. 83. Parallele Verschiebung und Drehung zweier affinen Systeme. 84. Aehnlichkeit. Aehnliche Lage. Aehnlichkeits-Punct. 85. Congruenz. 86. Verwandtschaft der Gleichheit der Flächenräume. 87. Imaginäre Situations-Axen; nach der Umwendung eines der beiden Systeme werden sie durch reelle ersetzt. Besonderer Fall des Zusammenfallens der beiden Axen. 88 u. 89. Besonderer Fall, dafs es unendlich viele oder in endlicher Entfernung keine Situations-Puncte gibt. Projectivität. Projective Lage. 90 u. 91. Construction des Situations-Punctes zweier Systeme. 92. Metrische Relationen in Beziehung auf den Situations-Punct und die Situations-Axen. 93. Discussion der Affinitäts-Verwandtschaft bei Anwendung von Linien-Coordinaten. 94—96. Andeutung des Falles, wo reellen Puncten des einen Systems imaginäre des andern entsprechen. 97. Reciprocität: es entspricht jedem Puncte jedes der beiden Systeme eine einzige gerade Linie des andern, und umgekehrt. Einfacher Algorithmus. Pol und Polare. Metrische Relationen. 97—101. Mittelpuncte zweier reciproken Systeme. Jedem Puncte entsprechen im Allgemeinen in den beiden Systemen zwei verschiedene gerade Linien als Polaren, nach schicklicher Lagen-Aenderung des einen Systems gegen das andere decken sich die beiden Polaren jedes Punctes. 97—102. Zweite Art, die Reciprocität darzustellen, gegründet auf die Variation der Constanten. Allgemeine Construction der Pole und Polaren durch die Vermittelung zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte. Der doppelte Contact kann ein reeller und imaginärer sein. Der eine Fall vertauscht sich mit dem andern, wenn man eines der beiden Systeme umwendet. Einer

Seite

vierpunctigen Osculation entspricht eine besondere Art von Reciprocität. Wenn wir eines der beiden Systeme gehörig verrücken und nöthigenfalls umwenden, so ersetzt ein einziger Kegelschnitt die beiden sich doppelt berührenden. Die Reciprocität hängt alsdann, statt von acht, nur von fünf Constanten ab. 103.

Zweiter Abschnitt.

Die Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe.

§. 1. *Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen* 84

Der allgemeinen Gleichung läfst sich im Allgemeinen eine solche Form geben, in welcher das Product zweier linearer Functionen und eine constante Gröfse vorkommen. Diese Form mufs in einem Uebergangsfalle, weil sie, unendlich grofs werdender Constanten wegen, unbestimmt wird, durch eine andere ersetzt werden. 104—106.

§. 2. *Theorie der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe* 87

Geometrische Deutung der umgeformten Gleichung bei verschiedener Bestimmung der veränderlichen Gröfsen. Asymptoten. Hyperbel. Ellipse. Parabel. 107—111. Specielle geometrische Deutung der Gleichung: $pq+\mu = 0$. 112 u. 113. Unmittelbare Form-Aenderung dieser Gleichung. Zugeordnete Durchmesser. Winkel-Beziehungen. Metrische Relation. Symmetrische Form der Gleichung. Gleiche zugeordnete Durchmesser. Die Quadrat-Summe zweier beliebiger zugeordneter Durchmesser ist constant. Constanter Inhalt umschriebener Parallelogramme. Die Quadrat-Summe der Projectionen zweier beliebiger zugeordneter Durchmesser ist constant. 114—121. Betrachtung der Form $pq+\mu r^2 = 0$. Geometrische Resultate. 122—124. Unmittelbare Form-Aenderung. Theorie der Pole und Polaren in Beziehung auf einen gegebenen Kegelschnitt. Drei zugeordnete Pole und Polaren. Die Puncte einer geraden Linie ordnen sich paarweise so zusammen, dafs die Polare des einen durch den andern geht; ähnlich wie die geraden Linien, welche durch einen gegebenen Punct sich legen lassen, sich paarweise so zusammenordnen, dafs der Pol der einen jedesmal auf der andern liegt. Merkwürdiger Fall, dafs die beiden Linien jedes Paares auf einander senkrecht stehen. Alsdann gehen durch den gegebenen Punct unendlich viele imaginäre Tangenten. Ein solcher Punct heifst Brennpunct (Note). Form, in der ein Brennpunct in Evidenz tritt. Unterscheidung der drei Kegelschnitte. Eine Ellipse und Hyperbel haben zwei reelle und zwei imaginäre Brennpuncte. Eine Parabel hat nur einen Brennpunct. Directrix. 125—131. Betrachtung der allgemeinen Form in der Voraussetzung von Linien-Coordinaten. 132. Deutung und Discussion der Form: $uv+\mu = 0$. Die Parabel ist dadurch characterisirt, dafs sie unendlich weit entfernte gerade Linien berührt. Form, in welcher dieis hervortritt. Eine Reihe von Winkel-Beziehungen, als Deutung dieser Form. 135 u. 136. Form-Aenderung der letzten Gleichung. Metrische Relationen. Brennpuncte. 137—139. Zwei Formen, in welchen ein einzelner Brennpunct und die beiden Brennpuncte in Evidenz treten. 140 u. 141. Allgemeine Bemerkung über die innige Verbindung, in welcher die verschiedenen Eigenschaften eines Kegelschnittes zu einander stehen. 142. Aphoristische Entwicklungen. Newton's Satz vom umschriebenen Viereck. Sätze vom umschriebenen Dreieck. Metrische Relationen in Beziehung auf Polygone. 143—145. Die Sätze von Pascal und Brianchon. 146. Neue und allgemeine analytische Tangenten-Theorie, als geometrische Interpretation des Theorems über homogene Functionen. Ihre Anwendung auf

Seite

Kegelschnitte. 147. Systeme zweier Kegelschnitte. Fundamental-Satz über ihre gemeinschaftlichen Chorden und Tangenten. 148 u. 149.

Dritter Abschnitt.

Die Curven dritter Ordnung.

§. 1. ***Discussion der allgemeinen Gleichung des dritten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen*** 123

Wir können die allgemeine Gleichung im Allgemeinen auf jede Form bringen, die neun unabhängige Constante enthält, und diese Constanten durch die ursprünglichen bestimmen. In den besondern Fällen, wo diese Constanten-Bestimmung unendliche Werthe gibt, müssen wir die Form modificiren; in den besondern Fällen, wo die Constanten unbestimmt bleiben, können wir diese Form noch particularisiren. Einfache Form, welche die allgemeine Gleichung annehmen kann. Discussion der untergeordneten Fälle, und der ihnen entsprechenden Formen mit weniger als neun Constanten. 150—160. Leichtere Uebersicht der sechs verschiedenen Fälle, durch Einführung von Symbolen für lineare Functionen der ursprünglichen veränderlichen Gröfsen. 161. Leichte Bestimmung dieser sechs Fälle aus der ursprünglichen Gleichung. 162.

§. 2. ***Geometrische Bedeutung der verschiedenen Fälle der allgemeinen Gleichung. Asymptoten. Maafs der Annäherung an dieselben. Osculirende Asymptoten. Hyperbolische und parabolische Asymptoten. Allgemeine Eintheilung der Curven dritter Ordnung in Arten*** 132

Indem wir eine Curve dritter Ordnung durch die Gleichung: $pqr + \mu s = 0$, darstellen, ist sie durch vier gerade Linien und einen unbestimmten Coefficienten, oder, statt dieses letztern, durch einen Punct ihres Umfanges bestimmt. 163. Asymptoten. Die Curve schneidet ihre drei Asymptoten auf einer geraden Linie (S). 164. Lage der Curve gegen ihre Asymptoten und die Linie S. 165. Metrische Relationen. 166. Wie die verschiedenen Werthe von μ den verschiedenen Annahmen eines Punctes der Curve entsprechen. 167. Die Curve nähert sich zwiefach jeder Asymptote über jede Gränze hinaus. Die Ordnung der Annäherung steigt, wenn die Linie S der Asymptote parallel ist. 168 u. 169. Fall, dafs die Curve drei osculirende Asymptoten hat. 170. Die beiden Zweige der Curve nähern sich einer gewöhnlichen Asymptote auf entgegengesetzter, einer osculirenden Asymptote auf derselben Seite. 171. Maafs der Annäherung der Curve an ihre Asymptoten. 172. Für Curven, welche dieselben Asymptoten und dieselbe Linie S haben, ist dieses Maafs dem Coefficienten μ proportional. In Beziehung auf die drei verschiedenen Asymptoten ist das Verhältnifs der Annäherung von μ unabhängig. 173 u. 174. Wenn die Curve eine osculirende Asymptote hat, so ist ihre Annäherung an die beiden übrigen Asymptoten dieselbe. 175. Bestimmung des absoluten Maafses der Annäherung an jede der drei Asymptoten. 176. Hyperbeln, welche die Curve auf ihren Asymptoten vierpunctig osculiren. Die gemeinsamen Mittelpuncte der drei Gruppen solcher Hyperbeln liegen auf den drei Asymptoten in gerader Linie. 177 u. 178. Bestimmung der drei fünfpunctig osculirenden Hyperbeln. 179. Betrachtung des Falles zweier imaginärer Asymptoten. Unmittelbare Form-Aenderung der allgemeinen Gleichung. Asymptotenpunct. Dreifache Unterscheidung. Die Linie S kann eine beliebige Lage haben, der reellen Asymptote parallel und unendlich weit liegen. 180—184. Curven mit parabolischen Asymptoten. Uebergangsfall, indem zwei Asymptoten unendlich weit gerückt sind. 185. Jede Curve hat unendlich viele parabolische Asymptoten, die wir, durch Hülfe einer unbestimmten Constanten, in ihrer Gleichung in Evidenz

Seite

bringen können. 186—189. Unter diesen unendlich vielen ist eine in unendlicher Entfernung osculirende. 190. Besonderer Fall, dafs zugleich die geradlinige eine osculirende wird, und die Ordnung der Annäherung an die osculirende parabolische steigt. 191. Allgemeine Bemerkung über Osculation in unendlicher Entfernung. Analogie zwischen hyperbolischer und parabolischer Osculation. 192. Lage der Curve gegen ihre Asymptoten. 193. Bestimmung der Ordnung der Annäherung an die verschiedenartigen parabolischen Asymptoten. Allgemeine Bemerkung. 194. Recapitulation. 195. Fall zweier parallelen Asymptoten. Beziehung desselben zu dem allgemeinen Falle. 196 u. 197. Untergeordneter Fall, dafs die nicht parallele Asymptote eine osculirende ist. Die Ordnung der Annäherung an die beiden parallelen Asymptoten steigt dadurch nicht. 198. Die beiden parallelen Asymptoten sind reell oder imaginär. 199. Sie können zusammenfallen. Dadurch sinkt die Ordnung der Annäherung an dieselben. 200. Recapitulation der sechs verschiedenen Fälle. 201. Fall semicubi-parabolischer Asymptoten. Unendlich viele solcher Asymptoten. Unter diesen eine osculirende. In einem untergeordneten Falle steigt die Ordnung der Osculation. 202. Ordnung der Annäherung an die verschiedenen semicubi-parabolischen Asymptoten. Vergleichende Bemerkungen. 203. Lage der Curve gegen ihre Asymptoten. 204. Recapitulation. 205. — Die Trident-Curve mit einer geradlinigen und parabolischen Asymptoten. Ordnung der Annäherung. 206. Analogien. 207. — Cubische Parabel. 208. — Uebersichtliche Zusammenstellung der neunzehn verschiedenen Fälle. 209. Bemerkungen über diese Eintheilung. 210.

§. 3. *Allgemeine geometrische Construction der Curven dritter Ordnung* 166

Herleitung einer ersten Construction aus der Form der allgemeinen Gleichung, nach welcher sich, wenn die drei Asymptoten, die Linie S und irgend ein Punct der Curve gegeben sind, beliebig viele neue Puncte derselben ergeben, ganz dem analog, wie man neue Puncte einer Hyperbel erhält, wenn man einen Punct derselben und ihre beiden Asymptoten kennt. 211. Fall paralleler Asymptoten. 212. Fall der cubischen Parabel. Characteristische Eigenschaft derselben. 213. Fall imaginärer Asymptoten. 214. Verallgemeinerung der obigen Construction, wodurch sie auf alle Fälle, mit Ausnahme des Falles semicubi-parabolischer Asymptoten, anwendbar wird. 215—218. Betrachtung dieses Falles. 219. Herleitung einer zweiten allgemeinen Construction und Discussion derselben. 220—223. Allgemeiner Gesichtspunct für diese Constructionen. 224.

§. 4. *Mittelpuncte. Doppelpuncte: Durchschnittspuncte zweier reellen Zweige der Curve, conjugirte Puncte, Rückkehrpuncte. Durchmesser* 177

Wenn die drei Asymptoten und die Linie S gegeben sind, hängt die Natur der Curve allein noch von der Annahme eines Punctes derselben ab. 225. Der geometrische Ort für die Mitten aller derjenigen Chorden einer solchen Curve, welche durch den Durchschnitt einer Asymptote und der Linie S gehen, ist eine Hyperbel. Die drei Hyperbeln, die man auf diese Art erhält, schneiden sich in denselben drei Puncten: den Mittelpuncten der Curve. In jedem Mittelpuncte halbiren sich gegenseitig drei Chorden. 226—228. Geht die Curve durch einen Mittelpunct, so ist dieser ein Doppelpunct. Ein solcher Punct kann also eine dreifache Lage haben. 229. Bestimmung der Linie S, wenn die drei Asymptoten und einer der drei Mittelpuncte gegeben sind. Diese Bestimmung ist linear, die umgekehrte vom dritten Grade. 230. Geometrische Construction der Linie S. 231. Construction der Curve, wenn ein Doppelpunct und die drei Asymptoten gegeben sind. 232. Nähere Functionen-Bestimmung für die folgenden Entwicklungen. 233. Particuläre Fälle. Die Linie S ist einer Asymptote parallel; alsdann liegt ein Mittelpunct unendlich weit. 234. Bestimmung der beiden übrigen Mittelpuncte. Sie können imaginär werden und zusammenfallen. Im letztern Falle sind die zusammenfallenden Mittelpuncte zweimal und die Linie S achtmal so weit von der, dieser Linie parallelen, Asymptote entfernt, als von dem Durchschnitt der beiden übrigen. Sechsfache Unterscheidung. 235. Wenn die Linie S unendlich weit liegt, fällt der einzige Mittelpunct

Seite

mit dem Schwerpuncte des Asymptoten-Dreiecks zusammen. 236. Fälle, in denen ein Mittelpunct sich unmittelbar bestimmt. 237. Fall, dafs die Linie S durch den Durchschnitt zweier Asymptoten geht, es fällt ein Mittelpunct in diesen Durchschnitt. 238. Fall, dafs die drei Asymptoten in demselben Puncte sich schneiden. 239. Betrachtung des allgemeinen Falls. Der geometrische Ort für zwei zusammenfallende Mittelpuncte ist die gröfste Ellipse, die sich dem Asymptoten-Dreiecke einschreiben läfst. 240. Die drei Mittelpuncte sind drei zugeordnete Pole in Beziehung auf diese Ellipse. 241. Der Schwerpunct der drei Mittelpuncte ist zugleich der Schwerpunct der drei Durchschnittspuncte der Curve mit ihren Asymptoten. 242. Bestimmung zweier Mittelpuncte durch eine Construction des zweiten Grades, wenn die drei Asymptoten und der dritte Mittelpunct gegeben sind. 243. Wenn die Curve einen Rückkehrpunct hat, so liegt er auf der obigen gröfsten Ellipse. Ein conjugirter Punct liegt innerhalb, ein Durchschnittspunct zweier reellen Zweige aufserhalb derselben. 244. Einziger Fall dreier zusammenfallender Mittelpuncte. Geht die Curve durch denselben Punct, so ist dieser ein Wendungspunct 245. Bestimmung dreier neuen Kegelschnitte, welche durch die drei Mittelpuncte gehen. 246—249. Discussion der besondern Fälle, dafs die Linie S einer Asymptote parallel ist und unendlich weit liegt. 250. — Fall imaginärer Asymptoten. 251. Zur Bestimmung der drei Mittelpuncte erhalten wir hier nur zwei reelle Kegelschnitte. 252 u. 253. Construction der Linie S, wenn ein Mittelpunct gegeben ist. 254. Der geometrische Ort für zwei zusammenfallende Mittelpuncte und für Rückkehrpuncte ist eine Hyperbel. Uebertragung und Modification früherer Resultate. 255 u. 256. Discussion der particulären Fälle. Die Linie S der reellen Asymptote parallel. Sechsfache Unterscheidung. Die Linie S liegt unendlich weit. 257. Die Linie S geht durch den Asymptotenpunct. 258. Wenn der Aysmptotenpunct auf der reellen Asymptote liegt, so ist der Ort für die Rückkehrpuncte ein System von zwei geraden Linien, die in demselben sich schneiden. Wenn die Curve durch diesen Durchschnittspunct geht, so ist derselbe ein Wendungspunct. 259. — Curven mit parabolischen Asymptoten. Bestimmung der beiden Mittelpuncte. Discussion der verschiedenen Fälle. 260 u. 261. Wenn die osculirende parabolische Asymptote von höherer Ordnung ist, so gibt es nur einen Mittelpunct. 262. Der geometrische Ort für zwei zusammenfallende Mittelpuncte und für Rückkehrpuncte ist eine Parabel, die den parabolischen Asymptoten gleich ist, sich aber nach entgegengesetzter Richtung öffnet. Conjugirte Puncte liegen innerhalb, Durchschnittspuncte reeller Zweige aufserhalb derselben. 263 u. 264. — Mittelpuncte der Curven mit semicubi-parabolischen Asymptoten. 265. Definition der Durchmesser. Ihre Gleichung. 266. Die Durchmesser einer Curve dritter Ordnung umhüllen den früher bestimmten Ort der Rückkehrpuncte. Sie gehen, wenn die drei geradlinigen, reellen oder imaginären Asymptoten in demselben Puncte sich schneiden, alle durch diesen Punct. 267. Nothwendigkeit dieser Resultate. 268. Fall parabolischer Asymptoten. 269. Die Durchmesser einer Curve mit parallelen Asymptoten schneiden sich in demselben Puncte. 270. Die Durchmesser der Curven mit semicubi-parabolischen Asymptoten sind parallel. 271. Die Durchmesser der Trident-Curve sind unter einander und der geradlinigen Asymptote parallel. 272. Die Durchmesser der cubischen Parabel fallen alle zusammen. 273. Zugeordnete Durchmesser. Wenn die Curve drei geradlinige Asymptoten hat, so gibt es ein einziges Paar solcher Durchmesser. Diese sind die Asymptoten der Curve der Rückkehrpuncte, und also imaginär oder reell, je nachdem die Asymptoten der Curve dritter Ordnung alle drei reell oder zwei derselben imaginär sind. 274 u. 275.

§. 5. *Aufzählung der verschiedenen Arten der Curven dritter Ordnung* 220

Die verschiedenen Gruppen von Curven dritter Ordnung bestimmen sich durch die gegenseitige Lage der drei geradlinigen Asymptoten, die in untergeordneten Fällen durch krummlinige vertreten werden, gegen einander und zu der Linie S. In jeder Gruppe bestimmen sich die einzelnen Arten nach den Werthen des unbestimmten Coefficienten μ, oder nach der Lage des, denselben vertretenden, beliebigen Punctes der Curve. Im Ganzen ergeben sich 219 verschiedene Arten. 276. Bemerkungen über diese Eintheilung. 277.

Seite

§. 6. *Nähere Untersuchungen über Doppelpuncte und Wendungspuncte* 241

Allgemeine Bemerkungen über die Theorie der singulären Puncte. Eine Fundamental-Unterscheidung mufs darin gelegt werden, dafs man sich eine Curve, einerseits durch einen Punct beschrieben und andrerseits von einer geraden Linie umhüllt, vorstellen kann. Doppelte Definition der Tangente. Einführung partieller Differential-Coefficienten statt der gewöhnlichen. 278. Allgemeine Bedingungs-Gleichungen, dafs von den Durchschnitten einer gegebenen Curve und einer geraden Linie zwei und drei zusammenfallen. 279. Anzahl der Tangenten, die von einem gegebenen Puncte aus sich an eine gegebene Curve legen lassen. Fall der Curven dritter Ordnung. Particularisationen. 280 u. 281. Doppelpuncte. Durch einen solchen Punct gehen unendlich viele oder zwei Tangenten, je nach der Bedeutung dieses Wortes. Die Unterscheidung dieser Puncte hängt vom Zeichen des Werthes, den der Ausdruck: $\left(\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\right)^2 - \frac{d^2U}{d\eta^2} \cdot \frac{d^2U}{d\xi^2}$, erhält, ab. 282. Dieser Ausdruck verschwindet für Rückkehrpuncte. Fall der Curven dritter Ordnung. Unmittelbare Bestimmung der Ellipse der Rückkehrpuncte, wenn die drei Asymptoten gegeben sind. 283. Allgemeiner Ausdruck für die Winkel, unter welchen die beiden Zweige der Curve in einem Doppelpuncte sich schneiden. 284. Entwicklung dieses Ausdrucks für den Fall der Curven dritter Ordnung. 285. Fall, dafs die Durchschnitts-Winkel rechte sind. Der geometrische Ort solcher Puncte für Curven dritter Ordnung, deren drei Asymptoten gegeben sind, ist eine gerade Linie. Construction derselben. 286. Wenn wir den Durchschnittswinkel gleich Null setzen, so erhalten wir die Ellipse der Rückkehrpuncte. 287. Der geometrische Ort für irgend einen gegebenen Winkel ist ein Kegelschnitt. Verschiedenen Winkeln entsprechen verschiedene Kegelschnitte, die unter einander einen imaginären doppelten Contact haben. Bedeutung der Parabel, welche in die Reihe dieser Kegelschnitte gehört. Construction und Bedeutung des Punctes, auf welchen einer dieser Kegelschnitte sich reducirt. Imaginäre Durchschnittswinkel. Zugeordnete Durchmesser conjugirter Puncte. 287 u. 288. Der geometrische Ort solcher Doppelpuncte, in welchen eine Tangente eine gegebene Richtung hat, ist eine Tangente der Ellipse der Rückkehrpuncte. 289. Recapitulation. 290. Betrachtung des Falles imaginärer Asymptoten. 291. Fall parabolischer Asymptoten. 292. Fall semicubi-parabolischer Asymptoten. 293. — Die Curven einer beliebigen Ordnung haben im Allgemeinen Wendungspuncte. Bestimmung dieser Puncte. 294. Fall eines Doppelpunctes. 295. Gränzlage der Tangenten. Der Krümmungshalbmesser in einem Wendungspuncte ist unendlich grofs. 296. Vereinfachung der Bestimmung der Wendungspuncte. Analytischer Hülfssatz. Eine Curve n. Ordnung hat im Allgemeinen $3n(n-2)$ Wendungspuncte. 297 u. 298. Ausführliche Discussion des Falles der Curven dritter Ordnung. Eine solche Curve hat im Allgemeinen neun Wendungspuncte, von welchen immer drei reell und sechs imaginär sind. 299. Ein Doppelpunct vertritt sechs Wendungspuncte und ein Rückkehrpunct insbesondere acht. 300. Bei Curven mit zwei parallelen Asymptoten liegen sechs Wendungspuncte (einem Doppelpuncte entsprechend) unendlich weit. 301. Die Trident-Curve hat auch nur drei Wendungspuncte, von diesen ist einer reell. 302. Die Curven mit semicubi-parabolischen Asymptoten haben acht Wendungspuncte, und unter diesen sechs imaginäre. 303. Die cubische Parabel hat nur einen einzigen und reellen Wendungspunct. 304.

§. 7. *Discussion der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung unter der Form* $pqr + \mu s^2 = 0$ 270

Geometrische Deutung dieser Form. Die Berührungspuncte auf den, den Asymptoten parallelen, Tangenten liegen zu drei auf sechszehn verschiedenen geraden Linien. 305 u. 306. Discussion der verschiedenen Fälle in Beziehung auf das Imaginäre. 307 u. 308. Schema. 309. Fall eines Doppelpunctes 310, eines Rückkehrpunctes 311, osculirender Asymptoten, 312. Betrachtung des Falles zweier imaginären Asymptoten 313, parabolischer Asymptoten 314, semicubi-parabolischer Asymptoten 315. Metrische Relationen. 316. Doppelpuncte und Rückkehrpuncte in den Glei-

Seite

chungen in Evidenz gebracht. 317. Drei allgemeine Constructionen der Curven dritter Ordnung. 318—320.

§. 8. ***Discussion der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung unter der Form*** $pqr + \mu s^3 = 0$ 282

Geometrische Deutung dieser Form. Die WWendungspuncte liegen zu drei in gerader Linie. 321. Metrische Relation. Lage der Curve in Beziehung auf ihre WWendungstangenten und die Linie S. Jede WWendungstangente schneidet, indem sie berührt. 322. Es läfst sich die Gleichung der Curve zwölfmal auf die fragliche Form bringen. Vier verschiedene Fälle, in Beziehung auf das Imaginäre. 323. Directe Nachweisung, dafs eine Curve dritter Ordnung drei reelle und sechs imaginäre WWendungspuncte nothwendig haben mufs. 324. Unterscheidung von sechs Arten von Curven dritter Ordnung, in Beziehung auf ihre drei reellen WWendungspuncte. Unterabtheilungen. 325. Doppelpuncte. Bestimmung der Lage des conjugirten Punctes durch die drei WWendungstangenten und WWendungspuncte. 326. Analytische Tangenten-Theorie. Geometrische Construction der Tangente in einem gegebenen Puncte der Curve, ohne dafs diese selbst gegeben ist. 327. Zwei allgemeine Constructionen der Curven dritter Ordnung. 328 u. 329.

* * *

Allgemeine Andeutungen über Curven dritter Classe. 330. Princip der Reciprocität. Vollständige geometrische Erklärung der Thatsache, dafs, wenn man für eine gegebene Curve von irgend einer n. Ordnung die reciproke Curve und für diese Curve von Neuem die reciproke Curve bestimmt, der Grad der Gleichung dieser letztern von dem $n(n-1)\{n(n-1)-1\}$. auf den n. herabsinkt.

Erster Abschnitt.

Ueber allgemeine Coordinaten-Bestimmung.

§. 1.

Punct-Coordinaten. Bestimmung aller möglichen Systeme linearer Punct-Coordinaten.

1. Indem wir, auf die gewöhnliche Weise, durch die Gleichung

$$F(y,x) = 0 \qquad (1)$$

eine Curve darstellen, betrachten wir x und y als veränderliche Gröfsen, welche für einen bestimmten Punct bestimmte Werthe erhalten. Diese Werthe werden durch Hülfe zweier festen, als gegeben betrachteten, geraden Linien, der Coordinaten-Axen, für alle Puncte auf eine gleichmäfsige Weise construirt. Wir legen nemlich zu diesem Ende durch den bezüglichen Punct eine gerade Linie nach jeder der beiden gegebenen geraden Linien parallel mit der jedesmaligen andern, und diese beiden begränzten geraden Linien nennen wir die beiden Coordinaten des Punctes. Alsdann können wir auch umgekehrt, wenn zwei Coordinaten gegeben sind, denjenigen Punct construiren, welchem sie angehören, und endlich auch, wenn, wie oben, blofs eine Gleichung zwischen den beiden Coordinaten gegeben ist, und diese letztern, indem sie durch jene Gleichung noch nicht bestimmt sind, als veränderliche Gröfsen angesehen werden, eine stetige Aufeinanderfolge von Puncten: den geometrischen Ort, von dem wir sagen, dafs er durch die gegebene Gleichung dargestellt werde.

2. Wenn wir

$$q = \varphi(y,x), \qquad p = \psi(y,x), \qquad (2)$$

setzen, indem wir durch φ und ψ beliebige Functionen bezeichnen, so sind q und p vollkommen bestimmt, sobald y und x es sind. Jedem gegebenen Puncte entsprechen also auch bestimmte Werthe von q und p. Um diese Werthe auf die einfachste Weise geometrisch zu construiren, wollen wir uns derjenigen beiden Curven bedienen, welche durch die Gleichungen

$$\varphi(y,x) = 0, \qquad \psi(y,x) = 0, \qquad (3)$$

dargestellt werden, und diese Curven, wie oben die Coordinaten-Axen, als gegeben betrachten. Für jeden Punct, welcher auf der ersten dieser beiden Curven liegt, ist der Werth von q, für jeden Punct, welcher auf der zweiten Curve liegt, der Werth von p gleich Null. Für irgend einen gegebenen Punct läfst sich jede der beiden veränderlichen Gröfsen q und p, so lange φ und ψ ganze, in Beziehung auf y oder x algebraische, Functionen von irgend beliebigen Graden bezeichnen, als ein, mit einer constanten Gröfse multiplicirtes Product von Segmenten geometrisch darstellen. Diese Segmente liegen auf denselben oder auf zwei verschiedenen, durch den fraglichen Punct gehenden, geraden Linien, zwischen diesem Puncte und den Durchschnittspuncten mit den beiden durch die letzten Gleichungen dargestellten Curven.

Denken wir uns nemlich etwa die erste der vorstehenden beiden Gleichungen, $\varphi(y,x) = 0$, in Beziehung auf diejenige veränderliche Gröfse, welche in ihr nur algebraisch und bis zu irgend einem n. Grade erhoben vorkommt, und die y sein mag, aufgelöset, und bezeichnen alsdann die n Würzeln durch $y_1, y_2, .. y_n$ und überdiefs den Coefficienten der höchsten Potenz von y durch $\varkappa$, so ergibt sich unmittelbar:

$$q = \varkappa(y-y_1)(y-y_2)\ldots.(y-y_n).$$

$y_1, y_2, .. y_n$ sind Functionen der veränderlichen Gröfse x; es ist klar, dafs sie für einen gegebenen Punct, dem ein gegebenes x entspricht, diejenigen Werthe der veränderlichen Gröfse y bedeuten, welche den n Durchschnittspuncten derjenigen geraden Linie, welche durch den gegebenen Punct geht und der Coordinaten-Axe $x = 0$ parallel ist, mit der gegebenen Curve: $\varphi(y,x) = 0$, entsprechen. Nennen wir also diese n Durchschnittspuncte $Q_1, Q_2, .. Q_n$ und den gegebenen Punct M, so gibt die letzte Gleichung:

$$q = \varkappa . Q_1M . Q_2M \ldots Q_nM. \qquad (4)$$

Wenn wir die Gleichung $\psi(y,x) = 0$ ganz auf dieselbe Weise behandeln und, je nachdem entweder y oder x in dieser Gleichung nur algebraisch vorkommt, die Durchschnittspuncte der bezüglichen gegebenen Curve mit einer durch den gegebenen Punct gehenden geraden Linie, die entweder der Coordinaten-Axe $x = 0$, wie vorhin, oder der Coordinaten-Axe $y = 0$ parallel ist, durch $P_1, P_2, \ldots P_m$ bezeichnen, so finden wir

$$p = \pi . P_1M . P_2M \ldots P_mM. \qquad (5)$$

π bedeutet, wie in der vorigen Gleichung $\varkappa$, einen unbestimmten Coefficienten.

3. Wir können also die irgend einem gegebenen Puncte entsprechenden Werthe der beiden veränderlichen Gröfsen p und q, durch die Vermittelung zweier gegebenen Curven und zweier gegebenen Richtungen construiren. Diese Richtungen sind durch die Richtungen der ursprünglichen Coordinaten-Axen angezeigt; von diesen Axen selbst aber ist in der fraglichen Construction jede Spur verschwunden. An ihre Stelle sind die beiden gegebenen Curven getreten. Es kommen auch bei der ursprünglichen Bestimmung von y und x, aufser den beiden Axen, eigentlich auch noch zwei gegebene Richtungen in Betracht. Diese sind aber, nach hergebrachter Weise, sogleich dadurch ein für alle Mal bestimmt, dafs die zu der einen Coordinaten-Axe gehörige Richtung durch die andere Coordinaten-Axe angezeigt wird. Hiernach ist es natürlich, auch p und q als Coordinaten zu betrachten: als solche veränderliche Gröfsen, welche für einen gegebenen Punct bestimmte Werthe erhalten und durch Hülfe zweier gegebenen geometrischen Oerter (geraden Linien oder Curven) und zweier gegebenen Richtungen für alle Puncte auf gleichmäfsige Art construirt werden.

Wenn wir beispielsweise die Voraussetzung machen, dafs die beiden gegebenen Curven zwei parabolische oder überhaupt zwei solche sind, die nach einer bestimmten Rich-

tung von einer geraden Linie nur in einem einzigen Puncte geschnitten werden, und wenn wir zugleich die Coordinaten-Axen $x = 0$ und $y = 0$ diesen beiden Richtungen parallel annehmen, so ist allgemein:

$$q = \varkappa(y - \varphi x) = \varkappa . Q_1M, \qquad p = \pi(x - \psi y) = \pi . P_1M.$$

φ und ψ können alle möglichen Functionen bedeuten. Q_1 und P_1 sind die Durchschnittspuncte der beiden durch den gegebenen Punct M gehenden, den Coordinaten-Axen $x = 0$ und $y = 0$ parallelen, geraden Linien mit den bezüglichen beiden gegebenen Curven. $\varkappa$ und π sind zwei Constante. Setzen wir dieselben gleich der Einheit, so wird die Bestimmung von q und p der Bestimmung von y und x ganz analog: an die Stelle der geradlinigen Coordinaten-Axen sind blofs krummlinige getreten.

4. Wenn die Functionen, durch welche q und p eingeführt werden, und demnach die beiden Curven (3) algebraische sind — ein Fall, auf den wir in dem Folgenden uns überall beschränken werden —, so können wir die beiden gegebenen Richtungen beliebig ändern, und brauchen alsdann blofs die Constanten $\varkappa$ und π gehörig zu bestimmen, um dieselben Werthe von q und p zu erhalten. Der Beweis dieser Behauptung liegt unmittelbar darin, dafs die zweiten Theile der Gleichungen (2) von demselben Grade bleiben, und nur die constanten Coefficienten der einzelnen Glieder, namentlich $\varkappa$ und π, andere Werthe erhalten, wenn wir die ursprünglichen Coordinaten-Axen ganz beliebig drehen, und dann statt y und x die neuen Coordinaten einführen; was ohne alle Entwicklung klar ist, wenn wir erwägen, dafs diese Einführung durch lineare und ganze Functionen der neuen Coordinaten geschieht *). Betrachten wir die beiden constanten Richtungen nicht als gegeben, sondern als willkührlich zu bestimmen, so können wir, im Allgemeinen, die Constanten $\varkappa$ und π beliebig annehmen und insbesondere gleich Eins setzen. Zugleich aber ist hierbei zu bemerken, dafs es im Allgemeinen Maxima und Minima der Werthe von $\varkappa$ und π gibt. Und endlich, wenn nach irgend einer Richtung eine der Curven (3) von einer geraden Linie in weniger Puncten geschnitten wird, als der Grad ihrer Gleichung anzeigt, das heifst, wenn einer oder mehrere Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, so erscheint das entsprechende q oder p, indem die bezügliche Constante alsdann gleich Null zu nehmen ist, unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$.

5. Die bisherigen Erörterungen gründen sich auf die Voraussetzung, dafs φ und ψ ganze Functionen von y und x bedeuten; wir wollen nun den allgemeinen Fall gebrochener Functionen betrachten und

$$q = \frac{\varphi'(y,x)}{\varphi''(y,x)}, \qquad p = \frac{\psi'(y,x)}{\psi''(y,x)},$$

setzen, indem wir durch φ', ψ', φ'' und ψ'' ganze und rationale Functionen von beliebigen Graden anzeigen. Die Gleichungen

$$\varphi'(y,x) = 0, \qquad \psi'(y,x) = 0,$$
$$\varphi''(y,x) = 0, \qquad \psi''(y,x) = 0,$$

stellen alsdann vier algebraische Curven dar. Für jeden Punct, der auf den ersten bei-

*) Dieselbe Behauptung ist auch eine unmittelbare Folge aus dem Satze, den Newton zuerst in seiner „*Enumeratio linearum tertii ordinis*“ aufstellte; dafs nemlich, wenn eine algebraische Curve irgend eines n. Grades gegeben ist, die von den beiden Schenkeln eines Winkels oder deren Verlängerungen geschnitten wird: das Product der n Segmente, die auf dem einen Schenkel zwischen dem Scheitel des Winkels und den n Durchnittspuncten mit der Curve liegen, zu dem entsprechenden Producte der n Segmente auf dem andern Schenkel in einem Verhältnisse stehen, das, wie man auch den Winkel parallel mit sich selbst verrücken mag, unverändert dasselbe bleibt.

den dieser Curven liegt, sind die Werthe für q und p bezüglich gleich Null; für jeden Punct, der auf den beiden übrigen Curven liegt, sind diese Werthe unendlich. Legen wir nach derselben Richtung oder nach verschiedenen Richtungen durch irgend einen gegebenen Punct M vier gerade Linien, welche den vier Curven bezüglich in den Puncten $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$; $P_1, P_2, \ldots P_m$; $S_1, S_2, \ldots S_s$; $R_1, R_2, \ldots R_k$ begegnen, so erhalten wir nach dem Vorigen sogleich:

$$q = \varkappa . \frac{Q_1M . Q_2M \ldots Q_nM}{S_1M . S_2M \ldots S_sM}, \qquad p = \pi . \frac{P_1M . P_2M \ldots P_mM}{R_1M . R_2M \ldots R_kM}.$$

Das allgemeine Resultat, zu dem wir auf diesem Wege gelangt sind, ist folgendes. Die Lage eines Punctes ist überhaupt durch zwei Bestimmungsstücke gegeben. Sind diese Bestimmungsstücke von der Art, dafs sie für einen gegebenen Punct auf eine einzige und rationale Weise construirt werden können, so wissen wir, dafs dieselben, wie auch ihre Construction ursprünglich sich darstellen mag, sich immer durch Hülfe von vier Curven (geometrischen Oertern) construiren lassen. Dasselbe Resultat können wir auch auf folgende Weise ausdrücken. Durch vier gegebene Curven erhalten wir die allgemeinste Coordinaten-Bestimmung, in der jedem Puncte zwei einzige Coordinaten entsprechen.

6. So wie eine Gleichung zwischen y und x eine Curve darstellt, so thut es auch eine Gleichung zwischen q und p. Um eine Curve, deren Gleichung zwischen y und x gegeben ist, durch eine Gleichung zwischen q und p auszudrücken, brauchen wir blofs zwischen der gegebenen Gleichung und denjenigen beiden Gleichungen, durch welche q und p eingeführt werden, y und x zu eliminiren. In ihrer allgemeinsten Form enthalten die letztgenannten beiden Gleichungen alle vier veränderlichen Gröfsen y, x, q und p. Wäre hingegen die Gleichung der Curve zwischen q und p ursprünglich gegeben, so müssen wir, um die Gleichung der Curve zwischen y und x zu erhalten, zwischen der gegebenen Gleichung und jenen beiden Gleichungen, welche die gegenseitige Beziehung von q und p zu y und x ausdrücken, q und p eliminiren.

7. Wir wollen hier nur diejenigen Coordinaten-Systeme betrachten, in welchen eine gerade Linie dnrch eine Gleichung des ersten Grades dargestellt wird. Es ist klar, dafs, wenn wir irgend ein solches Coordinaten-System kennen, wir sogleich alle möglichen erhalten. Es seien η und ξ Coordinaten dieser Art, so dafs, der obigen Bestimmung gemäfs, die Gleichung

$$A\eta + B\xi + C = 0, \qquad (1)$$

in welcher wir durch A, B und C drei Constante bezeichnen, eine gerade Linie darstellt. Sind y und x Coordinaten derselben Art, so erhalten wir, indem wir durch diese η und ξ auf die allgemeinste Weise so bestimmen, dafs die vorstehende Gleichung auch in Beziehung auf y und x vom ersten Grade bleibt, die folgenden beiden Gleichungen:

$$\eta = \frac{\varkappa(y + a'x + b')}{\varrho(y + a''x + b'')}, \qquad \xi = \frac{\pi(y + ax + b)}{\varrho(y + a''x + b'')}. \qquad (2)$$

Da es rücksichtlich der Allgemeinheit in der Bestimmung von η und ξ durchaus einerlei ist, was für Coordinaten der fraglichen Art y und x bedeuten, so liegt es nahe, anzunehmen, dafs diese veränderlichen Gröfsen gewöhnliche Parallel-Coordinaten darstellen, und durch deren Vermittelung die Coordinaten η und ξ auf die einfachste Weise zu construiren. Dafs diese Annahme wirklich der Allgemeinheit keinen Abbruch thut, ergibt sich direct, wenn wir als die allgemeinen Coordinaten η' und ξ' nehmen und dieselben von η und ξ durch Gleichungen von derselben Form, als durch welche η und ξ durch y und x bestimmt sind, abhängen lassen. Durch Elimination von η und ξ erhalten wir alsdann,

um η' und ξ' unmittelbar durch y und x auszudrücken, wiederum Gleichungen ganz von der obigen Form.

Solche Coordinaten, durch welche eine gerade Linie durch eine Gleichung des ersten Grades dargestellt wird, wollen wir lineare Punct-Coordinaten nennen. η und ξ drücken bei gehöriger Annahme der acht Constanten a, a', a'', b, b', b'', $\frac{\varkappa}{\varrho}$ und $\frac{\pi}{\varrho}$ alle möglichen linearen Punct-Coordinaten aus. Die Ausdrücke für dieselben stellen sich in der allgemeinen Form als Quotienten dar, es ist

$$\eta = \frac{q}{r}, \qquad \xi = \frac{p}{r},$$

indem wir

$$\varrho(y+a''x+b'') = r, \quad \varkappa(y+a'x+b') = q, \quad \pi(y+ax+b) = p, \tag{3}$$

setzen, und eine der drei Constanten ϱ, $\varkappa$ und π beliebig annehmen, oder überhaupt zwischen denselben eine beliebige lineare Bedingungs-Gleichung feststellen. Die Gleichung der geraden Linie, die allgemeine Gleichung ersten Grades zwischen den zwei veränderlichen Gröfsen η und ξ, geht alsdann in folgende über:

$$Aq+Bp+Cr = 0;$$

mithin in die allgemeine homogene Gleichung des ersten Grades zwischen den drei veränderlichen Gröfsen r, q und p. Die drei linearen Functionen p, q und r stehen in ganz ähnlicher Beziehung zu dem Puncte, dessen Lage durch sie bestimmt wird; sie kommen ganz auf gleiche Weise in der Gleichung der geraden Linie vor. Nur in der Bestimmung der Coordinaten η und ξ verschwindet diese Symmetrie; der Grund davon liegt offenbar darin, dafs wir statt dieser Coordinaten auf ganz entsprechende Art auch $\frac{r}{q}$ und $\frac{p}{q}$ oder $\frac{r}{p}$ und $\frac{q}{p}$ als Coordinaten nehmen können. Das Ganze dieser dreifachen Coordinaten-Bestimmung ist in Beziehung auf r, q und p symmetrisch. Hiernach werden wir aufgefordert, diese drei Functionen ganz aus demselben Gesichtspuncte zu betrachten. Wir können dieselben gleichfalls Coordinaten nennen, wonach denn ein Punct drei Coordinaten hat, und derselbe durch die Quotienten einer beliebigen dieser drei Coordinaten in die beiden übrigen geometrisch bestimmt wird.

Es ist offenbar, dafs überhaupt der Grad der Gleichung einer Curve unverändert derselbe bleibt, welche lineare Coordinaten-Bestimmung wir auch immerhin zu Grunde legen mögen, und dafs, wenn wir p, q und r statt η und ξ einführen, die Gleichung der Curve in Beziehung auf diese Gröfsen von demselben Grade bleibt und homogen wird.

8. Je nachdem wir von verschiedenen linearen Coordinaten-Systemen ausgehen, erhalten die acht Constanten, von welchen die allgemeine Coordinaten-Bestimmung abhängt, verschiedenfache geometrische Bedeutung; die Construction des allgemeinen Coordinaten-Systems wird durch verschiedene ursprünglich angenommene verschiedenfach vermittelt. Welches System wir aber auch zu Grunde legen mögen, die Construction der sechs ersten jener Constanten, a, a', a'', b, b' und b'', läfst sich immer von drei festen geraden Linien abhängig machen, von denjenigen nemlich, deren Gleichungen die folgenden

$$y+a''x+b'' = 0, \qquad y+a'x+b' = 0, \qquad y+ax+b = 0,$$

oder, was dasselbe heifst, die folgenden sind:

$$r = 0, \qquad q = 0, \qquad p = 0. \tag{4}$$

Die Art und Weise aber, wie die Werthe von r, q und p für irgend einen gegebenen

Punct durch die Vermittelung dieser drei geraden Linien construirt wird, hängt von der Art der Coordinaten y und x ab. In der Voraussetzung gewöhnlicher Parallel-Coordinaten ergibt sich, wenn M der gegebene Punct ist und man durch denselben, parallel mit der Axe $x = 0$, eine gerade Linie zieht, welche den durch die letzten drei Gleichungen dargestellten geraden Linien in den Puncten R, Q und P begegne, ganz dem allgemeinen Falle der 2. Nummer entsprechend,

$$r = \varrho.RM, \qquad q = \varkappa.QM, \qquad p = \pi.PM. \tag{5}$$

In der vorstehenden Coordinaten-Bestimmung ist, mit Ausnahme der Richtung einer der beiden Axen des ursprünglichen Systems, von diesem Systeme keine Spur mehr übrig geblieben. Aendern wir diese Richtung um irgend einen Winkel δ, so ergibt sich sogleich, wenn wir die drei Winkel, welche die ursprüngliche Richtung mit den drei geraden Linien (4) bilden, γ, β und α, und die drei Durchschnittspuncte der, nach der neuen Richtung durch den gegebenen Punct M gelegten geraden Linie mit denselben drei geraden Linien (4) R', Q' und P' nennen:

$$r = \frac{\varrho \sin(\gamma \pm \delta)}{\sin\gamma}.R'M, \quad q = \frac{\varkappa \sin(\beta \pm \delta)}{\sin\beta}.Q'M, \quad p = \frac{\pi \sin(\alpha \pm \delta)}{\sin\alpha}.P'M. \tag{6}$$

Es hat also, in Uebereinstimmung mit der 4. Nummer, die Aenderung jener constanten Richtung blofs Einflufs auf die Bestimmung der Constanten ϱ, $\varkappa$ und π, und ist also ein ganz willkührliches Element in unserer Coordinaten-Bestimmung, so lange wir diesen drei Constanten oder auch nur zweien derselben ihre Unbestimmtheit lassen.

„Man erhält durch die Vermittelung dreier gegebenen geraden Linien, die man als Coordinaten-Axen betrachten kann, und dreier Coefficienten, von denen, nachdem man zuvor eine constante Richtung und einen Punct derselben belicbig angenommen hat, die beiden übrigen gegeben sind, die drei Coordinaten r, q und p eines gegebenen Punctes, wenn man durch diesen Punct nach der constanten Richtung eine gerade Linie legt und auf derselben diejenigen Segmente, welche zwischen ihren Durchschnittspuncten mit den drei gegebenen geraden Linien und dem gegebenen Puncte liegen, nimmt und mit den bezüglichen Coefficienten multiplicirt."

Ein besonderer Fall ist derjenige, dafs jeder der drei Coefficienten gleich Eins ist.

9. Statt der drei Coefficienten ϱ, $\varkappa$ und π können wir drei Winkel γ', β' und α' durch die folgenden drei Gleichungen einführen,

$$\varrho = \pm\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}, \qquad \varkappa = \pm\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}, \qquad \pi = \pm\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}, \tag{7}$$

wobei wir, je nachdem ϱ, $\varkappa$ und π positiv oder negativ sind, in den zweiten Theilen der bezüglichen drei Gleichungen das obere oder untere Zeichen nehmen müssen.

Wenn wir alsdann von dem gegebenen Puncte aus nach den drei geraden Linien (4) unter den drei auf diese Weise bestimmten Winkeln drei gerade Linien ziehen, welche jenen bezüglich in den Puncten R_1, Q_1 und P_1 begegnen, so ist, abgesehen vom Vorzeichen:

$$r = R_1M, \qquad q = Q_1M, \qquad p = P_1M.$$

Um die Vorzeichen, mit welchen die drei Coordinaten-Werthe eines gegebenen Punctes zu behaften sind, von der ursprünglichen Coordinaten-Bestimmung ganz unabhängig zu machen, wollen wir das in den Gleichungen (7) gebrauchte doppelte Zeichen als ein beliebig zu wählendes betrachten und demnach dasselbe immer so annehmen können, dafs für einen, willkührlich bestimmten Punct die Coordinaten alle drei positiv sind. Alsdann bestimmen sich die Vorzeichen der Coordinaten für jeden andern Punct unmittelbar nach

der Bemerkung, dafs jede Coordinate, etwa p, ihr Zeichen, indem sie durch Null hindurch geht, ändert, wenn der bezügliche Punct von einer Seite der dieser Coordinate entsprechenden Axe, $p = 0$, auf die andere Seite hinübertritt. Wir werden in den folgenden Entwickelungen überall die Coordinaten derjenigen Puncte, welche innerhalb des von den drei Coordinaten-Axen (4) gebildeten Dreiecks liegen, positiv nehmen. Bei dieser Annahme müssen wir also für jeden Punct in den von einer beliebigen Dreiecks-Seite und den Verlängerungen der beiden übrigen gebildeten unbegränzten Flächen-Räume, die der Dreiecks-Seite entsprechende Coordinate negativ und die beiden übrigen positiv, so wie für jeden Punct in den von den Verlängerungen zweier Seiten gebildeten unbegränzten Flächen-Räumen, diejenigen beiden Coordinaten, welche diesen beiden Seiten entsprechen, negativ und die dritte positiv nehmen. Für keinen Punct sind die drei Coordinaten zugleich negativ.

Die allgemeine Coordinaten-Bestimmung wird durch die obige Voraussetzung zwar beschränkt, diese Beschränkung aber dann wieder aufgehoben, wenn wir den willkührlich bestimmten Punct nach einander in verschiedenen von den drei Axen gebildeten Flächen-Räumen annehmen. Wenn wir, um die Ideen zu fixiren, voraussetzen, dafs die zur Vermittelung der Construction dienende Axe: $y = 0$, der Axe: $p = 0$, parallel sei, und die Spitze des Axen-Dreiecks in Beziehung auf die letztgenannte Axe nach der positiven Seite hin liege, so setzt die Annahme, dafs, für einen Punct innerhalb des Dreiecks, p, q und r positive Werthe haben, voraus, dafs π positiv, $\varkappa$ und ϱ aber negativ seien, weil alsdann, auf einen solchen Punct bezogen, die Ausdrücke $(y+a'x+b')$ und $(y+a''x+b'')$ negativ sind. Die verschiedenen Vorzeichen in den Gleichungen (7) gestatten eine achtfache Combination zu drei, die aber in der Bestimmung der Coordinaten η und ξ nur eine vierfache Verschiedenheit hervorbringt. Dieser entspricht eine vierfache Annahme des Punctes, über dessen Coordinaten wir von vorne herein eine Zeichen-Bestimmung machen. Die Lage dieses Punctes in zwei und zwei der von den Axen gebildeten unendlichen Flächen-Räume bezieht sich hierbei auf denselben Fall.

Die durch die Gleichungen (7) statt ϱ, $\varkappa$ und π eingeführten Ausdrücke haben dieselbe Allgemeinheit als diese Coefficienten. Es kann einer der drei Winkel γ', β' und α' beliebig angenommen werden, nur gibt es für denselben, im Allgemeinen, ein Minimum der Abweichung von einem rechten Winkel.

„Wenn drei gerade Linien und drei Winkel gegeben sind, so erhält man die drei allgemeinen Coordinaten r, q und p eines gegebenen Punctes, wenn man von diesem Puncte aus drei solche gerade Linien nach den drei gegebenen zieht, welche mit diesen bezüglich die drei gegebenen Winkel bilden."

Ein besonderer Fall der allgemeinen Coordinaten-Bestimmung, dem wir eine besondere Aufmerksamkeit schenken müssen, ist derjenige, dafs die gegebenen Winkel alle drei rechte sind.

„Wenn drei gerade Linien gegeben sind, so erhält man die drei Coordinaten eines gegebenen Punctes, wenn man, von diesem Puncte aus, auf die drei gegebenen geraden Linien drei Perpendikel fällt." *)

*) Dieses Coordinaten-System macht den Gegenstand einer frühern Abhandlung vom Jahre 1828 aus, die den ersten Versuch enthält, den Begriff der gewöhnlichen Coordinaten-Bestimmung zu erweitern, und was ich damals, der grofsen Verschiedenheit der Algorithmen wegen, nicht sogleich erkannte: es ist mit dem barycentrischen Calcül des Herrn Möbius, dem Wesen nach, ganz dasselbe. *„Ueber ein neues Coordinaten-System."* Crelle's Journal, V. S. 1.

10. Wenn wir die Länge der drei Seiten des von den drei Coordinaten-Axen gebildeten Dreiecks R, Q und P und den Inhalt desselben Δ nennen, so erhalten wir, wenn wir die letzte Coordinaten-Bestimmung zu Grunde legen und zugleich die in der vorigen Nummer gemachte Zeichen-Bestimmung berücksichtigen, zwischen den drei Coordinaten-Werthen r, q und p irgend eines beliebigen Punctes die nachstehende Relation:

$$Rr+Qq+Pp = 2\Delta. \qquad (8)$$

Nennen wir ferner die den drei Seiten R, Q und P gegenüberliegenden Winkel des fraglichen Dreiecks (ϱ), $(\varkappa)$ und (π), so ist offenbar

$$R\sin(\pi)\sin(\varkappa) = Q\sin(\pi)\sin(\varrho) = P\sin(\varkappa)\sin(\varrho),$$

und wenn wir diese einander gleichen Ausdrücke, der Kürze halber, gleich k setzen,

$$2\Delta\sin(\varrho)\sin(\varkappa)\sin(\pi) = k^2.$$

Hiernach geht die Gleichung (8), wenn wir alle Glieder derselben zuvörderst mit $\sin(\varrho)\sin(\varkappa)\sin(\pi)$ multipliciren und dann durch k dividiren, in die folgende über:

$$r\sin(\varrho)+q\sin(\varkappa)+p\sin(\pi) = k. \qquad (9)$$

11. Wir können die Gleichungen (8) und (9) unter verschiedenen Gesichtspuncten betrachten. Sie werden identische, wenn wir uns r, q und p durch y und x oder durch irgend beliebige andere Coordinaten ausgedrückt denken, und so aufgefafst, enthält jede dieser Gleichungen, nachdem die durch (4) dargestellten drei geraden Linien gegeben sind, die Bestimmung der drei Coefficienten ϱ, $\varkappa$ und π.

Es sei, um diese Behauptung in ihrer Allgemeinheit nachzuweisen,

$$\varrho' r+\varkappa' q+\pi' p = c$$

irgend eine Gleichung, die, wie (8) oder (9), eine identische wird, wenn wir für r, q und p ihre Ausdrücke in y und x, nemlich

$$r = \varrho(y+a''x+b''), \qquad q = \varkappa(y+a'x+b'), \qquad p = \pi(y+ax+b), \qquad (10)$$

setzen. Alsdann erhalten wir die nachstehenden drei Bedingungs-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho'\varrho + \varkappa'\varkappa + \pi'\pi &= 0, \\ a''\varrho'\varrho + a'\varkappa'\varkappa + a\pi'\pi &= 0, \\ b''\varrho'\varrho + b'\varkappa'\varkappa + b\pi'\pi &= c. \end{aligned}$$

Indem wir, den obigen Voraussetzungen gemäfs, ϱ', $\varkappa'$, π', a, a' und a'' als gegeben ansehen, erhalten wir aus den beiden ersten der vorstehenden drei Gleichungen unabhängig von der dritten Gleichung die Quotienten je zweier der drei Coefficienten ϱ, $\varkappa$ und π, und dann gibt die dritte Gleichung die absolute Bestimmung dieser Coefficienten selbst, da auch c, b, b' und b'' als gegeben zu betrachten sind. Zugleich sehen wir; dafs jene Quotienten unverändert dieselben bleiben, wie auch c seinen Werth ändern mag. Diese Constante kann jeden beliebigen Werth haben, nur dürfen wir dieselbe nicht gleich Null nehmen, weil sonst die obigen Gleichungen im Allgemeinen einen Widerspruch enthalten. So zum Beispiel ändert sich offenbar, wenn wir die von einem Puncte auf die drei Axen gefällten, und mit ein und denselben constanten Coefficienten μ multiplicirten Perpendikel, statt der blofsen Perpendikel, durch r, q und p bezeichnen, in der Gleichung (9) offenbar nur der zweite Theil, und wir erhalten statt derselben, indem wir $k' = \frac{k}{\mu}$ setzen, folgende Gleichung:

$$r\sin(\varrho)+q\sin(\varkappa)+p\sin(\pi) = k'.$$

So lange $k'<k$ und demnach $\mu>1$, können wir die drei durch diese neue Gleichung bezeichneten Coordinaten als gerade Linien construiren, welche, von dem bezüglichen Puncte aus, nach jeder der drei, unverändert gebliebenen Axen, unter demjenigen constanten Win-

Winkel ϑ gelegt werden, der durch die Gleichung $\sin\vartheta = \frac{1}{\mu}$ gegeben ist. k' wird nur dann gleich Null, wenn $\mu = \infty$ oder, was dasselbe heifst, wenn $\vartheta = 0$, und in diesem Falle wird die Coordinaten-Bestimmung illusorisch.

Nachdem sich auf diese Weise herausgestellt hat, wie die Einführung der Gleichung (10) der frühern directen Bestimmung der Constanten ϱ, $\varkappa$ und π gleichbedeutend ist, und zwar in der Art, dafs, wenn wir in dieser Gleichung die Constante c unbestimmt lassen, sich dennoch schon die beiden zur Construction von η und ξ allein erforderlichen Quotienten $\frac{\varkappa}{\varrho}$ und $\frac{\pi}{\varrho}$ ergeben, wollen wir nun direct durch Hülfe der genannten Gleichung, indem wir die drei Coordinaten-Axen als gegeben betrachten, die Coordinaten irgend eines gegebenen Punctes construiren. Diese Bestimmung verdient, abgesehen von ihrer analytischen Eleganz und der damit verbundenen gröfsern Leichtigkeit in den analytischen Entwicklungen, auch deshalb den Vorzug, weil hier durchaus keine willkührliche Annahme zu Grunde gelegt wird, während in der frühern Bestimmung, selbst wenn wir die Einführung des zur Vermittelung dienenden Coordinaten-Systems aufser Acht lassen, wir überdiefs auch noch ganz willkührlich r, q und p, welche lineare Functionen von der allgemeinsten Form $(Ay+Bx+C)$ bedeuten, unter der Form $\varrho(y+ax+b)$ eingeführt haben, während wir statt derselben auch folgende $\mu(\alpha y+\beta x+\gamma)$ hätten nehmen können, indem wir zugleich hierbei irgend eine lineare Beziehung zwischen α, β und γ vorausgesetzt und zum Beispiel auch γ statt α gleich Eins genommen hätten.

12. Wenn wir nach einander die drei Winkelpuncte des von den drei Coordinaten-Axen gebildeten Dreiecks betrachten, so finden wir aus der Gleichung (10) für dieselben:

$$\begin{aligned} p &= 0, & q &= 0, & \varrho' r' &= c, \\ p &= 0, & r &= 0, & \varkappa' q' &= c, \\ q &= 0, & r &= 0, & \pi' p' &= c; \end{aligned}$$

wobei wir, zur Unterscheidung, diejenigen drei Coordinaten der drei Durchschnitte je zweier der drei Axen, welche sich auf die jedesmalige dritte beziehen, r', q' und p' nennen. Führen wir diese drei neuen Constanten statt ϱ', $\varkappa'$, π' und c in die Gleichung (10) ein, so nimmt dieselbe folgende Form an:

$$\frac{r}{r'}+\frac{q}{q'}+\frac{p}{p'} = 1. \qquad (11)$$

In dieser Gleichung, von welcher wir auch, statt von (10), ursprünglich hätten ausgehen können, sind r', q' und p' gegebene Gröfsen. Wenn wir also von dem Durchschnitte der beiden Axen $q = 0$ und $p = 0$ eine, der gegebenen Gröfse r' gleiche, gerade Linie nach der dritten Axe $r = 0$ legen, so ist diese gerade Linie die Coordinate jenes Durchschnittes, und für irgend einen andern gegebenen Punct erhalten wir hiernach die entsprechende Coordinate, wenn wir, parallel mit der eben construirten geraden Linie, von dem gegebenen Puncte aus, nach der bezüglichen Axe: $r = 0$, eine neue gerade Linie legen. Und ganz auf gleiche Weise können wir vermittelst der beiden andern gegebenen Gröfsen q' und p' diejenigen Richtungen bestimmen, nach denen wir, von dem gegebenen Puncte aus, gerade Linien nach den bezüglichen Axen legen müssen, damit diese geraden Linien die Coordinaten q und p jenes Punctes darstellen.

13. Ein Fall, welcher vor allen übrigen besonders hervorgehoben zu werden verdient, ist derjenige, dafs die Gleichung (11), auf die wir unsere Coordinaten-Bestimmung gründen, in Beziehung auf die drei Coordinaten r, q und p symmetrisch ist. Die

angeführte Gleichung geht alsdann, indem wir $r' = q' = p' = \beta$ setzen, in die folgende über:

$$r+q+p = \beta. \qquad (12)$$

Um für diesen Fall die Coordinaten zu construiren, legen wir nach der vorigen Nummer in dem von den drei Axen gebildeten Dreiecke von jedem Winkelpuncte aus nach der gegenüberliegenden Seite eine solche gerade Linie, welche die gegebene Länge β hat, was, beiläufig bemerkt, im Allgemeinen auf doppelte Weise geschehen kann. Die Richtungen der drei geraden Linien, welche man auf diese Weise erhält, sind diejenigen, nach welchen man für jeden gegebenen Punct die drei Coordinaten als gerade Linien, die, von diesem Puncte aus, nach den drei festen Axen gehen, construiren mufs.

Das durch die vorstehende Gleichung bezeichnete Coordinaten-System hat die Eigenschaft, dafs, beim Uebergange von irgend einem gegebenen Puncte zu irgend einem andern, die Summe der gleichzeitigen Aenderungen der drei Coordinaten gleich Null ist. Insbesondere erhalten wir, wenn wir differentiiren:

$$dr+dq+dp = 0. \qquad (13)$$

14. Wir können die gerade Linie, welche durch irgend eine lineare und homogene Gleichung zwischen beliebig bestimmten Coordinaten r, q und p:

$$\nu r+\mu q+\lambda p = 0, \qquad (14)$$

dargestellt wird, leicht geometrisch bestimmen. Setzen wir nemlich, um die vorstehende Gleichung zu befriedigen, zugleich

$$\begin{aligned} r &= 0, \text{ und } \mu q+\lambda p = 0, \\ q &= 0, \text{ » } \nu r+\lambda p = 0, \\ p &= 0, \text{ » } \nu r+\mu q = 0; \end{aligned}$$

so erhalten wir diejenigen drei auf den drei Axen liegenden Puncte, in welchen diese von der zu construirenden geraden Linie geschnitten werden. Mit diesen drei Puncten stellen sich drei andere paarweise so zusammen, dafs auf jeder der drei Coordinaten-Axen ein solches Puncten-Paar, mit denjenigen beiden Puncten, in welchen dieselbe Axe von den beiden andern Axen geschnitten wird, vier harmonische Theilungspuncte bilden. Es sind diese drei neuen Puncte die bezüglichen Durchschnittspuncte der drei Axen

$$r = 0, \qquad q = 0, \qquad p = 0,$$

mit den durch folgende Gleichungen:

$$\mu q-\lambda p = 0, \qquad \nu r-\lambda p = 0, \qquad \nu r-\mu q = 0,$$

dargestellten drei geraden Linien. Diese drei geraden Linien schneiden sich, was ein Blick auf ihre Gleichungen sogleich zeigt, in einem und demselben Puncte. Dieser Durchschnittspunct und die durch die Gleichung (14) dargestellte gerade Linie, von der wir ausgegangen sind, bestimmen sich gegenseitig auf lineare Weise. Wir wollen jenen Durchschnittspunct den Pol dieser geraden Linie, und diese gerade Linie die Polare jenes Durchschnittspunctes, in Beziehung auf das, von den drei Axen gebildete, Dreieck, nennen. Zur Bestimmung der drei Coordinaten des Poles einer gegebenen geraden Linie (1) müssen wir mit den Gleichungen:

$$\nu r = \mu q = \lambda p,$$

die Gleichung (11), welche der jedesmaligen Coordinaten-Bestimmung zu Grunde liegt:

$$\varrho' r+\varkappa' q+\pi' p = c,$$

verbinden. Wenn, umgekehrt, die Coordinaten eines Punctes r, q und p gegeben sind, so brauchen wir blofs drei Coefficienten ν, μ und λ so zu wählen, dafs

$$\nu r = \mu q = \lambda p,$$

und erhalten alsdann für die Polare des gegebenen Punctes folgende Gleichung:

$$\nu r + \mu q + \lambda p = 0.$$

15. Der Pol einer unendlich weit entfernt liegenden geraden Linie ist der Schwerpunct des von den Axen gebildeten Dreiecks. Da die der Coordinaten-Bestimmung zu Grunde liegende Gleichung (11) eine identische ist, so stellt die Gleichung

$$\varrho' r + \varkappa' q + \pi' p = 0,$$

so wie jede andere, in der wir, statt des gegebenen Werthes von c, irgend einen andern nehmen, eine solche unendlich weit entfernt liegende gerade Linie dar. Für den Schwerpunct des Axen-Dreiecks erhalten wir also:

$$\varrho' r = \varkappa' q = \pi' p = \tfrac{1}{3} c.$$

Diese Gleichungen enthalten zugleich, indem wir vom Schwerpuncte des Axen-Dreiecks ausgehen, eine neue Construction der durch die identische Gleichung (11) bestimmten Coordinaten: eine Construction, die sich an die frühere der 12. Nummer, auch geometrisch, unmittelbar anschliefst. In der Coordinaten-Bestimmung der 13. Nummer insbesondere, die an die Gleichung:

$$r + q + p = \beta,$$

sich anknüpft, sind die drei Coordinaten des Schwerpunctes einander gleich. Es ist für denselben:

$$r = q = p = \tfrac{1}{3}\beta,$$

wonach sich die Richtungen, unter denen wir die fraglichen Coordinaten nach den drei Axen ziehen müssen, unmittelbar ergeben, wenn wir um den Schwerpunct des Axen-Dreiecks als Mittelpunct mit einem Radius, der gleich ist $\frac{1}{3}\beta$, einen Kreis schlagen.

16. Ich will zur Erläuterung der obigen Definition der Pole und Polaren noch ein paar Beispiele, die ich mit Bezugnahme auf spätere Entwickelungen auswähle, folgen lassen.

Wenn wir die drei Coordinaten r, q und p als kürzeste Abstände construiren, eine Annahme, der die Gleichung:

$$r\,sin(\varrho) + q\,sin(\varkappa) + p\,sin(\pi) = k, \qquad (9)$$

entspricht, so ist offenbar für den Mittelpunct des dem Axen-Dreiecke eingeschriebenen Kreises

$$r = q = p,$$

und demnach erhalten wir für die Polare dieses Punctes sogleich folgende Gleichung:

$$r + q + p = 0. \qquad (15)$$

Für den gemeinsamen Durchschnitt der drei von den Winkelpuncten des Axen-Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel, finden wir, bei derselben Voraussetzung, ohne Mühe:

$$r\,cos(\varrho) = q\,cos(\varkappa) = p\,cos(\pi);$$

und demnach hat die Polare desselben folgende Gleichung:

$$r\,cos(\varrho) + q\,cos(\varkappa) + p\,cos(\pi) = 0. \qquad (16)$$

Wenn wir, statt der Gleichung (9) die Gleichung:

$$r + q + p = \beta, \qquad (12)$$

der Coordinaten-Bestimmung zu Grunde legen, so erhalten wir für die Gleichungen der Polaren der beiden oben bezeichneten Puncte auf der Stelle:

$$\frac{r}{sin(\varrho)} + \frac{q}{sin(\varkappa)} + \frac{p}{sin(\pi)} = 0, \qquad (17)$$

$$r\,cotg(\varrho) + q\,cotg(\varkappa) + p\,cotg(\pi) = 0, \qquad (18)$$

indem wir in den obigen Gleichungen (15) und (16) an die Stelle von r, q und p schreiben $\frac{r}{\sin(\varrho)}$, $\frac{q}{\sin(\varkappa)}$ und $\frac{p}{\sin(\pi)}$.

17. Die allgemeinste Coordinaten-Bestimmung, die wir in der 7. Nummer erhalten haben, war:

$$\eta = \frac{q}{r}, \qquad \xi = \frac{p}{r},$$

indem wir durch r, q und p lineare Ausdrücke von der allgemeinsten Form in y und x darstellten, und y und x als Coordinaten irgend eines beliebigen linearen Systems betrachteten. Bezeichnen wir durch s rgend einen neuen linearen Ausdruck von derselben Form:

$$s = \sigma(y + a'''x + b'''), \tag{1}$$

und setzen dann:

$$r' = \frac{r}{s}, \qquad q' = \frac{q}{s}, \qquad p' = \frac{p}{s}, \tag{2}$$

so können wir, als mit der obigen Coordinaten-Bestimmung identisch, auch die folgende nehmen:

$$\eta = \frac{q'}{r'}, \qquad \xi = \frac{p'}{r'}. \tag{3}$$

Indem wir aber durch die Gleichungen (2) die neuen Functionen r', q' und p' einführen, setzen wir offenbar nur an die Stelle der ursprünglichen Coordinaten y und x die andern $\frac{y}{s}$ und $\frac{x}{s}$, die ebenfalls lineare sind und wodurch sich also nach der eben angeführten Nummer in der allgemeinen analytischen Bestimmung der Coordinaten η und ξ nichts ändert. Nur die geometrische Construction derselben stellt sich anders dar.

Die Gleichungen (2) zeigen, dafs die drei Gleichungen:

$$r' = 0, \qquad q' = 0, \qquad p' = 0, \tag{4}$$

dieselben geraden Linien darstellen, als die früher betrachteten Gleichungen:

$$r = 0, \qquad q = 0, \qquad p = 0.$$

Zu diesen drei geraden Linien kommt aber nun noch eine vierte hinzu, deren Gleichung

$$s = 0.$$

Für solche Puncte, welche auf dieser geraden Linie liegen, werden die Werthe von r', q' und p' unendlich. Die Werthe für η und ξ erscheinen unter unbestimmter Form; für ihre wahren Werthe ergeben sich indefs die frühern $\frac{q}{r}$ und $\frac{p}{r}$.

Die allgemeine Coordinaten-Bestimmung wird auf diese Weise auch noch von einer vierten geraden Linie abhängig. Diese tritt an die Stelle der, aufser den ersten drei geraden Linien, zu jener Construction noch erforderlichen, beiden Constanten, so dafs diese Construction nun blofs von vier gegebenen geraden Linien abhängt, in der Art nemlich, dafs, wie wir auch von vorne herein in den vier linearen Ausdrücken, für welche wir die Symbole s, r, q und p eingeführt haben, die vier Coefficienten σ, ϱ, $\varkappa$ und π annehmen mögen, die durch die Gleichungen:

$$s = 0, \qquad r = 0, \qquad q = 0, \qquad p = 0, \tag{5}$$

dargestellten vier geraden Linien zur allgemeinen Coordinaten-Bestimmung hinreichend sind. Der veränderten Annahme von $\frac{\varkappa}{\varrho}$ und $\frac{\pi}{\varrho}$, von der die bisherige Bestimmung abhängig war, entspricht nun eine andere Lage der geraden Linie: $s = 0$.

18. Wir können die Function s wiederum, auf elegantere Weise, vermittelst einer identischen Gleichung durch die drei ersten Functionen einführen, und demgemäfs

$$\sigma' s + \varrho' r + \varkappa' q + \pi' p = 0 \qquad (6)$$

setzen, indem wir durch σ', ϱ', $\varkappa'$ und π' vier gegebene Constanten, von denen wir eine beliebig annehmen können, bezeichnen. Entwickeln wir diese identische Gleichung, indem wir für s, r, q und p die ihnen entsprechenden linearen Functionen substituiren, so finden wir:

$$\begin{aligned} \sigma'\sigma + \varrho'\varrho + \varkappa'\varkappa + \pi'\pi &= 0, \\ a'''\sigma'\sigma + a''\varrho'\varrho + a'\varkappa'\varkappa + a\pi'\pi &= 0, \\ b'''\sigma'\sigma + b''\varrho'\varrho + b'\varkappa'\varkappa + b\pi'\pi &= 0. \end{aligned}$$

Eliminiren wir zwischen diesen drei Gleichungen $\sigma'\sigma$, so erhalten wir die folgenden beiden

$$\begin{aligned} (a''' - a'')\varrho'\varrho + (a''' - a')\varkappa'\varkappa + (a''' - a)\pi'\pi &= 0, \\ (b''' - b'')\varrho'\varrho + (b''' - b')\varkappa'\varkappa + (b''' - b)\pi'\pi &= 0, \end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, dafs a''', b''' und die beiden Coefficienten $\frac{\varkappa}{\varrho}$ und $\frac{\pi}{\varrho}$ sich gegenseitig auf lineare Weise durch einander bestimmen, wonach also die willkührliche Annahme dieser beiden Coefficienten vollständig durch die willkührliche Annahme von a''' und b''', oder, was dasselbe heifst, der geraden Linie: $s = 0$, ersetzt wird.

Für jetzt darf ich diese Erörterungen über die allgemeine lineare Coordinaten-Bestimmung nicht weiter ausführen, um nichts einzumischen, was nicht die unmittelbare Grundlage der spätern Entwickelungen dieser Schrift bildet. Nur die eine Bemerkung füge ich noch hinzu, dafs die allgemeinen linearen Coordinaten auch noch auf andere Weise construirt, und insbesondere auch, so einfach wie die gewöhnlichen Parallel-Coordinaten y und x, als Linien-Segmente dargestellt werden können *). Bei jeder solchen Construction müssen sich, wenn sie allgemein sein soll, die acht Constanten der analytischen Bestimmung in denjenigen festen, gegebenen geometrischen Oertern, durch welche jene Construction vermittelt wird, wiederfinden. So hängt die letzte Coordinaten-Bestimmung von vier gegebenen geraden Linien, die frühern von drei gegebenen geraden Linien und zwei Coefficienten, also in beiden Fällen von acht Constanten ab, weil die Construction einer geraden Linie von zwei Constanten bedingt wird.

19. Wir construiren einen Punct, den wir durch seine Coordinaten bestimmen wollen, immer als den Durchschnitt zweier geraden Linien. Gehen wir von den allgemeinsten linearen Coordinaten η und ξ aus, indem wir

$$\eta = \frac{q}{r}, \qquad \xi = \frac{p}{r},$$

*) Die unmittelbare Construction der allgemeinen Ausdrücke von η und ξ liefert zum Beispiel die folgende Bestimmung. Wenn zwei feste Puncte O und O' und aufserdem noch zwei feste Puncte A und A', durch welche zwei gerade Linien AB und A'B' gehen, die unter sich und mit der die Puncte O und O' verbindenden geraden Linie parallel laufen, gegeben sind: so erhält man die Coordinaten irgend eines Punctes M, wenn man denselben mit den Puncten O und O' durch zwei gerade Linien MO und MO', welche den geraden Linien AB und A'B' bezüglich in irgend zwei Puncten L und L' begegnen mögen, verbindet. Jene Coordinaten-Werthe für den Punct M sind alsdann AL und A'L'. Die nothwendigen acht Constanten finden sich in der Annahme der vier gegebenen Puncte O und O', A und A' wieder. Wir können insbesondere auch die beiden geraden Linien AB und A'B', und dann auf denselben auch die beiden Puncte A und A', zusammenfallen lassen; dann aber hängt die Coordinaten-Bestimmung nur noch von sechs Constanten ab.

setzen, so stellen, wenn wir η und ξ irgend zwei bestimmte Werthe beilegen, die beiden Gleichungen:

$$q = \eta r, \qquad p = \xi r, \tag{1}$$

zwei solche gerade Linien dar, von welchen die erste durch den Durchschnitt der beiden Axen: $r = 0$ und $q = 0$, und die zweite durch den Durchschnitt der beiden Axen: $r = 0$ und $p = 0$ geht. Der Durchschnitt dieser beiden geraden Linien ist derjenige Punct, der den für η und ξ angenommenen Coordinaten-Werthen entspricht. Diese Werthe bestimmen die Richtungen der beiden geraden Linien. Wir sehen hieraus, wie der zu bestimmende Punct hier durch solche zwei gerade Linien, welche durch zwei gegebene feste Puncte gehen, construirt wird, während, bei der Anwendung gewöhnlicher Parallel-Coordinaten y und x, die entsprechenden beiden geraden Linien eine gegebene Richtung haben, nemlich den Axen bezüglich parallel sind. Zugleich ist ersichtlich, dafs die Coordinaten-Bestimmung illusorisch wird, wenn die beiden festen Puncte zusammenfallen und demnach die drei Coordinaten-Axen durch einen und denselben Punct gehen. Mit Ausschlufs dieses Falles, der den Parallelismus der drei Axen und des Zusammenfallens zweier derselben in sich einschliefst, bleibt aber die geometrische Bestimmung eines Punctes durch die beiden Gleichungen (1) immer möglich, wie wir auch die drei Axen annehmen mögen. Wir wollen diese Bemerkungen in der folgenden Nummer durch einige analytische Entwicklungen unterstützen.

20. Aus den beiden Gleichungen:

$$\eta = \frac{\varkappa(y + a'x + b')}{\varrho(y + a''x + b'')}, \qquad \xi = \frac{\pi(y + ax + b)}{\varrho(y + a''x + b'')}, \tag{2}$$

erhalten wir, um die ursprünglichen Coordinaten y und x durch die neuen η und ξ auszudrücken:

$$x = -\frac{\pi\varkappa(b - b') + \varkappa\varrho(b' - b'')\xi + \varrho\pi(b'' - b)\eta}{\pi\varkappa(a - a') + \varkappa\varrho(a' - a'')\xi + \varrho\pi(a'' - a)\eta},$$

$$y = -\frac{\pi\varkappa(ab' - a'b) + \varkappa\varrho(a'b'' - a''b')\xi + \varrho\pi(a''b - ab'')\eta}{\pi\varkappa(a - a') + \varkappa\varrho(a' - a'')\xi + \varrho\pi(a'' - a)\eta}.$$

Wenn wir die Coordinaten der Durchschnittspuncte der ersten und zweiten, der ersten und dritten und der zweiten und dritten der drei Axen:

$$y + a''x + b'' = 0, \qquad y + a'x + b' = 0, \qquad y + ax + b = 0,$$

durch (y^0, x^0), (y', x') und (y'', x'') bezeichnen, indem wir

$$-\frac{b' - b''}{a' - a''} = x^0 \qquad -\frac{b'' - b}{a'' - a} = x' \qquad -\frac{b - b'}{a - a'} = x''$$

$$-\frac{a'b'' - a''b'}{a' - a''} = y^0 \qquad -\frac{a''b - ab''}{a'' - a} = y' \qquad -\frac{ab' - a'b}{a - a'} = y''$$

setzen, so können wir die Werthe von x und y auch unter folgender Form schreiben:

$$x = \frac{\pi\varkappa(a - a')x'' + \varkappa\varrho(a' - a'')x^0\xi + \varrho\pi(a'' - a)x'\eta}{\pi\varkappa(a - a') + \varkappa\varrho(a' - a'')\xi + \varrho\pi(a'' - a)\eta},$$

$$y = \frac{\pi\varkappa(a - a')y'' + \varkappa\varrho(a' - a'')y^0\xi + \varrho\pi(a'' - a)y'\eta}{\pi\varkappa(a - a') + \varkappa\varrho(a' - a'')\xi + \varrho\pi(a'' - a)\eta}.$$

Wenn $x'' = x' = x^0$, so gehen die drei Coordinaten-Axen durch einen und denselben Punct, und dann ist zugleich auch $y'' = y' = y^0$. In diesem Falle aber wird in den vorstehenden Ausdrücken für y und x der gemeinschaftliche Nenner ein Factor der beiden Zähler, und wir erhalten, wie wir die Werthe von η und ξ von vorne hinein auch bestimmen mögen, im Allgemeinen:

$$x = x'' = x' = x^0,$$
$$y = y'' = y' = y^0.$$

Wenn wir aber die Werthe von η und ξ insbesondere so annehmen, dafs die Geichung

$$\pi\varkappa(a - a')+\varkappa\varrho(a' - a'')\xi+\varrho\pi(a'' - a)\eta = 0., \qquad (3)$$

befriedigt wird, so stellen sich die Ausdrücke für y und x beide unter der Form $\frac{0}{0}$ dar. Wenn die drei Axen durch denselben Punct gehen, und demnach:

$$(a - a')b''+(a' - a'')b+(a'' - a)b' = 0,$$

so zeigen die Gleichungen (2), dafs, wenn wir von irgend einem gegebenen Puncte ausgehen und für denselben die Coordinaten η und ξ construiren, die Werthe dieser Coordinaten immer die Gleichung (3) befriedigen. Da also in diesem Falle zwischen den Coordinaten eines und desselben Punctes eine lineare Bedingungs-Gleichung besteht, so bestimmt sich, wenn eine derselben gegeben ist, sogleich die andere, und beide beziehen sich daher gleichmäfsig auf alle Puncte derjenigen, durch den gemeinsamen Durchschnitt der dre Axen gehenden, geraden Linie, welche durch eine dieser Coordinaten hinlänglich schon bestimmt wird. Da wir ferner aus jeder Gleichung zwischen η und ξ alsdann durch die Bedingungs-Gleichnng (3) eine dieser beiden Coordinaten fortschaffen können, so kann eine solche Gleichung keine Curve darstellen. Wenn wir für η und ξ solche Werthe wählen, die die Gleichung (3) nicht befriedigen; so liegt der bezügliche Punct immer in jenem Durchschnitte der Axen; was sich leicht erklärt, weil für diesen Punct η und ξ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, und demnach jeden beliebigen Werth haben können.

Wenn wir statt der unbestimmten Coefficienten, wie in der 11. Nummer, einer identischen Gleichung uns bedienen, so nimmt diese nothwendig die folgende Form an:

$$\varrho'r+\varkappa'q+\pi'\xi = 0.$$

Die Constante ihres zweiten Theils hat sich auf Null reducirt. Alsdann ergibt sich sogleich, wenn wir diese Gleichung mit den beiden Gleichungen (1) zusammenstellen:

$$\varrho'+\varkappa'\eta+\pi'\xi = 0,$$

als die fragliche Bedingungs-Gleichung zwischen η und ξ.

Der Annahme, dafs nur zwei der drei Coordinaten-Axen parallel sind, steht durchaus nichts entgegen; je nachdem wir für die beiden parallelen Axen: $p = 0$ und $q = 0$, oder eine derselben und: $r = 0$ nehmen, erhalten wir eine zwiefache geometrische Construction der beiden Coordinaten η und ξ.

21. Ein besonderer Fall der allgemeinen Coordinaten-Bestimmung ist derjenige, dafs eine der drei linearen Functionen r, q und p auf eine Constante sich reducirt. Wenn die Coordinaten y und x, von denen wir ausgehen, gewöhnliche Parallel-Coordinaten bedeuten, so liegt die eine der drei Coordinaten-Axen unendlich weit. Wenn wir nemlich in der Gleichung:

$$Ay+Bx+C \equiv \mu(y+ax+b) = 0,$$

den beiden Constanten A und B immer kleinere Werthe beilegen, während C einer bestimmten endlichen Grenze sich annähert, rückt die, durch diese Gleichung dargestellte, gerade Linie immer weiter. Der Grenze entspricht $A = \mu = 0$, $B = 0$, $b = \infty$ und $\mu b = C$; der Werth von a wird unbestimmt.

Wenn es die Function r ist, die auf eine Constante sich reducirt, und demnach die Axe $r = 0$ unendlich weit liegt, so geht die allgemeine Coordinaten-Bestimmung in die folgende über:

$$\eta = \varkappa(y+a'x+b') \equiv q, \qquad \xi = \pi(y+ax+b) \equiv p, \qquad (1)$$

Ist es eine der beiden Functionen q und p, etwa die zweite derselben, die auf eine Constante sich reducirt, so kommt:

$$\eta = \frac{\varkappa(y + a'x + b')}{\varrho(y + a''x + b'')} = \frac{q}{r}, \qquad \xi = \frac{1}{\varrho(y + a''x + b'')} = \frac{1}{r}. \tag{2}$$

So verschieden die geometrische Construction der Coordinaten in den beiden vorstehenden Bestimmungen sich auch darstellen mag, wir können hier für unsere Zwecke beide unter demselben Gesichtspuncte zusammenfassen. Wenn nemlich irgend eine algebraische und rationale Gleichung zwischen den beiden Coordinaten der zweiten Bestimmung gegeben ist, so erhalten wir, wenn wir in diese Gleichung für η und ξ einführen: $\frac{q}{r}$ und $\frac{1}{r}$ und dann die Nenner fortschaffen, eine Gleichung zwischen zwei Coordinaten der ersten Bestimmung. Und umgekehrt können wir von einer Gleichung zwischen den letztgenannten Coordinaten zu einer Gleichung zwischen Coordinaten der zweiten Bestimmung unmittelbar übergehen. Wir werden daher nur den, durch die beiden Gleichungen (1) eingeführten, neuen Coordinaten q und p eine besondere Aufmerksamkeit schenken.

22. Diese neuen Coordinaten haben hiernach zu ihrem analytischen Ausdruck die allgemeinsten ganzen und linearen Functionen von y und x, und können, nach dem Frühern, durch die Vermittelung zweier gegebenen geraden Linien und zweier gegebenen Coefficienten, an deren Stelle im Allgemeinen auch zwei gegebene Winkel treten können, geometrisch dargestellt werden. Für die fraglichen Coordinaten eines gegebenen Punctes können wir namentlich diejenigen beiden Segmente nehmen, welche, auf einer nach constanter Richtung durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linie, zwischen diesem Puncte und den beiden festen Axen:

$$q = 0, \qquad p = 0, \tag{3}$$

liegen, nachdem wir diese beiden Segmente zuvor mit constanten Coefficienten $\varkappa$ und π multiplicirt haben. Insbesondere können wir von diesen Coefficienten auch ganz abstrahiren, indem wir dieselben gleich Eins nehmen. Für die fraglichen Coordinaten können wir, im Allgemeinen, auch diejenigen beiden geraden Linien nehmen, die, von dem gegebenen Puncte aus, sich unter zwei gegebenen Winkeln an die beiden festen Axen (3) legen lassen; in einer besondern Voraussetzung also auch die beiden, vom gegebenen Puncte aus, auf die beiden Axen gefällten Perpendikel. Insbesondere gehören hierher endlich auch die gebräuchlichen Systeme der Parallel-Coordinaten.

23. Nennen wir, um hierüber in einige analytische Entwickelungen einzugehen, diejenigen Winkel, welche die beiden neuen Axen: $q = 0$ und $p = 0$ mit der einen, ursprünglich angenommenen, Axe: $x = 0$ bilden, β und α, und diejenigen Winkel, welche dieselben Axen mit der andern ursprünglichen: $y = 0$ bilden, β_1 und α_1, so haben wir zunächst:

$$a' = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta}, \qquad a = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}.$$

Bestimmen wir ferner, wie in der 7. Nummer, zwei neue Winkel β' und α' durch die folgenden beiden Gleichungen:

$$\varkappa = +\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}, \qquad \pi = -\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'},$$

in denen wir die Vorzeichen so gewählt haben, dafs für solche Puncte, die innerhalb desjenigen Winkels ϑ liegen, welcher die als positiv betrachtete Richtung der Axe $p = 0$ mit der positiven Richtung der Axe $q = 0$ bildet, die neuen Coordinaten q und p positiv wer-

werden, so sind β' und α', die wir hier von ihren Supplementar-Winkeln nicht unterscheiden können, diejenigen, an die Stelle der beiden Constanten $\varkappa$ und π getretenen Winkel, unter denen wir, von einem gegebenen Puncte aus, zwei gerade Linien nach den beiden festen Axen (3) legen müssen, wenn diese geraden Linien die Coordinaten des gegebenen Punctes darstellen sollen, und überdiefs sind auf die angezeigte Weise die Vorzeichen bestimmt, mit welchen, für verschiedene Lagen eines Punctes, dessen Coordinaten einzuführen sind. Wir bemerken zugleich, dafs die Einführung der Winkel β' und α' so lange auf reelle Weise möglich ist, als die gegebenen Constanten $\varkappa$ und π, abgesehen vom Zeichen, bezüglich gröfser sind als $\sin\beta$ und $\sin\alpha$. Die Winkel β' und α' können wir von vorne hinein beliebig annehmen. Für den Fall, dafs η und ξ neue Parallel-Coordinaten bedeuten, ist $\beta' = \alpha' = \vartheta$ zu nehmen, so dafs also

$$\varkappa = \frac{\sin\beta}{\sin\vartheta}, \qquad \pi = -\frac{\sin\alpha}{\sin\vartheta}.$$

Substituiren wir diese Werthe von $\varkappa$ und π, so wie die oben aufgestellten für a' und a in die beiden Gleichungen (1) der 21. Nummer, und bezeichnen zugleich durch c' und c zwei gehörig zu bestimmende Constanten, so finden wir

$$q = \frac{y\sin\beta + x\sin\beta_1}{\sin\vartheta} + c', \qquad p = -\frac{y\sin\alpha + x\sin\alpha_1}{\sin\vartheta} + c.$$

Bezeichnen wir endlich noch diejenigen Werthe von y und x, welche demjenigen Puncte entsprechen, für welchen q und p verschwinden, durch y' und x', so kommt insbesondere:

$$0 = \frac{y'\sin\beta + x'\sin\beta_1}{\sin\vartheta} + c', \qquad 0 = -\frac{y'\sin\alpha + x'\sin\alpha_1}{\sin\vartheta} + c,$$

und wenn wir diese Gleichungen von den vorstehenden abziehn:

$$q = \frac{(y-y')\sin\beta + (x-x')\sin\beta_1}{\sin\vartheta}, \qquad p = -\frac{(y-y')\sin\alpha + (x-x')\sin\alpha_1}{\sin\vartheta}.$$

Diese Gleichungen sind, da η und ξ alle möglichen Parallel-Coordinaten sein können, in dem bisher gebräuchlichen Sinne des Wortes, die allgemeinsten Coordinaten-Verwandlungs-Formeln unter der bekannten Form. Obgleich von einer Seite zwar der Begriff der Coordinaten-Verwandlung eine der Grundlagen der analytischen Behandlung der Geometrie bildet und immer bilden wird, so beschränkt doch von der andern Seite die Aufstellung des allgemeinen Begriffs der Coordinaten ungemein den Gebrauch und die Bedeutsamkeit jener speciellen Formeln. Wir werden in allen folgenden Untersuchungen durchaus keine Veranlassung finden, uns derselben zu bedienen.

24. Man pflegt gewöhnlich die Parallel-Coordinaten als Segmente, welche auf zwei festen geraden Linien von deren Durchschnitt an gerechnet werden, zu construiren, und zwar den Werth von p auf der geraden Linie $q = 0$, und den Werth von q auf der geraden Linie $p = 0$. Aehnlich können wir auch die allgemeinen Ausdrücke von p und q darstellen. Bedeutet nemlich überhaupt p diejenige gerade Linie, welche von dem bezüglichen Puncte M aus, nach der geraden Linie $p = 0$, nach gegebener Richtung gezogen wird, so können wir, nach derselben Richtung, durch den Durchschnitt O der beiden Axen $p = 0$ und $q = 0$, eine gerade Linie OP' ziehen, und dann ferner durch den Punct M eine gerade Linie MP', die mit der Axe: $p = 0$, parallel ist, und die eben gezogene gerade Linie in irgend einem Puncte P' schneidet. Alsdann ist offenbar:

$$p = OP'.$$

Für andere Lagen des Punctes M rückt im Allgemeinen der Punct P' auf der festen geraden Linie OP' fort. Auf gleiche Weise kann man die andern Coordinaten q auf einer

zweiten festen, durch O gehenden geraden Linie OQ' construiren, die diejenige Richtung hat, nach der wir, dem Frühern gemäfs, um dieselbe Coordinate darzustellen, eine gerade Linie vom bezüglichen Puncte M nach der Axe: $q = 0$, gezogen haben. Wenn insbesondere OP' und OQ' bezüglich mit den geraden Linien: $q = 0$ und $p = 0$, zusammenfallen, so erhalten wir das gewöhnliche System der Parallel-Coordinaten. Wir können insbesondere aber auch die beiden festen geraden Linien OP' und OQ' in eine einzige zusammenfallen lassen; dieser Annahme entspricht, dafs die beiden Coefficienten π und $\varkappa$ beide der Einheit gleich sind.

25. Zwischen irgend zwei Coordinaten-Systemen, die besondern Coordinaten-Bestimmungen entsprechen, findet eine durchaus gegenseitige Beziehung Statt. So wie q und p durch die allgemeinsten linearen und ganzen Functionen in y und x sich ausdrücken lassen, so können wir auch y und x durch eben solche Functionen in q und p darstellen. An der Stelle von y und x können wir irgend zwei andere hierhergehörige Coordinaten nehmen, ohne dafs die Form der Gleichungen (1) irgend eine Aenderung erleidet. Diese Gleichungen bestimmen jedes System der fraglichen Art, wenn irgend eines derselben gegeben ist. Alle diese Systeme bilden also eine, in sich abgeschlossene, **besondere Classe von Coordinaten-Systemen.**

26. Ein Punct ist durch seine beiden Coordinaten, das heifst durch die Werthe zweier gegebenen linearen und ganzen Functionen q und p vollkommen bestimmt. Jede neue solche gegebene Function r läfst sich durch die beiden ersten auf lineare Weise ausdrücken. Wir können, indem wir durch ϱ', $\varkappa'$, π' und c vier gegebene Constante bezeichnen, von welchen eine auch willkührlich angenommen werden kann,

$$\varrho' r + \varkappa' q + \pi' p = c \qquad (1)$$

setzen. r ist hierbei als eine Function von q und p zu betrachten, und so aufgefafst ist die vorstehende Gleichung eine identische. Auf ähnliche Weise können wir beliebig viele neue lineare Functionen einführen, die alle für einen gegebenen Punct bestimmte Werthe erhalten, welche als Coordinaten dieses Punctes, aber als solche, die in einer gegenseitigen Abhängigkeit von einander stehen, betrachtet werden können. Eine Gleichung zwischen beliebig vielen solcher Coordinaten stellt ebenfalls eine ganz bestimmte Curve dar, und kann auf eine Gleichung zwischen zwei beliebigen derselben zurückgeführt werden. Um die allgemeinsten Resultate zu erhalten, ist es nicht einmal nöthig, auf die Abhängigkeit der Coordinaten von einander Rücksicht zu nehmen. Ich unterdrücke indefs alle vorgreifenden allgemeinen Betrachtungen; es wird der Vortheil welcher, für die analytische Darstellung, mit dem Gebrauche von mehr als zwei ganzen und linearen Functionen, deren Constanten eben so viele gerade Linien entsprechen, verbunden ist, in den spätern Entwicklungen sich auf das Deutlichste herausstellen.

In der 11. und den folgenden Nummern haben wir schon die vorstehende Gleichung (1), wiewohl unter einem ganz verschiedenen Gesichtspuncte, betrachtet. Die besondern Fälle, die wir dort discutirt haben, können wir auch unmittelbar in unsere neuen Betrachtungen hinüberziehn, namentlich diejenigen beiden, welchen folgende Gleichungen entsprechen:

$$r + q + p \equiv \beta, \qquad (2)$$

$$r \sin(\varrho) + q \sin(\varkappa) + p \sin(\pi) \equiv k. \qquad (3)$$

Wenn wir die allgemeinere Coordinaten-Bestimmung der 7. Nummer durch die Vermittelung dreier gegebenen linearen und ganzen Functionen r, q und p zu Grunde legen, so können wir eine vierte solche Function s als eine homogene ganze und lineare

Function von r, q und p betrachten und durch eine identische Gleichung von folgender Form einführen:

$$\sigma' s + \varrho' r + \varkappa' q + \pi' p \equiv 0 .$$

Da jeder linearen Function eine gerade Linie entspricht, so wird nach der letzten identischen Gleichung durch drei gegebene gerade Linien und (zwei) unbestimmte Coefficienten eine beliebige vierte gerade Linie bestimmt. Hierin liegt die Begründung desjenigen Verfahrens, nach welchem der Beweis aller derjenigen Sätze über gerade Linien, die nicht von Gröfsen-Bestimmungen abhängen, durch drei Symbole (lineare Functionen) und unbestimmte Coefficienten geführt wird. Dieses Verfahren habe ich zuerst in Crelle's Journal angewandt *); ich mufs mir versagen, hier auf dasselbe zurückzukommen, um ihm seine vollständige Ausbildung zu geben und um neue Beispiele hinzuzufügen. —

27. Der allgemeine in den frühern Nummern aufgestellte Begriff linearer Coordinaten würde unvollständig sein, und dadurch die analytische Darstellungsweise unzusammenhängend werden, wenn wir nicht auch imaginäre Coordinaten betrachteten, das heifst diejenigen Werthe, welche, auf gegebene Puncte bezogen, gegebene imaginäre und lineare Functionen erhalten. Solche Coordinaten ordnen sich, wie die entsprechenden Functionen, paarweise zusammen. Jeder Coordinate, einzeln genommen, entspricht eine imaginäre gerade Linie, zweien zusammengehörigen Coordinaten entsprechen zwei imaginäre gerade Linien, die sich in einem reellen Puncte schneiden. Solche zwei Coordinaten können wir aber auch durch die Vermittelung zweier reellen geraden Linien, die sich in eben jenem Puncte schneiden, geometrisch bestimmen. Diese Bestimmung knüpft sich an eine allgemeine Coordinaten-Verwandlung, der wir in den folgenden Nummern eine besondere Aufmerksamkeit schenken werden.

28. Wenn q und p solche lineare Functionen bedeuten, welche Wurzeln einer und derselben quadratischen Gleichung sind, so können wir, statt ihrer, zwei neue Functionen durch die folgenden Gleichungen einführen:

$$\begin{aligned} q &= t + w\sqrt{-1}, \\ p &= t - w\sqrt{-1}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Je nachdem q und p reell oder imaginär sind, ist die Function w, umgekehrt, imaginär, und zwar von der Form $w\sqrt{-1}$, oder reell. Die Function t bleibt immer reell.

Wenn wir aber eine der beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit $(m + n\sqrt{-1})$ und die andere derselben mit $(m - n\sqrt{-1})$ [m und n bedeuten zwei Constante, deren jede auch der Einheit gleich genommen werden kann] multipliciren, oder auch, was blofs einer andern Annahme von m und n entspricht, dividiren, so sind die Ausdrücke, welche alsdann sich ergeben, wiederum Wurzeln einer quadratischen Gleichung. Durch diese Bemerkung geleitet, wollen wir, auf allgemeinere Weise als oben, zwei neue Functionen u und v durch die folgenden beiden Gleichungen einführen:

$$\begin{aligned} q &= (1 - \alpha\sqrt{-1})\,(u + v\sqrt{-1}), \\ p &= (1 + \alpha\sqrt{-1})\,(u - v\sqrt{-1}). \end{aligned} \qquad (2)$$

α bedeutet hier eine constante Gröfse, welche wir willkührlich annehmen können. Diese Gleichungen können wir auch auf die nachstehende Form bringen:

$$\begin{aligned} q &= (u + \alpha v) + (v - \alpha u)\sqrt{-1}, \\ p &= (u + \alpha v) - (v - \alpha u)\sqrt{-1}; \end{aligned} \qquad (3)$$

*) *„Ueber den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten."* Crelle Journ. V, 268. Ferner X, 216 und XI, 26.

und alsdann ergibt sich aus der Zusammenstellung mit den Gleichungen (1) unmittelbar:

$$t = u + \alpha v, \qquad w = v - \alpha u; \tag{4}$$

und hieraus:

$$u = \frac{t - \alpha w}{1 + \alpha^2} \qquad v = \frac{w + \alpha t}{1 + \alpha^2}. \tag{5}$$

Zuvörderst zeigen die vorstehenden Gleichungen, dafs die Functionen t und w in der Bestimmung der Functionen u und v einschliefslich enthalten sind; sie entsprechen der besondern Annahme, dafs α gleich Null genommen wird. Jeder andern Annahme von α entsprechen zwei andere Functionen u und v. Diese allgemeinere Functionen-Bestimmung schliefst auch den Fall, dafs q und p reell sind, keineswegs aus. Alsdann werden die Function v und die Constante α beide imaginär und von der Form $v\sqrt{-1}$ und $\alpha\sqrt{-1}$.

Um umgekehrt die beiden neuen Functionen u und v durch die ursprünglichen q und p auszudrücken, erhalten wir die nachstehenden beiden Gleichungen:

$$2u = \frac{(1 + \alpha\sqrt{-1})q + (1 - \alpha\sqrt{-1})p}{1 + \alpha^2}, \tag{6}$$

$$2v\sqrt{-1} = \frac{(1 + \alpha\sqrt{-1})q - (1 - \alpha\sqrt{-1})p}{1 + \alpha^2};$$

und insbesondere, wenn wir $\alpha = 0$ nehmen:

$$2t = q + p, \qquad 2w\sqrt{-1} = q - p.$$

29. Weil q und p die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, erhält man zunächst reelle Ausdrücke für die Summe und das Product dieser Functionen; man findet:

$$p + q = 2(u + \alpha v), \tag{7}$$

$$pq = (1 + \alpha^2)(u^2 + v^2); \tag{8}$$

und hieraus reelle Ausdrücke für alle symmetrische Functionen von q und p, wie zum Beispiel

$$p^2 + q^2 = 2(1 - \alpha^2)(u^2 - v^2) + 8\alpha uv. \tag{9}$$

Wir können hiernach jede Gleichung, in der die beiden linearen Functionen q und p symmetrisch vorkommen, in eine Gleichung zwischen den Functionen u und v umformen, und zwar auf unzählige Weise, indem wir für α alle möglichen Werthe annehmen. Wenn q und p imaginär sind, treten an ihre Stelle die, in diesem Falle reellen, Functionen u und v.

Wenn wir insbesondere α gleich Null nehmen, so kommt:

$$\begin{aligned} p + q &= 2t, \\ pq &= t^2 + w^2, \\ p^2 + q^2 &= 2(t^2 - w^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Ein anderer ausgezeichneter Fall ist derjenige, dafs $\alpha = 1$. Alsdann sind auch die entsprechenden Functionen u und v die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung, und man erhält:

$$\begin{aligned} p + q &= 2(u + v), \\ pq &= 2(u^2 + v^2), \\ p^2 + q^2 &= 8uv. \end{aligned} \tag{11}$$

Wenn q und p reell sind, so verwandeln sich die beiden Gleichungen (7) und (8) in die nachstehenden:

$$p + q = 2(u - \alpha' v'), \tag{12}$$

$$pq = (1 - \alpha'^2)(u^2 - v'^2).$$

30. Zwischen den verschiedenen Linien-Paaren, welche, bei beliebiger Annahme von α, durch die beiden Gleichungen:

$$u = 0, \qquad v = 0, \tag{13}$$

dargestellt werden, finden merkwürdige Beziehungen Statt. Zuvörderst sehen wir aus den Gleichungen (2), nach denen p und q verschwinden, wenn wir zugleich $u = 0$ und $v = 0$ setzen, dafs der gemeinsame Durchschnitt aller dieser Linien-Paare zugleich auch der Durchschnitt der durch die beiden Gleichungen

$$p = 0, \qquad q = 0, \tag{14}$$

dargestellten geraden Linien ist; ein Durchschnitt, der, auch wenn diese Linien selbst imaginär sind, dennoch immer ein reeller Punct bleibt. Wenn wir insbesondere $\alpha = 0$ setzen, so gehen die Gleichungen (13) in die folgenden über:

$$t = 0, \qquad w = 0. \tag{15}$$

Nach den Gleichungen (5) können wir die beiden geraden Linien (13), welche irgend einer besondern Annahme von α entsprechen, auch durch die folgenden Gleichungen darstellen:

$$t - \alpha w = 0, \qquad w + \alpha t = 0; \tag{16}$$

und eben so die beiden geraden Linien (14), nach (4), durch die folgenden Gleichungen:

$$u + \alpha v = 0, \qquad v - \alpha u = 0. \tag{17}$$

Wenn wir ferner an die Stelle von t und w diejenigen beiden vollkommen bestimmten Functionen u^0 und v^0 setzen, welche irgend einem besondern Werthe α_0 der Constanten α entsprechen, und dann, indem wir die unbestimmte Constante zur Unterscheidung von α durch α^0 bezeichnen, die Gleichungen

$$u^0 - \alpha^0 v^0 = 0, \qquad v^0 + \alpha^0 u^0 = 0,$$

bilden und dann entwickeln, so erhalten wir:

$$(t - \alpha_0 w) - \alpha^0(w + \alpha_0 t) = (1 - \alpha_0\alpha^0)t - (\alpha^0 + \alpha_0)w = 0,$$
$$(w + \alpha_0 t) + \alpha^0(t - \alpha_0 w) = (1 - \alpha_0\alpha^0)w - (\alpha^0 + \alpha_0)t = 0.$$

Diese neuen Gleichungen werden mit den Gleichungen (16) identisch, wenn die folgende Bedingungs-Gleichung besteht:

$$\frac{\alpha^0 + \alpha_0}{1 - \alpha_0\alpha^0} = \alpha. \tag{18}$$

Wir sehen hieraus, dafs die Linien-Paare (13) sich ganz auf dieselbe Weise durch die Vermittelung irgend zweier Functionen u^0 und v^0, welche einem besondern Werthe von α entsprechen, bestimmen lassen. Wenn nemlich verschiedene solche Functionen nach einander an die Stelle von t und w in die Gleichungen (16) eintreten, um ein und dasselbe Linien-Paar (13) darzustellen, so erhält blofs die Constante einen andern Werth. Um alle möglichen Linien-Paare (13) auszudrücken, müssen wir α als einen unbestimmten Coefficienten betrachten, und dann ist es also ganz gleichgültig, von welchen zwei besondern Functionen wir ausgehen, ob von t und w oder von irgend zwei andern.

In dem Falle, dafs q und p reell sind, erhalten die beiden Functionen v und w die Form $v\sqrt{-1}$ und $w\sqrt{-1}$. Das Imaginäre fällt aber in diesem Falle aus der zweiten Gleichung bei (13) und der zweiten Gleichung bei (15) von selbst aus; statt derselben können wir folgende Gleichungen nehmen:

$$v' = 0, \qquad w' = 0.$$

Die geraden Linien (13) bleiben also beide reell, eben so insbesondere auch die beiden geraden Linien (15). Auch die Gleichungen (16) und (17) müssen sich hiernach auf

reelle Form bringen lassen, und wirklich verwandeln sich dieselben unmittelbar in die nachstehenden:

$$t+\alpha' w' = 0, \qquad w'+\alpha' t = 0; \tag{18}$$

$$u-\alpha' v = 0, \qquad v'-\alpha' u = 0. \tag{19}$$

Aber zugleich sehen wir aus diesen Gleichungen, dafs nun nicht mehr die durch die Gleichungen (13) dargestellten Linien-Paare in derjenigen gegenseitigen Beziehung unter einander und zu den beiden geraden Linien (14) stehen, als in dem früher betrachteten Falle, wo die beiden Functionen q und p imaginär sind.

31. Wir können durch Hülfe der Gleichungen (6) die Linien-Paare (13) auch unmittelbar durch q und p ausdrücken, und erhalten, indem wir, der Kürze halber

$$\frac{1-\alpha\sqrt{-1}}{1+\alpha\sqrt{-1}} = \frac{1+\alpha'}{1-\alpha'} = \lambda \tag{20}$$

setzen, statt der Gleichung (13) die folgenden beiden:

$$p+\lambda q = 0, \qquad p-\lambda q = 0. \tag{21}$$

Zwei gerade Linien aber, welche durch Gleichungen von der vorstehenden Form (was für lineare Functionen q und p auch bedeuten mögen, ist hierbei gleichgültig; wenn diese Functionen sich ändern, brauchen wir blofs, damit die vorstehenden Gleichungen dieselben bleiben, zu gleicher Zeit den Werth des Coefficienten λ gehörig zu ändern, und so können wir zum Beispiel auch, sobald die Functionen q und p bestimmt sind, die vorstehenden Gleichungen auf zwei andere von derselben Form zurückführen, in welcher q und p gewöhnliche Parallel-Coordinaten bedeuten) dargestellt werden, bilden mit den beiden geraden Linien:

$$p = 0, \qquad q = 0, \tag{14}$$

ein System von vier geraden Linien, die man Harmonicalen genannt hat. Es ist dieſs die analytische Definition eines solchen Systems. Die beiden geraden Linien (21) sind unsern Voraussetzungen gemäfs immer reell, die beiden geraden Linien (14) sind entweder reell oder imaginär und, dem entsprechend, ist alsdann der Coefficient λ ebenfalls reell oder imaginär. Jedes der Linien-Paare (13) bildet also mit den beiden geraden Linien (14) ein System von vier Harmonicalen.

Zu demselben Resultate gelangen wir auch, wenn wir nach den Gleichungen (2) umgekehrt die beiden geraden Linien (14) durch Vermittelung der beiden Functionen u und v, und zwar durch die Gleichungen

$$u-v\sqrt{-1} = 0, \qquad u+v\sqrt{-1} = 0 \tag{22}$$

darstellen, wobei indefs nicht übersehen werden darf, dafs die Functionen u und v von der willkührlichen Constante α abhängig sind.

An die Stelle der vorstehenden Gleichungen treten, wenn q und p reell sind, die folgenden:

$$u+v' = 0, \qquad u-v' = 0. \tag{23}$$

32. Beliebige solche Linien-Paare, von welchen jedes mit zwei gegebenen geraden Linien vier Harmonicalen bildet, heifst eine Involution von Linien-Paaren; und wir wollen, je nachdem die beiden gegebenen geraden Linien imaginär oder reell sind, dieselben als eine Involution der ersten oder zweiten Art unterscheiden. Wenn irgend zwei Linien-Paare gegeben sind, so können wir dieselben als einer Involution angehörig betrachten, und wenn alsdann irgend eine fünfte gerade Linie beliebig angenommen wird, so ist dadurch eine sechste gerade Linie auf lineare Weise bestimmt, welche

mit jener ein neues Paar der Involution bildet. In jeder Involution von drei Linien-Paaren wird jede gerade Linie also durch die fünf übrigen vollkommen bestimmt. Die beiden Linien zweier Paare einer Involution (diesen Paaren entspricht nach der obigen Beziehung $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$) fallen in eine einzige zusammen, und die beiden, reellen oder imaginären, geraden Linien, welche man auf diesem Wege erhält, sind eben diejenigen beiden, mit welchen jedes Paar der Involution vier Harmonicalen bildet. Bei beliebigen Annahmen von α stellen also die Gleichungen (13) Linien-Paare derselben Involution dar, und zwar stellen, wenn α, β und γ, und α', β' und γ' willkührliche Constante, Null und Unendlich nicht ausgeschlossen, bezeichnen, die drei Gleichungen-Paare:

$$\begin{aligned} u+\alpha v &= 0, & u+\beta v &= 0, & u+\gamma v &= 0, \\ v-\alpha u &= 0; & v-\beta u &= 0; & v-\gamma u &= 0; \end{aligned} \tag{24}$$

eine Involution der ersten Art, und die drei Gleichungen-Paare

$$\begin{aligned} u+\alpha' v &= 0, & u+\beta' v &= 0, & u+\gamma' v &= 0, \\ v+\alpha' u &= 0; & v+\beta' u &= 0; & v+\gamma' u &= 0; \end{aligned} \tag{25}$$

eine Involution der zweiten Art dar.

33. Um alle durch die Gleichungen (13) darstellbaren Linien-Paare zu erhalten, können wir, ohne Unterschied, von irgend einem beliebigen derselben ausgehen. Deshalb war bisher keine nähere Functionen-Bestimmung nothwendig, es war hinreichend, vorauszusetzen, dafs p, q, u, v .... lineare und ganze Functionen irgend zweier beliebigen linearen Coordinaten bedeuten. Diese allgemeine Voraussetzung reicht aber nicht mehr hin, wenn wir von den fraglichen Linien-Paaren (13) irgend ein besonderes auszeichnen wollen.

Es ist zuvörderst ersichtlich, dafs wir solchen zwei bestimmten Functionen u^0 und v^0, die von einem bestimmten Werthe α_0 des ursprünglichen α abhängen, die geometrische Bedeutung irgend zweier beliebigen linearen Cordinaten beilegen und hiernach rückwärts zwei andere lineare Coordinaten so wählen können, dafs p und q solche Functionen derselben sind, welche durch dieselbe quadratische Gleichung bestimmt werden. Nach dieser Bemerkung wollen wir insbesondere den Functionen u^0 und v^0 die Bedeutung gewöhnlicher Parallel-Coordinaten geben. Wir können in dieser Voraussetzung das durch die beiden Gleichungen

$$u^0 = 0, \qquad v^0 = 0, \tag{26}$$

dargestellte Linien-Paar von allen übrigen *a priori* unterscheiden. Wenn wir nemlich, von was für einem besondern Werthe von α die Functionen u und v, im Allgemeinen, auch abhängen mögen, die beiden Gleichungen (22), welche an die Stelle der Gleichungen (14) getreten sind, auf folgende Weise schreiben:

$$(u) - a(v)\sqrt{-1} = 0, \qquad (u) + a(v)\sqrt{-1} = 0, \tag{27}$$

indem wir a(v) für v schreiben, so können wir (u) und (v) als gewöhnliche Parallel-Coordinaten betrachten. a bedeutet alsdann eine Constante, die von dem jedesmaligen Werthe von α abhängig ist. Wenn wir hiernach denjenigen Winkel, welchen die beiden geraden Linien eines beliebigen der Paare (13) mit einander bilden (ein Winkel, der im Allgemeinen von einem dieser Paare zu einem andern sich ändert), ω nennen, und denjenigen vollkommen bestimmten Winkel, welchen die beiden, gleichzeitig auch durch die vorstehenden Gleichungen dargestellten, geraden Linien (14) mit einander bilden, durch η bezeichnen, so erhalten wir nach einer allbekannten Formel:

$$\pm tang\,\eta\sqrt{-1} = \frac{2a}{1+a^2} sin\,\omega. \tag{28}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs $\sin\omega$ ein Minimum wird, wenn $a = \pm 1$, das heifst, wenn u und v Parallel-Coordinaten bedeuten, und also nichts andres als u^0 und v^0 sind. Hiernach stellen die beiden Gleichungen (26) dasjenige Paar der Involution erster Art dar, dessen beide geraden Linien sich unter solchen Winkeln schneiden, welche, ihrer Gröfse nach, am meisten von einem rechten Winkel abweichen. Nennen wir also diese Durchschnitts-Winkel zur Unterscheidung ϑ und $(\pi - \vartheta)$, so ergibt sich sogleich:

$$\pm \operatorname{tang}\eta\sqrt{-1} = \sin\vartheta,$$

und hieraus gehen die nachstehenden Gleichungen von bemerkenswerther Form hervor:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}^2\eta &= -\sin^2\vartheta, \\ \operatorname{tang}^2\vartheta &= -\sin^2\eta, \\ \cos^2\eta\cos^2\vartheta &= 1. \end{aligned} \qquad (29)$$

34. Aus der Zusammenstellung der beiden Gleichungen (28) und (29) ergibt sich, unmittelbar, zur Bestimmung des Winkels ω durch den Winkel ϑ und die Constante a, die folgende Gleichung:

$$\sin\omega = \frac{1+a^2}{2a}.\sin\vartheta. \qquad (30)$$

Für jede besondere Annahme des Winkels ω gibt diese Gleichung zwei Werthe von a, von welchen der eine der reciproke Werth des andern ist. Diesem entspricht, dafs, wenn man die beiden geraden Linien eines der Paare (13) mit einander vertauscht, $\frac{1}{a}$ an die Stelle von a treten mufs, wenn die beiden Gleichungen (27) unverändert dieselben bleiben sollen. Die beiden Werthe von a entfernen sich um so mehr von der Einheit, je mehr der Winkel ω von ϑ sich entfernt und einem rechten Winkel sich nähert. Für den gröfsten und kleinsten Werth, den a, bei reellem Werthe von ω, erhalten kann, ergibt sich hiernach, indem man $\sin\omega = 1$ setzt:

$$a = \frac{1\pm\cos\vartheta}{\sin\vartheta}. \qquad (31)$$

Doch können diese beiden Werthe von a nicht als ein eigentliches Maximum und Minimum gelten, denn die Werthe von a bleiben auch dann noch reell, wenn $\sin\omega > 1$ und der bezügliche Winkel ω also imaginär wird. Wenn der Winkel ϑ ein rechter ist, bleibt a immer der Einheit gleich.

35. Nachdem wir in der vorigen Nummer nachgewiesen haben, dafs, wenn die beiden geraden Linien (26) diejenigen sind, welche sich unter solchen Winkeln schneiden, deren Abweichung von einem rechten ein Maximum ist, wir den linearen Functionen u^0 und v^0 die Bedeutung gewöhnlicher Parallel-Coordinaten beilegen können, wollen wir nun alle Paare der Involution durch die Gleichungen:

$$u^0 - \alpha^0 v^0 = 0, \qquad v^0 + \alpha^0 u^0 = 0, \qquad (32)$$

darstellen, indem wir α^0 als eine unbestimmte Constante betrachten. Alsdann erhalten wir, wenn wiederum ω und $(\pi - \omega)$ diejenigen Winkel sind, unter welchen die Linien irgend eines dieser Paare, welches von einem besondern Werthe von α^0 abhängt, sich schneiden, nach der bekannten Formel:

$$\pm\operatorname{tang}\omega = \frac{1+\alpha^{0^2}}{1-\alpha^{0^2}}\operatorname{tang}\vartheta,$$

wobei das doppelte Zeichen sich auf die beiden Nebenwinkel bezieht, welche beide für ω genommen werden können. Wenn wir in der vorstehenden Gleichung α^0 gleich Null neh-

nehmen, eine Voraussetzung, bei welcher die Gleichungen (32) in die Gleichungen (26) übergehen, ergibt sich $\omega = \vartheta$, wodurch wir die Bestätigung erhalten, dafs ϑ denjenigen Werth von ω bedeutet, welcher am meisten von einem rechten Winkel abweicht. Wenn wir α^0 unendlich setzen, so erhalten wir denselben Fall, nur mit dem einzigen Unterschiede, dafs alsdann die beiden Functionen u^0 und v^0 sich gegenseitig vertauschen, und dem entsprechend zugleich mit dem Winkel ω auch dessen trigonometrische Tangente ihr Zeichen ändert. Ueberhaupt vertauschen sich die beiden Linien irgend eines beliebigen Paares, womit denn auch jedesmal eine Zeichen-Aenderung von $tang\,\omega$ verknüpft ist, wenn wir statt α^0 nehmen $\left(-\frac{1}{\alpha^0}\right)$. Wenn wir das Zeichen von α^0 ändern, so bleibt der Werth von $tang\,\omega$ unverändert derselbe, während die Gleichungen (32) zwei von einander verschiedene Linien-Paare darstellen: es gibt also im Allgemeinen zwei Linien-Paare der Involution, welche einem gegebenen Winkel ω entsprechen. Nur in dem Falle, dafs α^0 verschwindet, ist $\alpha^0 = -\alpha^0$, und nur dann fallen die beiden Linien-Paare, die dem Winkel ω, der alsdann ϑ gleich wird, entsprechen, zusammen. Wenn wir $\alpha^0 = \pm 1$ setzen, wonach die Gleichungen (32) in die folgenden übergehen:

$$u^0 \mp v^0 = 0, \qquad u^0 \pm v^0 = 0,$$

so wird der Winkel ω ein rechter. Alsdann aber erhalten wir, wenn wir einen beliebigen der obigen beiden Werthe von α^0 reciprok und mit entgegengesetztem Zeichen nehmen, den jedesmaligen andern. Es fallen also die beiden Linien-Paare, die diesen beiden Werthen von α^0 entsprechen, zusammen, jedoch in der Art, dafs die erste Linie des einen Paares mit der zweiten Linie des zweiten Paares dieselbe wird. Wenn insbesondere der Winkel ϑ ein rechter ist, so ist es, welchen Werth wir der Constanten α^0 beilegen mögen, immer auch ω; ein Resultat, zu dem uns auch die vorige Nummer schon geführt hat. Wenn α^{0^2}, indem es durch Null hindurchgeht, negativ wird, so wird $tang\,\omega$ immer kleiner, bis es, wenn $\alpha^0 = \pm\sqrt{-1}$, verschwindet. Es kommt alsdann:

$$u^0 \mp v^0\sqrt{-1} = 0, \qquad v^0 \pm u^0\sqrt{-1} = 0.$$

Wenn wir die erste dieser beiden Gleichungen mit $\sqrt{-1}$ multipliciren, erhalten wir die zweite, woraus direct sich ergibt, dafs für jede dieser beiden Werthe von α^0 die beiden Linien des bezüglichen Paares zusammenfallen. Die beiden durch jede der vorstehenden Gleichungen, mit Berücksichtigung des doppelten Zeichens, dargestellten geraden Linien:

$$u^0 - v^0\sqrt{-1} = 0, \qquad u^0 + v^0\sqrt{-1} = 0, \tag{33}$$

sind, in Uebereinstimmung mit dem Frühern, keine andern als die, im vorliegenden Falle imaginären, geraden Linien:

$$p = 0, \qquad q = 0. \tag{14}$$

36. Wir wollen uns nun zu dem zweiten Falle wenden, in welchem q und p reelle Functionen, und also die Involution, welche aus den, bei willkührlicher Annahme der Constanten $\alpha'(= \alpha\sqrt{-1})$, durch die Gleichungen

$$u = 0, \qquad v' = 0; \tag{34}$$

dargestellten Linien-Paare besteht, von der zweiten Art ist. Die Gleichungen (23), welche in diesem Falle an die Stelle der Gleichungen (14) treten, können wir auf nachfolgende Weise schreiben:

$$(u) + a'(v') = 0, \qquad (u) - a'(v') = 0, \tag{35}$$

indem wir $a'(= a\sqrt{-1})$ als irgend eine Function von α' und (u) und (v') als Parallel-Coordinaten betrachten. Nennen wir den Winkel, welchen die beiden geraden Linien (34)

mit einander bilden, ω' und, wie früher, den Winkel der beiden geraden Linien (14) η, so erhalten wir nach bekannter Formel:

$$\mp tang\,\eta = \frac{2a'}{1-a'^2} sin\,\omega'. \qquad (36)$$

Zuvörderst ist hieraus ersichtlich, dafs a' niemals der Einheit gleich werden kann, wenn nicht insbesondere der Winkel η ein rechter ist, und dafs in diesem Ausnahms-Falle, welche Werthe α' und ω' auch erhalten mögen, a' immer der Einheit gleich ist. Also es bedeuten die Functionen (u) und (v') für jeden Werth von α' gewöhnliche Parallel-Coordinaten, oder es können dieselben niemals Parallel-Coordinaten bedeuten. Setzen wir insbesondere $sin\,\omega' = 1$, so ergibt sich aus (36):

$$a' = \frac{cos\,\eta \pm 1}{sin\,\eta}. \qquad (37)$$

Man sieht ohne Mühe ein, dafs die beiden in dem vorstehenden Ausdruck enthaltenen Werthe von a', welche sich auf den Fall, dafs der Winkel ω' ein rechter ist, beziehen, diejenigen sind, welche, so lange ω' einen reellen Winkel bedeutet, am meisten von der Einheit sich entfernen.

Wir könnten, indem wir einen der vorstehenden beiden Werthe von a' nehmen, dem entprechend (u) und (v') als rechtwinklige Parallel-Coordinaten ansehen, und α' als unbestimmten Coefficienten beibehalten, die Gleichungen

$$(u) + \alpha' a' (v') = 0, \qquad (v') + \alpha' a' (u) = 0,$$

zu Grunde legen, um alle möglichen Linien-Paare (34) zu discutiren. Aber ich halte diese Erörterungen hier für überflüssig, weil daraus, dafs jedes dieser Linien-Paare mit den beiden geraden Linien (14) Harmonicalen bildet, die Natur derselben sich hinlänglich ergibt.

Beiläufig bemerke ich nur noch, dafs die Gleichungen (36) und (28), in denen ω und ω' dieselbe Bedeutung haben, identisch dieselben sind, so dafs wir die Discussion beider Fälle an eine einzige dieser Gleichungen anknüpfen können.

37. Ich habe schon an einem andern Orte darauf aufmerksam gemacht, dafs derjenige Bogen, welchem die trigonometrische Tangente $\pm\sqrt{-1}$ entspricht, ein unbestimmter ist und sich unter der Form $\infty\sqrt{-1}$ darstellt. Setzt man $tang\,A = \pm\sqrt{-1}$, so erhält man immer:

$$tang\,(A+B) = \frac{tang\,A + tang\,B}{1 - tang\,A\,tang\,B} = \frac{\pm\sqrt{-1} + tang\,B}{1 \mp tang\,B\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1},$$

welchen reellen oder imaginären Bogen B auch bezeichnen mag.

Die beiden Gleichungen (33), in denen u^0 und v^0 die Bedeutung rechtwinkliger Coordinaten erhalten, wenn der Winkel, den wir η genannt haben, ein rechter ist, zeigen hiernach, dafs in dem eben bezeichneten Falle die beiden imaginären geraden Linien (14) beliebig mit irgend zwei anderen vertauscht werden können, welche ebenfalls durch den reellen Durchschnittspunct der Involution erster Art gehen und auf einander senkrecht sind; in der Art, dafs jede durch diesen Punct gehende imaginäre gerade Linie als eine dieser Linien betrachtet werden kann. In demjenigen Falle ferner, dafs die beiden geraden Linien (14) reell sind und auf einander senkrecht stehen, einem Falle, dem $a = \pm\sqrt{-1}$ entspricht, zeigen die Gleichungen (35), dafs alsdann je zwei imaginäre gerade Linien, welche mit den beiden geraden Linien (14) vier Harmonicalen, oder, wie wir uns hier auch ausdrücken können, mit jeder der letztgenannten gleiche Winkel bilden,

als ein solches Linien-Paar angesehen werden kann, das wir in der 33. Nummer durch die Gleichungen: $u^0 = 0$ und $v^0 = 0$, dargestellt haben.

In Uebereinstimmung hiermit zeigen die Gleichungen (29), dafs $tang\,\eta$, wenn ϑ, und umgekehrt, $tang\,\vartheta$, wenn η ein rechter Winkel ist, gleich $\pm\sqrt{-1}$ wird.

38. Es liegt uns jetzt nur noch ob, einige particuläre Functionen-Bestimmungen besonders hervorzuheben.

Wenn y und x beliebige lineare Coordinaten und p und q reelle oder imaginäre Functionen derselben von der Form $(y+ax+b)$ bedeuten, so ergeben sich für u, v und bezüglich v', im Allgemeinen, reelle lineare und ganze Functionen von der allgemeinsten Form mit drei Constanten. Wir wollen demnach

$$u = g[u], \qquad v = h[v], \qquad v' = h'[v']$$

setzen, indem wir [u], [v] und [v'] als lineare Functionen von y und x von derselben Form als p und q betrachten. Alsdann erhalten wir, wenn wir zuerst denjenigen Fall betrachten, dafs die letztgenannten beiden Functionen imaginär sind, aus den Gleichungen (4), welche durch Einführung von y und x identische werden müssen, zur Bestimmung der Coefficienten g und h die beiden Gleichungen:

$$1 = g+\alpha h, \qquad h-\alpha g = 0,$$

und hieraus:

$$g = \frac{1}{1+\alpha^2}, \qquad h = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Wenn wir hiernach in die Gleichungen (7) und (8) [u] und [v] statt u und v einführen, so kommt:

$$p+q = 2\frac{[u]+\alpha^2[v]}{1+\alpha^2}, \qquad pq = \frac{[u]^2+\alpha^2[v]^2}{1+\alpha^2}, \tag{38}$$

oder, wenn wir, der Kürze wegen,

$$\alpha = tang\,\varphi$$

setzen, und dann, da α jede beliebige Constante bedeuten kann, auch den Winkel φ als irgend einen beliebigen betrachten:

$$p+q = 2\{[u]cos^2\varphi+[v]sin^2\varphi\}, \qquad pq = [u]^2cos^2\varphi+[v]^2sin^2\varphi. \tag{39}$$

In dem andern Falle, dafs p und q reell sind, erhalten wir ganz auf demselben Wege oder auch unmittelbar aus dem Vorstehenden:

$$p+q = 2\frac{[u]-\alpha'^2[v']}{1-\alpha'^2}, \qquad pq = \frac{[u]^2-\alpha'^2[v']^2}{1+\alpha'^2}. \tag{40}$$

39. Wir wollen zweitens für u und v gewöhnliche Parallel-Coordinaten einführen, und diese, wie oben, durch (u) und (v) unterscheiden. Zu diesem Ende können wir von den Gleichungen (38) — (40) der vorigen Nummer ausgehen. Indem wir nemlich diejenigen beiden Winkel, welche die Axen: $u = 0$ und $v = 0$ mit der Axe: $x = 0$ bilden, δ und δ' nennen, und wie bisher den Winkel, welchen mit der erstgenannten Axe die zweite bildet, durch ω bezeichnen, so dafs also: $\delta'-\delta = \omega$, so erhalten wir unmittelbar:

$$[u] = -\frac{sin\,\omega}{sin\,\delta}(u), \qquad [v] = \frac{sin\,\omega}{sin\,\delta'}(v),$$

wonach zum Beispiel die zweite der Gleichungen (39) in die folgende übergeht:

$$pq = (u)^2\frac{sin^2\omega}{sin\,\delta^2}cos^2\varphi+(v)^2\frac{sin^2\omega}{sin^2\delta'}sin^2\varphi. \tag{41}$$

40. Wir können aber auch, indem wir, wie eben, Parallel-Coordinaten einführen, Fig 1.
die fragliche Umformung, welche in der 38. Nummer allein von α oder φ abhängt, einzig

und allein von der in der 33. Nummer durch a bezeichneten Constanten abhängig machen. Nur müssen wir, da bei einer beliebigen Drehung der Involution die jedem Paare derselben entsprechende Constante a denselben Werth behält, zwei sich einander entsprechende Werthe von a und α kennen. Wir wollen uns hier auf die Voraussetzung beschränken, dafs $a = 1$, wenn α verschwindet, wonach die beiden Functionen t und w als Parallel-Coordinaten betrachtet werden können, und die Linien des ihnen entsprechenden Paares der Involution sich unter solchen Winkeln ϑ und $(\pi - \vartheta)$ schneiden, deren Abweichung von einem rechten ein Maximum ist. Nach der Bezeichnung der 35. Nummer heifst diefs, dafs t, w und α bezüglich die Bedeutung von u^0, v^0 und α^0 bekommen.

Die beiden Gleichungen:

$$t = u + \alpha v, \qquad w = v - \alpha u, \tag{4}$$

gehen, indem wir durch (u) und (v) Parallel-Coordinaten darstellen und durch $\varkappa$ eine noch unbestimmte Constante bezeichnen, in die folgenden über:

$$t = \varkappa\{(u) + \alpha a(v)\}, \qquad w = -\alpha\varkappa\{(u) - \frac{a}{\alpha}(v)\}. \tag{42}$$

Fig. 1. Zuvörderst ergibt sich hieraus, wenn wir uns, um kurz zu sein, sogleich auf die erste Figur beziehen,

$$\alpha a = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}, \qquad \frac{a}{\alpha} = -\frac{\sin\delta}{\sin\delta'}; \tag{43}$$

und aus diesen Gleichungen folgt:

$$a^2 \sin\delta' \sin\gamma' + \sin\delta \sin\gamma = 0, \tag{44}$$

$$\alpha^2 \sin\delta \sin\gamma' + \sin\delta' \sin\gamma = 0. \tag{45}$$

Diese beiden Gleichungen gelten allgemein auch dann, wenn den Functionen t und w nicht $a = 1$ entspricht, und also diese Functionen nicht als Parallel-Coordinaten construirt werden können. Diese Voraussetzung liefert die neuen Bestimmungen:

$$\varkappa = \frac{\sin\gamma'}{\sin\vartheta}, \qquad \alpha\varkappa = \frac{\sin\delta'}{\sin\vartheta}. \tag{46}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\alpha = \frac{\sin\delta'}{\sin\gamma'},$$

und dann, mit Berücksichtigung von (45),

$$a = -\frac{\sin\gamma}{\sin\delta},$$

so dafs also:

$$\sin\delta' \sin\delta + \sin\gamma' \sin\gamma = 0. \tag{47}$$

(Diese Gleichung folgt unmittelbar aus der allgemeinen Gültigkeit der Gleichung (44).) Ferner erhalten wir aus den beiden Gleichungen (43):

$$a = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta'} = -\frac{\sin\delta}{\sin\gamma'},$$

wonach auch

$$a^2 = \frac{\sin^2\delta + \sin^2\gamma}{\sin^2\delta' + \sin^2\gamma'}.$$

Endlich geben die Gleichungen (46):

$$\varkappa^2(1 + \alpha^2) = \frac{\sin^2\delta' + \sin^2\gamma'}{\sin^2\vartheta} = \frac{\sin^2\delta + \sin^2\gamma}{a^2 \sin^2\vartheta},$$

und, wenn wir statt der Sinus die Tangenten einführen, und berücksichtigen, dafs $\vartheta = \gamma' - \delta' = \gamma - \delta$, so kommt:

$$x^2(1+\alpha^2) = \left(\frac{tang\,\delta' + tang\,\gamma'}{tang\,\delta' - tang\,\gamma'}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{tang\,\delta + tang\,\gamma}{tang\,\delta + tang\,\gamma}\right)^2,$$

und zuletzt:

$$x^2(1+\alpha^2) = \frac{1+a^2}{2a^2}.$$

Wir haben aber:

$$pq = t^2 + w^2 = x^2(1+\alpha^2)\{(u)^2 + a^2(v)^2\},$$

und wenn wir substituiren, ergibt sich als die verlangte Gleichung folgende:

$$pq = \frac{1+a^2}{2a^2}\{(u)^2 + a^2(v)^2\}. \qquad (48)$$

Derselben Gleichung können wir nach (30) auch die nachstehende Form geben:

$$pq = \frac{sin\,\omega}{a\,sin\,\vartheta}\{(u)^2 + a^2(v)^2\}. \qquad (49)$$

41. Wir wollen drittens und letztlich noch die Voraussetzung machen, dafs die nähere Functionen-Bestimmung durch die identische Gleichung:

$$p + q + r \equiv \beta s$$

gegeben sei. Diese Gleichung geht in die folgende über:

$$2t + r \equiv \beta s,$$

und so ergibt sich unmittelbar, dafs in dem vorliegenden Falle die gerade Linie: $t = 0$ durch den Durchschnitt der beiden als gegeben zu betrachtenden Linien: $r = 0$ und $s = 0$ geht, und dadurch also vollkommen bestimmt ist.

Reducirt sich die obige identische Gleichung auf:

$$p + q + r \equiv \beta,$$

so ist die Linie: $t = 0$ der als gegeben zu betrachtenden Linie: $r = 0$ parallel.

§. 2.

Coordinaten gerader Linien. Bestimmung aller möglichen Systeme linearer Linien-Coordinaten.

42. So wie die Lage eines Punctes in Beziehung auf gegebene geometrische Oerter durch zwei gegebene Stücke bestimmt ist, so sind auch zur Bestimmung der Lage einer geraden Linie zwei Stücke nothwendig und hinreichend. Wenn zum Beispiel zwei feste gerade Linien gegeben sind, so ist ein Punct bestimmt, wenn seine Abstände von denselben gegeben sind, eine gerade Linie ist bestimmt, wenn wir ihre Durchschnittspuncte mit den festen geraden Linien oder auch nur eine derselben und ihre Richtung kennen. Zur analytischen Bestimmung jedes jener beiden Durchschnittspuncte, so wie jener Richtung, ist eine Constante erforderlich. Um von einer der einfachsten Bestimmungsweisen auszugehen, wollen wir annehmen, dafs zwei feste, auf einander senkrechte, gerade Linien gegeben seien. Irgend eine beliebige gerade Linie schneide von der ersten der beiden gegebenen ein Segment ab, das wir, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, durch w bezeichnen wollen, und bilde mit derselben gegebenen Linie einen Winkel, dessen trigonometrische Cotangente v sei. Die zweite gegebene gerade Linie dient hierbei nur zur Bestimmung desjenigen Punctes der ersten, von welchem an das Segment w gerechnet wird, und kann daher auch durch diesen Punct ersetzt werden. Verlangen wir die Gleichung der so be-

stimmten geraden Linie in gewöhnlichen Parallel-Coordinaten — zur blofsen Verdeutlichung, nicht weil wir dieser Coordinaten irgendwie zur Vermittelung bedürften — und nehmen zugleich die erste und zweite gegebene feste gerade Linie als die Axen $x = 0$ und $y = 0$, so ergibt sich sogleich:

$$y + vx + w = 0.$$

w und v bedeuten für irgend eine gegebene gerade Linie zwei Constante, sie erhalten für verschiedene gerade Linien verschiedene Werthe, die aber alle auf gleichmäfsige Weise construirt werden. Wir betrachten sie als veränderliche Gröfsen, die erst für eine gegebene gerade Linie gegebene Werthe erhalten: als Coordinaten dieser Linie. Wenn irgend eine Gleichung zwischen Linien-Coordinaten gegeben ist, so können wir diese Gleichung durch die Coordinaten-Paare unendlich vieler geraden Linien, die stetig auf einander folgen und also, im Allgemeinen, eine Curve umhüllen, befriedigen; wir sagen, es werde diese Curve durch die gegebene Gleichung dargestellt. Eine Gleichung des ersten Grades zwischen den beiden Coordinaten w und v stellt im engern Verstande keine Curve dar, es reducirt sich diese Curve auf einen Punct, und durch diesen gehen unendlich viele gerade Linien, deren Coordinaten-Paare jene lineare Gleichung befriedigen. Wir können diefs unmittelbar aus der linearen Form der Gleichung eben so leicht nachweisen, als dafs eine Gleichung des ersten Grades zwischen gewöhnlichen Parallel-Coordinaten eine gerade Linie darstellt *). w und v sind aber nicht die einzigen Coordinaten dieser Art; es gibt unendlich viele Coordinaten, welche alle die Eigenschaft haben, dafs eine lineare Gleichung zwischen denselben einen Punct darstellt: wir wollen dieselben lineare Linien-Coordinaten nennen. Der eigentliche Gegenstand dieses Paragraphen ist, alle möglichen linearen Systeme von Linien-Coordinaten zu discutiren. Zuvor aber müssen wir den Begriff der Coordinaten-Bestimmung gerader Linien in seiner ganzen Allgemeinheit auffassen; die Entwicklungen des vorigen Paragraphen erlauben uns, der Analogie wegen, hier ganz kurz zu sein.

43. Linien-Coordinaten überhaupt sind also veränderliche Gröfsen, durch welche, wenn wir ihnen bestimmte Werthe beilegen, eine gerade Linie geometrisch bestimmt wird, und welche für alle gerade Linien auf gleichmäfsige Weise durch die Vermittelung gegebener geometrischen Oerter construirt werden. Bezeichnen wir allgemein zwei solche Coordinaten durch ϑ und ζ und durch w und v irgend zwei Linien-Coordinaten, die wir irgend beliebig, zum Beispiel nach der Bestimmungsweise der vorigen Nummer, wählen, so liegt in der vorstehenden Definition, dafs

$$\vartheta = \varphi(w, v), \qquad \zeta = \psi(w, v),$$

wobei φ und ψ irgend zwei Functionen andeuten. Wir wollen hier voraussetzen, diese Functionen seien algebraische und rationale. Setzen wir, dem entsprechend,

$$\vartheta = \frac{\varphi'(w, v)}{\varphi''(w, v)},$$

indem wir durch φ' und φ'' rationale und ganze Functionen anzeigen, so stellen die Gleichungen:

$$\varphi'(w, v) = 0, \qquad \varphi''(w, v) = 0,$$

zwei algebraische Curven dar, die wir als gegeben betrachten können. Für jede gerade Linie, welche die erste dieser beiden Curven berührt, ist ϑ gleich Null, für jede gerade

*) Ausführliche Erörterungen über diesen Gegenstand findet man in den ersten Nummern des zweiten Bandes der „*analytisch-geometrischen Entwicklungen.*“

Linie, welche die zweite Curve berührt, ist ϑ unendlich. Um den Werth dieser Coordinate für eine beliebige gegebene gerade Linie zu erhalten, wollen wir uns die letzten beiden Gleichungen in Beziehung auf w aufgelöset denken, und die Wurzeln der ersten Gleichung w^1, w^2.... w^n, die Wurzeln der zweiten Gleichung w_1, w_2.... w_m nennen. Alsdann können wir die Gleichung, durch welche ϑ gegeben ist, auf folgende Art schreiben:

$$\vartheta = \mu \frac{(w-w^1)(w-w^2)....(w-w^n)}{(w-w_1)(w-w_2)....(w-w_m)},$$

indem wir durch μ eine Constante bezeichnen. Die Ausdrücke w^1, w^2.... w^3 stellen aber die Werthe der Coordinate w solcher Tangenten an die erste gegebene Curve dar, deren Richtung durch den Werth für v, wovon jene Ausdrücke abhängig sind, bestimmt wird. Diese Richtung ist eine gegebene, wenn eine gerade Linie vorliegt, deren allgemeine Coordinaten ϑ und ζ bestimmt werden sollen. Jene Tangenten sind dieser Linie parallel. Hiernach bedeuten $(w-w^1)$, $(w-w^2)$.... $(w-w^n)$ diejenigen Segmente, welche auf der, oben durch die Gleichung $x = 0$ bestimmten, festen geraden Linie zwischen der fraglichen geraden Linie und jeder derjenigen Tangenten der ersten gegebenen Curve liegen, welche ihr parallel sind. Der Zähler in dem Ausdrucke für ϑ ist das Product dieser Segmente, der Nenner stellt ein analoges Product dar, wobei blofs die zweite gegebene Curve an die Stelle der ersten tritt. ϑ bedeutet also den Quotienten dieser beiden Producte, multiplicirt mit irgend einem Factor μ. Mit Rücksicht darauf, dafs μ eine unbestimmte Constante bedeutet, können wir, wenn in diesen beiden Producten eine gleiche Anzahl von Factoren vorkommt, an die Stelle der obigen Segmente auch die kürzesten Abstände der gegebenen geraden Linie von den ihr parallelen Tangenten der beiden Curven setzen. Auf gleiche Weise wie ϑ können wir auch ζ bestimmen.

Wir sehen, wie auf diesem Wege sich immer durch die Vermittelung von vier gegebenen Curven die beiden Coordinaten, von denen die Lage einer geraden Linie überhaupt abhängt, construiren lassen; vorausgesetzt nur, dafs für eine gegebene gerade Linie diese beiden Constanten algebraisch und auf einzige Weise bestimmt sind. Jede andere Construction, durch welche gegebene Oerter sie auch ermittelt werden mag, läfst sich auf die vorerwähnte zurückführen. Wenn ϑ und ζ rationale und ganze Functionen bedeuten, so bedürfen wir zu ihrer Construction blofs zweier gegebenen Curven. Jede dieser Functionen ist alsdann als ein Product aus denjenigen Segmenten, welche auf einer der Richtung nach gegebenen geraden Linie, zwischen der zu bestimmenden geraden Linie einerseits und allen ihr parallelen Tangenten einer gegebenen Curve andrerseits, liegen, und einem constanten Coefficienten, anzusehen und als solches zu construiren.

44. Wir wenden uns nun zu unserm eigentlichen Gegenstande, der Bestimmung aller möglichen solchen Systeme von Linien-Coordinaten, in welchen die Gleichung eines Punctes vom ersten Grade ist. Aus dieser Beschränkung ergibt sich sogleich, dafs der Grad der Gleichung einer gegebenen Curve unverändert derselbe bleibt, wenn wir von einem solchen Systeme zu irgend einem andern derselben Art übergehen.

Der Definition nach stellt also, wenn ϑ und ζ zwei Coordinaten der eben bezeichneten Art bedeuten, die Gleichung:

$$A\vartheta + B\zeta + C = 0, \qquad (1)$$

einen Punct dar. Dieſs setzt voraus, dafs, wenn m und n irgend zwei andere Linien-Coordinaten einer besondern Bestimmung sind, in Beziehung auf welche die Gleichung des Punctes ebenfalls vom ersten Grade ist, folgende Gleichungen statt finden:

$$\vartheta = \frac{v(m+a'n+b')}{\tau(m+a''n+b'')}, \qquad \zeta = \frac{\varphi(m+an+b)}{\tau(m+a''n+b'')}. \tag{2}$$

Durch die Vermittelung von acht unbestimmten Coefficienten, a, a', a'', b, b', b'', $\frac{v}{\tau}$ und $\frac{\varphi}{\tau}$, erhält man hiernach die allgemeine lineare Coordinaten-Bestimmung aus jeder besondern. Wir wollen hier den Coordinaten m und n diejenige Bedeutung geben, die wir oben den Coordinaten w und v beigelegt haben, so dafs m an die Stelle von w und n an die Stelle von v getreten ist, und zugleich, der Kürze halber,

$$\tau(m+a''n+b'') = t, \qquad v(m+a'n+b') = u, \qquad \varphi(m+an+b) = v$$

setzen. Hiernach erhalten wir:

$$\vartheta = \frac{u}{t}, \qquad \zeta = \frac{v}{t}.$$

Die Gleichung (1) nimmt alsdann die folgende Form an:

$$Au+Bv+Ct = 0,$$

so dafs also an die Stelle der allgemeinen Gleichung des ersten Grades zwischen den beiden veränderlichen Gröfsen ϑ und ζ die allgemeine homogene Gleichung desselben Grades zwischen drei veränderlichen Gröfsen t, u und v tritt. Wir können auch die drei neuen linearen und überdiefs ganzen Functionen als Coordinaten betrachten. Sie erhalten für eine gegebene gerade Linie vollkommen bestimmte, aber nicht mehr von einander unabhängige Werthe, und die bezügliche gerade Linie wird durch die Quotienten je zweier derselben geometrisch bestimmt.

45. Die drei Gleichungen:

$$m+a''n+b'' = 0, \qquad m+a'n+b' = 0, \qquad m+an+b = 0,$$

statt deren wir auch die folgenden drei nehmen können:

$$t = 0, \qquad u = 0, \qquad v = 0,$$

stellen drei Puncte dar. Sind diese drei Puncte gegeben, so sind dadurch auch die sechs Constanten in den vorstehenden Gleichungen als gegeben anzusehen. Wir wollen diese Puncte T, U und V nennen. Für jede gerade Linie, welche durch einen dieser drei Puncte geht, ist die bezügliche lineare Function gleich Null. Betrachten wir, um den Werth dieser Function für irgend eine gegebene gerade Linie zu construiren, m' und n' als die dieser Linie angehörigen Werthe der Coordinaten m und n, und legen, etwa durch den Punct V, eine gerade Linie parallel mit der gegebenen, so erhalten wir für den Werth der Coordinate m dieser geraden Linie den Ausdruck $-(an'+b)$. Die lineare Function $(m'+an'+b)$ bedeutet hiernach die Differenz derjenigen beiden Werthe der genannten Coordinate, welche sich auf die gegebene gerade Linie und die ihr parallele, durch den gegebenen Punct V gehende beziehen; also dasjenige Segment, welches auf der, oben durch die Gleichung $x = 0$ bestimmten, festen geraden Linie zwischen den eben bezeichneten beiden Parallelen liegt, oder auch, was dasselbe ist, diejenige gerade Linie, welche, von dem gegebenen Puncte V aus, nach der fraglichen geraden Linie, parallel mit der Richtung der geraden Linie: $x = 0$, gezogen wird. Jenes Segment oder diese gerade Linie, multiplicirt mit dem constanten Coefficienten φ, gibt den gesuchten Werth der Function v, welcher sich auf die gegebene gerade Linie bezieht. Indem wir erwägen, dafs u und t sich ganz auf dieselbe Weise construiren lassen, erhalten wir die folgende allgemeine Coordinaten-Bestimmung vermittelst dreier gegebenen Puncte und dreier unbestimmten Coefficienten, deren einer indefs willkührlich angenommen werden kann.

„Wenn

„Wenn irgend drei Puncte gegeben sind, so sind die drei allgemeinen Coordinaten einer beliebigen geraden Linie diejenigen drei geraden Linien, die von den drei gegebenen Puncten aus nach einer willkührlichen Richtung, unter einander parallel, nach der beliebigen geraden Linie gezogen werden können, multiplicirt mit drei unbestimmten Coefficienten."

Die Aenderung der willkührlichen Richtung steht mit der Bestimmung der drei Coefficienten in einer wechselseitigen Beziehung, aber diese Beziehung ist nicht, wie es bei der Punct-Coordinaten-Bestimmung der 8. Nummer der Fall ist, unabhängig von den jedesmaligen Coordinaten-Werthen. Nennen wir denjenigen Winkel, welchen irgend eine gegebene gerade Linie mit der willkührlichen Richtung bildet, ω und diejenigen drei geraden Linien, welche von den drei gegebenen Puncten T, U und V aus, nach der gegebenen geraden Linie gezogen werden, Tt, Uu und Vv, so dafs also

$$t = \tau \,.\, Tt, \qquad u = v \,.\, Uu, \qquad v = \varphi \,.\, Vv,$$

und legen dann von denselben drei Puncten aus an dieselbe gerade Linie irgend drei neue gerade Linien Tt', Uu' und Vv', unter den bezüglichen Winkeln α, β und γ, so ergibt sich, wenn wir diese drei Winkel durch die drei Gleichungen:

$$\tau = \pm\frac{\sin\omega}{\sin\alpha}, \qquad v = \pm\frac{\sin\omega}{\sin\beta}, \qquad \varphi = \pm\frac{\sin\omega}{\sin\gamma},$$

bestimmen:

$$t = Tt', \qquad u = Uu', \qquad v = Vv'.$$

Die Coefficienten τ, v und φ hängen von dem, von einer geraden Linie zur andern veränderlichen, Winkel ω ab, aber die Quotienten je zweier derselben, welche allein bei Bestimmung der beiden Coordinaten ϑ und ζ in Betracht kommen, sind von diesem Winkel unabhängig. Wir können hiernach zwar im Allgemeinen nicht Tt', Uu' und Vv' als Coordinaten der geraden Linien betrachten, wohl aber die Quotienten einer dieser beiden Linien in die beiden übrigen.

„Wenn drei Puncte gegeben sind, so erhält man die beiden Coordinaten einer beliebigen geraden Linie, wenn man von diesen Puncten aus nach derselben drei solche gerade Linien zieht, welche mit ihr drei gegebene Winkel bilden und dann die Quotienten einer beliebigen dieser drei Linien in die beiden übrigen nimmt."

Insbesondere können wir die drei Winkel α, β und γ einander und einem rechten Winkel gleich nehmen, so dafs wir also für die beiden Coordinaten einer geraden Linie die beiden Quotienten eines der drei kürzesten Abstände derselben von drei gegebenen Puncten in die beiden übrigen erhalten.

Auf gleiche Weise können wir auch die beiden Coordinaten ϑ und ζ als Quotienten von Segmenten auf TU und TV construiren. Wenn nemlich diese beiden festen geraden Linien von der zu bestimmenden bezüglich in den Puncten U' und V' geschnitten werden, so ist offenbar:

$$\vartheta = \frac{v}{\tau}\cdot\frac{UU'}{TU'}, \qquad \zeta = \frac{\varphi}{\tau}\cdot\frac{VV'}{TV'}.$$

46. Endlich ist es auch leicht, die allgemeinen Ausdrücke von ϑ und ζ, die uns bisher überall als Quotienten veränderlicher Linien-Segmente entgegengetreten sind, als reciproke Werthe solcher Segmente, oder auch als solche Segmente selbst darzustellen. Statt aber in irgend ein Detail solcher Constructionen einzugehen, wollen wir auch hier, ähnlich wie im vorigen Paragraphen, nachdem die drei festen Puncte T, U und V gegeben sind, die

unbestimmten Coefficienten durch eine identische Gleichung einführen und für diese Gleichung die folgende nehmen:

$$\tau' t + v' u + \varphi' v = c, \qquad (1)$$

die wir auch auf folgende Form bringen können:

$$\frac{t}{t'} + \frac{u}{u'} + \frac{v}{v'} = 1. \qquad (2)$$

Wenn hiernach irgend eine homogene und lineare Gleichung zwischen t, u und v:

$$\lambda t + \mu u + \nu v = 0 \qquad (3)$$

gegeben ist, so erhalten wir durch Zerlegung dieser Gleichung folgende drei Paare von Puncten:

$$\begin{aligned} t &= 0, & \mu u + \nu v &= 0; \\ u &= 0, & \nu v + \lambda t &= 0; \\ v &= 0, & \lambda t + \mu u &= 0; \end{aligned}$$

welche mit dem durch die obige Gleichung (3) dargestellten Puncte in gerader Linie liegen. Die drei ersten Puncte der drei Paare sind die drei gegebenen Puncte T, U und V; die drei zweiten Puncte der drei Paare liegen auf denjenigen drei geraden Linien UV, TV und TU, welche die gegebenen Puncte, paarweise genommen, verbinden. Für die vierten harmonischen Theilungspuncte zu jedem der letztgenannten Puncte und denjenigen beiden gegebenen, mit welcher derselbe in gerader Linie liegt, ergeben sich, bekannter Weise, die drei Gleichungen:

$$\mu u - \nu v = 0, \qquad \nu v - \lambda t = 0, \qquad \lambda t - \mu u = 0.$$

Die drei vierten harmonischen Theilungspuncte liegen, weil jede der vorstehenden Gleichungen eine algebraische Folge aus den beiden andern ist, in gerader Linie, und für diese gerade Linie ist

$$\lambda t = \mu u = \nu v,$$

woraus wir, mit Zuziehung der Gleichung (1), folgende Coordinaten-Werthe herleiten:

$$t = c \cdot \frac{\psi}{\lambda}, \qquad u = c \cdot \frac{\psi}{\mu}, \qquad v = c \cdot \frac{\psi}{\nu},$$

wobei wir, der Kürze wegen,

$$\frac{\lambda\mu\nu}{\tau'\mu\nu + v'\lambda\nu + \varphi'\lambda\mu} = \psi$$

setzen. Die auf diese Weise bestimmte gerade Linie ist aber, was aus ihrer Construction folgt, keine andere, als diejenige, welche wir nach der, in der 14. Nummer eingeführten, Definition, die Polare des Punctes (3), in Beziehung auf das von den drei gegebenen Puncten T, U, V gebildete Dreieck, nennen. Wenn die Gleichung (3) insbesondere die Mitte (den Schwerpunct) dieses Dreiecks darstellt, so liegt die Polare desselben unendlich weit; die Coordinaten dieser Polaren werden also unendlich; demnach erhält man $\psi = \infty$, oder

$$\tau'\mu\nu + v'\lambda\nu + \varphi'\lambda\mu = 0,$$

eine Bedingungs-Gleichung, der wir auch folgende Form geben können:

$$\frac{\tau'}{\lambda} + \frac{v'}{\mu} + \frac{\varphi'}{\nu} = 0. \qquad (4)$$

47. Wenn die drei Coordinaten t, u und v insbesondere diejenigen geraden Linien bedeuten, welche von den drei gegebenen festen Puncten aus nach gegebener Richtung, unter sich parallel, nach der bezüglichen geraden Linie gezogen werden können, ein Fall, den wir durch Umklammerung jener Coordinaten unterscheiden wollen, so erhal-

ten wir für jenen Schwerpunct, nach einer allbekannten Eigenschaft desselben, die Gleichung

$$(t)+(u)+(v) = 0. \qquad (5)$$

Es wird der Fall, dafs die bezeichnete Art von Coordinaten zu Grunde liegt, dadurch also angezeigt, dafs in der identischen Gleichung (1), zwischen den Coefficienten derselben, folgende Bedingungs-Gleichung besteht:

$$\tau'+v'+\varphi' = 0. \qquad (6)$$

Wenn die drei festen Puncte T, U und V gegeben sind, und wir die Gleichung des Schwerpunctes derselben kennen, so erhalten wir dadurch sogleich die vollständige Coordinaten-Bestimmung. Es sei, um dieſs nachzuweisen, die allgemeine Gleichung (3) die Gleichung des Schwerpunctes. Wir können diese Gleichung nach der eben eingeführten Bezeichnung, indem wir zugleich den Coefficienten τ, v und φ ihre frühere Bedeutung (44) lassen, auf folgende Weise schreiben:

$$\lambda\tau(t)+\mu v(u)+\nu\varphi(v) = 0,$$

und damit diese Gleichung mit der Gleichung (5) identisch werde, ergibt sich:

$$\lambda\tau = \mu v = \nu\varphi = const,$$

woraus sich, da wir λ, μ und ν als gegeben betrachten, τ, v und φ bestimmen lassen.

48. Wir wollen zunächst nun untersuchen, welche Coordinaten-Bestimmung insbesondere dem Falle entspricht, dafs die identische Gleichung (1), indem die drei Coefficienten τ', v' und φ' einander gleich gesetzt werden, in Beziehung auf die drei linearen Functionen t, u und v symmetrisch wird. Alsdann ist identisch:

$$t+u+v = c. \qquad (7)$$

Wir wollen irgend eine Richtung beliebig als die Richtung der festen Axe: $x = 0$ annehmen, und nach dieser Richtung von den drei Puncten T, U und V aus, die wir immer als gegeben betrachten, drei gerade Linien nach den gegenüberliegenden Seiten in dem von diesen Puncten gebildeten Dreiecke legen und diese geraden Linien durch TT', UU' und VV' bezeichnen. Alsdann ist bezüglich für die drei geraden Linien UV, VT und TU

$$\begin{array}{lll} u = 0, & v = 0, & t = \tau.TT' = c; \\ v = 0, & t = 0, & u = v.UU' = c; \\ t = 0, & u = 0, & v = \varphi.VV' = c. \end{array}$$

Hiernach ergeben sich sogleich, indem wir insbesondere auch noch $c = 1$ setzen, für τ, v und φ die reciproken Werthe der drei Linien-Längen TT', UU' und VV'. Wenn also irgend eine beliebige gerade Linie den eben gezogenen drei Parallel-Linien bezüglich in den Puncten t', u' und v' begegnet, so sagt die identische Gleichung (7) aus, dafs

$$\frac{Tt'}{TT'}+\frac{Uu'}{UU'}+\frac{Vv'}{VV'} = c.$$

49. Während von der einen Seite der Raum uns verbietet, in irgend ein Detail einzugehen, werden wir von der andern Seite aufgefordert, unserm Gegenstande vielseitige Gesichtspuncte abzugewinnen. Demnach wollen wir auch noch in die identische Gleichung (7) für t, u und v ihre Ausdrücke in m und n substituiren, wonach dieselbe in die nachstehenden drei Bedingungs-Gleichungen zerfällt:

$$\begin{array}{l} \tau+v+\varphi = 0, \\ a\tau+a'v+a''\varphi = 0, \\ b\tau+b'v+b''\varphi = 0. \end{array} \qquad (8)$$

In diesen Gleichungen bedeuten bekanntlich a, a', a'' und b, b', b'' die Werthe der gewöhnlichen Parallel-Coordinaten, x und y, der drei bezüglichen gegebenen Puncte, T,

U, V, bezogen auf die beiden festen geraden Linien, von welchen wir ursprünglich ausgegangen sind (42) und von denen wir, unbeschadet der Allgemeinheit, voraussetzen können, dafs sie auf einander senkrecht stehen. Denken wir uns hiernach — ich gebrauche, um kurz zu sein, die Ausdrücke der Statik, ohne sie geometrisch zu umschreiben — die drei Coefficienten τ, v und φ als drei Kräfte, die in den drei Puncten T, U und V nach paralleler Richtung, etwa senkrecht auf der Ebene der Figur wirkend, angebracht sind, so sagt die erste der vorstehenden Gleichungen aus, dafs diese drei Kräfte sich auf ein Paar gleicher und nach entgegengesetzter Richtung wirkender Kräfte reduciren lassen. Die zweite der Gleichungen (8) sagt aus, dafs, wenn wir uns das System der drei Puncte T, U und V um die Linie: $x = 0$ als eine feste Axe beweglich denken, keine Drehung um dieselbe erfolgt, und die in jenen Puncten angebrachten Kräfte also sich auf ein solches Kräftenpaar reduciren lassen, das in einer mit jener festen Axe parallelen Ebene wirkt. Die dritte jener Gleichungen endlich zeigt, dafs das Drehungs-Moment um die Linie $y = 0$, als eine feste Axe, die auf der frühern senkrecht steht, übrigens aber beliebig angenommen werden kann, der Constanten c gleich ist. Wenn die zweite Axe mit der ersten irgend einen Winkel ω bildet, so müssen wir b, b′ und b″ mit $\sin\omega$ multipliciren, damit diese Gröfsen kürzeste Abstände bedeuten: alsdann wird das bezügliche Drehungs-Moment gleich $c\sin\omega$.

50. Um diejenige identische Gleichung aufzustellen, welche ausdrückt, dafs t, u und v kürzeste Abstände der drei Puncte T, U und V von der jedesmaligen zu bestimmenden geraden Linie bedeuten, wollen wir von der Gleichung (1) wiederum ausgehen, indem wir dieselbe auf nachstehende Weise schreiben:

$$\tau'\tau t + v'vu + \varphi'\varphi v = c.$$

Alsdann bedeuten t, u und v diejenigen drei geraden Linien, welche, parallel mit der Axe: $x = 0$, nach der zu bestimmenden geraden Linie gezogen werden können, und dieselben Functionen bedeuten kürzeste Abstände, wenn wir $\tau = v = \varphi = \frac{1}{\sin(\omega - \vartheta)}$ setzen, und hierbei ϑ den constanten, ω den veränderlichen Winkel nennen, welche die Axe und die zu bestimmende gerade Linie bezüglich mit einer, der Richtung nach gegebenen, geraden Linie bilden. In dieser Voraussetzung kommt:

$$\tau' t + v' u + \varphi' v = c\sin(\omega - \vartheta). \qquad (9)$$

Zunächst besteht für diesen Fall die Bedingungs-Gleichung:

$$\tau' + v' + \varphi' = 0; \qquad (6)$$

dann aber können wir einerseits, mit Berücksichtigung der vorstehenden Gleichung, τ', v' und φ' willkührlich annehmen, und dann die beiden Constanten c und ϑ bestimmen. Wenn wir nemlich drei, auf die drei Puncte T, U und V wirkende, parallele Kräfte τ', v' und φ' auf irgend eine Weise zu einem einzigen Kräften-Paare zusammensetzen, so bestimmt die Lage der Ebene dieses Paares den Winkel ϑ, und c bedeutet die Summe der Momente der gegebenen Kräfte in Beziehung auf irgend eine gerade Linie in der Ebene der Figur, für welche $(\omega - \vartheta)$ gleich einem rechten Winkel ist. So können wir zum Beispiel auf der geraden Linie UV einen Punct T″ so bestimmen, dafs $v'.UT'' = -\varphi'.VT''$; alsdann hat, wenn wir TT′ ziehen, diese gerade Linie die durch den Winkel ϑ angezeigte Richtung, und überdiefs ist $\tau'.TT' = c$. Von der andern Seite können wir aber auch die Constanten c und ϑ von vorne herein annehmen, und darnach, mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung (6) die Constanten τ', v' und φ' bestimmen.

51. Die bisher durch τ, v und φ bezeichneten unbestimmten Constanten in der all-

gemeinen Coordinaten-Bestimmung können wir dadurch ersetzen, dafs wir noch irgend einen vierten Punct W, dessen Gleichung:

$$w \equiv \chi(m + a'''n + b''') = 0, \qquad (10)$$

sei, als gegeben betrachten und dann

$$\vartheta = \frac{u}{w} : \frac{t}{w}, \qquad \zeta = \frac{v}{w} : \frac{t}{w} \qquad (11)$$

setzen. Alsdann bestimmen sich jene Coefficienten und die Lage dieses Punctes gegenseitig auf lineare Weise. Die analytischen Erörterungen der 17. und 18. Nummer lassen sich unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen. An die Stelle der identischen Gleichung (1) tritt nun die folgende:

$$\tau' t + v' u + \varphi' v + \chi' w = 0, \qquad (12)$$

indem wir, der Symmetrie wegen $(-\chi')$ an die Stelle von c schreiben, und löset sich in die folgenden drei Bedingungs-Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} \tau'\tau + v'v + \varphi'\varphi + \chi'\chi &= 0, \\ a\tau'\tau + a'v'v + a''\varphi'\varphi + a'''\chi'\chi &= 0, \\ b\tau'\tau + b'v'v + b''\varphi'\varphi + b'''\chi'\chi &= 0. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen drücken aus — wir wollen uns wiederum der Sprache der Statik bedienen — dafs, wenn wir uns vier parallele Kräfte $\tau'\tau$, $v'v$, $\varphi'\varphi$ und $\chi'\chi$ bezüglich in den vier Puncten T, U, V und W angebracht denken, jede derselben der resultirenden aus den drei übrigen das Gleichgewicht hält, wonach also etwa der vierte Punct W der Angriffspunct derjenigen Kraft ist, welche als die resultirende aus den drei ersten Kräften, sich durch diese immer auf einzige Weise bestimmt. Wir erhalten also für W jedesmal einen vollkommen bestimmten Punct, wenn wir die vier Coefficienten der vorstehenden identischen Gleichung (12) als gegeben betrachten und dann die vier Coefficienten τ, v, φ und χ beliebig annehmen. —

52. Obgleich zwar zwischen linearen Linien- und Punct-Coordinaten, so lange wir die Bestimmung derselben in ihrer ganzen Allgemeinheit festhalten, eine vollständige Analogie stattfindet, so erzeugt doch der Umstand, „dafs eine gerade Linie, die unendlich weit gerückt ist, keine bestimmte Richtung mehr hat, und alle solche Linien für eine und dieselbe zu achten sind, während bei unendlich weit entfernten Puncten die Richtung, nach welcher sie unendlich weit liegen, zu unterscheiden bleibt," einen wesentlichen Unterschied, sobald unendlich weite Entfernungen in particulären Bestimmungsweisen auf ausgezeichnete Weise hervortreten.

53. Wenn wir die Voraussetzung machen, dafs in den allgemeinen Ausdrücken für ϑ und ζ die Function $\tau(m + a''n + b'')$ sich auf eine blofse Constante reducirt, so heifst dieſs voraussetzten, dafs der Punct T nach der Richtung der in der 42. Nummer durch $x = 0$ bezeichneten, Axe unendlich weit liegt. Alsdann kommt:

$$\vartheta = v(m + a'n + b') \equiv u, \qquad \zeta = \varphi(m + an + b) \equiv v. \qquad (1)$$

Die Coordinaten ϑ und ζ sind, nachdem die Richtung jener Axe einmal bestimmt ist, von sechs Constanten abhängig, und bilden, in Beziehung auf diese Richtung, eine abgesonderten Classe von Coordinaten. Die vorstehenden Gleichungen behalten ganz dieselbe Form, wenn wir statt m und n die beiden Coordinaten irgend einer andern hierher gehörigen, einer besondern Constanten-Annahme entsprechenden, Bestimmung nehmen. Die beiden Coordinaten eines Punctes sind hiernach „diejenigen beiden, mit constanten Coefficienten multiplicirten, Segmente, welche auf zwei festen, nach bestimmter Rich-

tung durch die beiden gegebenen Puncte, U und V, gehenden Parallelen, zwischen diesen Puncten und der zu bestimmenden geraden Linie liegen."

Um die ursprünglichen Coordinaten m und n aus den vorstehenden Gleichungen zu erhalten, müssen wir annehmen, dafs einer der beiden Puncte, U und V, ebenfalls unendlich weit liege, und zwar nach der Richtung der früher durch: $y = 0$, dargestellten Abscissen-Axe, während der andere dieser beiden Puncte in den Anfangspunct fällt. Es ist alsdann allgemein, auch wenn die zur Vermittelung der Construction angewandten Axen nicht auf einander senkrecht stehen, wie in der 42. Nummer angenommen wurde, indem wir die Winkel, welche die zu bestimmende gerade Linie bezüglich mit der Ordinaten- und Abscissen-Axe bildet, δ und γ nennen:

$$n = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}.$$

54. Wir können insbesondere auch annehmen, dafs die beiden Puncte U und V nach den Richtungen zweier geraden Linien $\{x = 0$ und $y = 0\}$, die sich in dem Puncte T schneiden, unendlich weit liegen, und erhalten alsdann, als einfachste Bestimmung:

$$\vartheta = \frac{1}{m}, \qquad \zeta = \frac{n}{m}.$$

Die beiden Coordinaten einer geraden Linie stellen sich hiernach als die, negativ genommenen, reciproken Werthe derjenigen beiden Segmente dar, welche diese gerade Linie von den Schenkeln eines gegebenen festen Winkels abschneidet.

55. Es sei schliefslich, um auch den Fall imaginärer Linien-Coordinaten zu betrachten,

$$u \equiv m + a'n + b', \qquad v \equiv m + an + b, \tag{1}$$

indem einerseits a und a', andrerseits b und b' zwar imaginär, doch überdiefs Wurzeln derselben quadratischen Gleichung sind. Wir können alsdann zwei reelle Functionen von m und n, die wir r und s nennen wollen, unmittelbar so bestimmen, dafs

$$u \equiv r + s\sqrt{-1}, \qquad v \equiv r - s\sqrt{-1}, \tag{2}$$

woraus wir erkennen, dafs wir, um die beiden Gleichungen:

$$u = 0, \qquad v = 0, \tag{3}$$

zugleich zu befriedigen, zugleich

$$r = 0, \qquad s = 0, \tag{4}$$

setzen können, wonach also die beiden durch (3) dargestellten imaginären Puncte immer auf einer reellen geraden Linie liegen, auf derjenigen nemlich, welche durch die beiden Puncte (4) geht. Wenn wir zwei neue Functionen p und q durch die in Beziehung auf m und n identischen Gleichungen:

$$r \equiv p + \alpha q, \qquad s \equiv q - \alpha p, \tag{5}$$

bestimmen, woraus rückwärts

$$p \equiv \frac{r - \alpha s}{1 + \alpha^2}, \qquad q \equiv \frac{s + \alpha r}{1 + \alpha^2}, \tag{6}$$

sich ergibt, so stellen die beiden Gleichungen:

$$p = 0, \qquad q = 0, \tag{7}$$

bei jeder neuen Annahme der willkührlichen Constanten α ein neues Puncten-Paar dar, welches auf derselben geraden Linie liegt.

Nach der vorstehenden Functionen-Bestimmung ergibt sich

$$u+v \equiv 2r \equiv 2(p+\alpha q), \tag{8}$$
$$uv \equiv r^2+s^2 \equiv (1+\alpha^2)(p^2+q^2). \tag{9}$$

In dem Falle, dafs die beiden Functionen u und v reell sind, bleiben es auch die vorstehenden Umwandlungen, sobald wir die Functionen s und q und die Constante α bezüglich mit $s\sqrt{-1}$, $q\sqrt{-1}$ und $\alpha\sqrt{-1}$ vertauschen.

56. Um die verschiedenen Puncten-Paare, die bei beliebiger Annahme der Constanten α durch die Gleichungen (7) oder

$$r-\alpha s = 0, \qquad s+\alpha r = 0, \tag{10}$$

indem wir m und n dieselbe Bedeutung als in der 42. Nummerr beilegen, dargestellt werden, zu bestimmen, können wir die zur Vermittelung der Construction dieser Coordinaten dienenden Axen: $x = 0$ und $y = 0$, zuvörderst so annehmen, dafs ihr Durchschnitt in die immer reelle Mitte zwischen den beiden Puncten (3) fällt; diefs setzt voraus, dafs $a+a' = 0$ und $b+b' = 0$, wonach die Gleichung $r \equiv m = 0$ den in jene Mitte fallenden Anfangspunct darstellt. Die Gleichung $s = 0$ stellt einen Punct dar, welcher nach der, durch die Gleichung: $(a'-a)n+(b'-b) = 0$ bestimmten Richtung unendlich weit liegt. Geben wir der Axe: $x = 0$ dieselbe Richtung, so kommt diefs darauf hinaus, $a' = a$ und also gleich Null zu setzen. Wir können also die beiden Puncte (3), bei gehöriger Axen-Annahme, immer durch die Gleichungen:

$$m-b = 0, \qquad m+b = 0,$$

darstellen; und, je nachdem diese Puncte reell oder imaginär sind, ist es auch b. Die Puncten-Paare (7) bestimmen sich auf diese Weise auf der, die beiden Puncte (3) verbindenden geraden Linie durch ihre Abstände von demjenigen festen Puncte, der die Mitte der letztgenannten bildet.

Indem wir, wie in der 31. Nummer, der Kürze wegen,

$$\frac{1-\alpha\sqrt{-1}}{1+\alpha\sqrt{-1}} \equiv \frac{1+\alpha'}{1-\alpha'} = \lambda$$

setzen, können wir die Puncten-Paare (7) auch durch folgende Gleichungen darstellen:

$$u+\lambda v = 0, \qquad u-\lambda v = 0, \tag{11}$$

das heifst, in Worten ausgedrückt, jedes dieser Paare bildet mit den beiden Puncten (3) vier harmonische Theilungspuncte. Diese Puncten-Paare bilden hiernach unter sich eine Involution, die wir, je nachdem die beiden festen Puncte (3) imaginär oder reell sind, als eine Involution von Puncten-Paaren der ersten, oder der zweiten Art, unterscheiden wollen. Den Punct: $r \equiv m = 0$ wollen wir den Mittelpunct der Involution nennen; er liegt in der Mitte der beiden Puncte (3), weil der zugehörige vierte harmonische Theilungspunct unendlich weit liegt.

57. Indem wir uns nun zu den Gleichungen (10) zurückwenden, in denen, bei den obigen Voraussetzungen, r in m und s in eine Constante, die wir x nennen wollen, und die dadurch bestimmt ist, dafs $-b = x\sqrt{-1}$, übergeht, können wir die verschiedenen Puncten-Paare einer Involution der ersten Art, indem wir nach einander für α alle möglichen Werthe nehmen, durch die folgenden Gleichungen darstellen:

$$m-\alpha x = 0, \qquad m+\frac{1}{\alpha}x = 0. \tag{12}$$

Die Abstände der beiden Puncte eines solchen Paares von dem Mittelpuncte der Involution sind αx und $\left(-\frac{x}{\alpha}\right)$. Sie liegen also zu beiden Seiten des Mittelpunctes. Das Product

ihrer Abstände von demselben ist, wie wir auch α annehmen mögen, gleich x^2, und also für alle Puncten-Paare der Involution constant. Ein ausgezeichneter Werth, den wir α beilegen können, ist (± 1); alsdann erhalten wir für das entsprechende Puncten-Paar:

$$m \mp x = 0, \qquad m \pm x = 0.$$

Die Entfernung der beiden Puncte ist alsdann gleich $2x$ und, wie man sogleich einsieht, ein Minimum. Durch dieses Minimum ist die Natur der Involution vollkommen bestimmt. Im Allgemeinen gibt es ein zwiefaches Paar, dessen beide Puncte einen gegebenen Abstand haben. Zwei solche Paare liegen nach entgegengesetzter Seite vom Mittelpuncte symmetrisch; um sie zu erhalten, brauchen wir nur die unbestimmte Constante α mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen. Setzen wir $\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$ an die Stelle von α, so vertauschen sich blofs die beiden Puncte desselben Paares.

In dem Falle einer Involution der zweiten Art, wo α in $\alpha\sqrt{-1}$ übergeht, wollen wir x, das alsdann ebenfalls imaginär wird, mit $x\sqrt{-1}$ vertauschen. Alsdann erhalten wir, statt der Gleichungen (12), die folgenden:

$$m + \alpha' x' = 0, \qquad m + \frac{1}{\alpha'} x' = 0, \tag{13}$$

um irgend ein beliebiges Puncten-Paar darzustellen. Wir bemerken sogleich, dafs die beiden Puncte jedes solchen Paares zu beiden Seiten des Mittelpunctes der Involution liegen, und das Product der Abstände dieser Puncte von dem Mittelpuncte wiederum constant und gleich (x'^2) ist. Es gibt hier aber kein Minimum mehr für den Abstand der Puncte desselben Paares; jedem gegebenen Abstande entsprechen zwei Paare. Wenn $\alpha' = \pm 1$, so kommt:

$$m \pm x' = 0, \qquad m \mp x' = 0,$$

und dann fallen die beiden Puncte des bezüglichen Paares in einen der beiden Puncte (3) zusammen. Der Abstand dieser beiden Puncte (3) von einander ist $(2x')$ und durch diesen Abstand ist die Natur der Involution vollkommen bestimmt.

58. Wir wollen die beiden Puncte irgend eines Paares (12) einer Involution erster Art durch Y und Y' bezeichnen, und voraussetzen, dafs, für $\alpha = 1$, diese beiden Puncte bezüglich mit den Puncten N und N' zusammenfallen, wonach also N und N' diejenigen Puncte desselben Paares der Involution sind, deren Abstand von einander ein Minimum ist. Hiernach ergeben sich sogleich die nachstehenden Distanz-Bestimmungen:

$$YN = -x\{\alpha - 1\}, \qquad Y'N' = x\left\{\frac{1}{\alpha} - 1\right\}, \qquad YN' = -x\{\alpha + 1\}, \qquad Y'N = x\left\{\frac{1}{\alpha} + 1\right\}$$

und hieraus folgt:

$$\frac{1}{YN} - \frac{1}{Y'N'} = \frac{1}{Y'N} - \frac{1}{YN'} = \frac{1}{x}.$$

Indem wir zugleich erwägen, dafs die beiden Puncte Y und Y' nothwendig auf derselben Seite eines der beiden festen Puncte N und N', und auf entgegengesetzten Seiten des andern liegen, so drückt die vorstehende Gleichung aus, dafs, „wenn wir jeden der beiden Puncte irgend eines beliebigen Paares der Involution mit einem derjenigen beiden zusammengehörigen Puncte, deren Abstand ein Minimum ist, zusammenstellen, was auf doppelte Weise geschehen kann, einmal die Summe, das andere Mal die Differenz der reciproken Werthe der jedesmaligen beiden Abstände constant und dem reciproken Werthe der Hälfte jenes Minimum gleich ist."

Wir

Wir wollen nun die beiden Puncte irgend eines Paares (13) einer Involution zweiter Art durch Z und Z' bezeichnen, und annehmen, dafs für $\alpha' = 1$ diese beiden Puncte in dem Puncte M, und für $\alpha' = -1$ in dem Puncte M' zusammenfallen, so dafs also die beiden Puncte M und M' durch die Gleichungen (3) dargestellt werden. Alsdann finden wir unmittelbar:

$$ZM = x'\{\alpha' - 1\}, \quad Z'M = x'\left\{\frac{1}{\alpha'} - 1\right\}, \quad ZM' = x'\{\alpha' + 1\}, \quad Z'M' = x'\left\{\frac{1}{\alpha'} + 1\right\},$$

und hieraus:

$$\frac{1}{ZM} + \frac{1}{Z'M} = \frac{1}{ZM'} + \frac{1}{Z'M'} = \frac{1}{x'}.$$

Wenn wir zugleich berücksichtigen, dafs der Punct M zwischen den beiden Puncten Z und Z' liegt, nicht aber der Punct M', so folgt, „dafs die Differenz der beiden Abstände der Puncte irgend eines Paares einer Involution von dem ersten der beiden Puncte (3), und die Summe der reciproken Werthe der Abstände irgend solcher zwei Puncte von dem zweiten der beiden Puncte (3), constant und dem reciproken Werthe des halben Abstandes dieser Puncte, in deren jedem die beiden Puncte eines Paares der Involution zusammenfallen, gleich ist."

59. Es finden zwischen den gegenseitigen Abständen von sechs Puncten, die eine Involution bilden, merkwürdige metrische Relationen Statt, die schon seit langer Zeit die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen haben. Eine solche Involution können wir, nach dem Vorhergehenden, durch folgende drei Paare von Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} &m \mp \alpha x = 0, \quad && m \mp \beta x = 0, \quad && m \mp \gamma x = 0; \\ &m + \frac{1}{\alpha}.x = 0, \quad && m + \frac{1}{\beta}.x = 0, \quad && m + \frac{1}{\gamma}.x = 0; \end{aligned}$$

und zwar ist die Involution von der ersten oder zweiten Art, je nachdem wir in den drei ersten dieser Gleichungen die obern oder untern Zeichen nehmen. α, β und γ bedeuten irgend drei Constante. Bezeichnen wir hiernach die den drei Gleichungen-Paaren entsprechenden Puncte durch V und U, V' und U', V'' und U'', so ergibt sich sogleich:

$$\frac{V''U}{V''U'} = \frac{1 \pm \alpha\gamma}{1 \pm \beta\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{V'U''}{V'U} = \frac{1 \pm \gamma\beta}{1 \pm \alpha\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{VU'}{VU''} = \frac{1 \pm \beta\alpha}{1 \pm \gamma\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\beta};$$

und hieraus, wenn wir zugleich auf die gegenseitige Lage der Puncte Rücksicht nehmen:

$$\frac{V''U \,.\, V'U'' \,.\, VU'}{U''V \,.\, U'V'' \,.\, UV'} = -1;$$

eine Gleichung, die auf gleiche Weise für jede Involution von drei Puncten-Paaren gilt, es mag diese von der ersten oder der zweiten Art sein. —

60. Wir wollen nun noch den beiden linearen Functionen u und v eine andere Form als in der 55. Nummer unterlegen, indem wir

$$u \equiv n + am + b, \qquad v \equiv n + a'm + b', \tag{14}$$

setzen, um an diese neue Form die Discussion derjenigen Fälle anknüpfen zu können, welche die frühere Form ausschliefst. Wenn wir insbesondere annehmen, dafs a' gleich Null sei, so müssen u und v nothwendig reell sein, wenn überhaupt die Form der identischen Gleichungen

$$u \equiv r + s\sqrt{-1}, \qquad v \equiv r - s\sqrt{-1},$$

und die auf ihr beruhende Functionen-Umwandlung, möglich sein soll. Von den beiden Puncten

$$u = 0, \qquad v = 0, \tag{15}$$

liegt, bei der gemachten Voraussetzung, der zweite nach der durch die Constante b' bestimmten Richtung unendlich weit. Die Puncten-Paare, welche durch die Gleichungen

$$p = 0, \qquad q = 0, \tag{16}$$

dargestellt werden, bestimmen eine Involution zweiter Art. Aber diese Involution ist von einer besondern Gattung; weil einer der beiden Puncte (15) unendlich weit liegt, bildet der andere die Mitte jedes Paares der Involution.

61. Wenn a und a' beide zugleich verschwinden, können u und v wiederum, sowohl reelle als imaginäre, Functionen darstellen. Dann liegen die Puncte (15) beide nach gegebenen Richtungen unendlich weit, und mit ihnen also auch die Involution, welche aus den Puncten-Paaren (16) besteht. Indem wir der Axe: $x = 0$, eine schickliche Richtung geben, und durch λ eine Constante bezeichnen, kommt:

$$r \equiv n, \qquad s \equiv \lambda,$$

und wir erhalten:

$$p \equiv \frac{n - \alpha\lambda}{1+\alpha^2}, \qquad q \equiv \frac{\alpha n + \lambda}{1+\alpha^2}.$$

Die Richtungen, nach welchen hin die Puncte jedes der Paare (16) unendlich weit liegen, können wir, indem wir der, zur Vermittelung der Construction der 42. Nummer angewandten Parallel-Coordinaten uns bedienen, durch die beiden geraden Linien:

$$y + \alpha\lambda x = 0, \qquad \alpha y - \lambda x = 0,$$

bestimmen, woraus folgt, dafs diese Richtungen für die verschiedenen unendlich weit liegenden Puncten-Paare einer Involution von Linien-Paaren entsprechen. Wenn wir also statt der Functionen u und v die Functionen p und q einführen, finden alle die geometrischen Relationen, die wir im ersten Paragraphen (31—40.) erörtert haben, ihre unmittelbare Anwendung. —

62. Zum Schlusse will ich nur noch eine Bemerkung, die nach der 38. Nummer keines Beweises mehr bedarf, hervorheben. Wenn wir, wie in der 55. Nummer,

$$u \equiv m + an + b, \qquad v \equiv m + a'n + b'$$

setzen (wobei indefs m und n die Bedeutung beliebiger Linien-Coordinaten haben können), so bezeichnen p und q neue lineare Functionen, welche, im Allgemeinen, die Form $\mu(m + an + b)$ haben. Wir können diesen Functionen indessen den Coefficienten μ nehmen, und erhalten, indem wir dieselben in dieser Voraussetzung zur Unterscheidung, umklammern, und durch χ irgend einen constanten Winkel darstellen, statt der Gleichungen (8) und (9) alsdann die nachstehenden:

$$u + v = 2\{[p]\cos^2\chi + [q]\sin^2\chi\},$$
$$uv = [p]^2\cos^2\chi + [q]^2\sin^2\chi.$$

§. 3.

Allgemeine Betrachtungen über Coordinaten-Bestimmung. Theorie der Transversalen. Verwandtschaft geometrischer Constructionen. Uebertragungs-Principe. Collineation. Reciprocität.

63. Die Betrachtungsweisen, auf welche ich in der vorliegenden Schrift eine systematische Darstellung der analytischen Geometrie zu gründen den Versuch gemacht habe,

umschliefsen alle in der neueren Zeit, von den verschiedenartigsten Standpuncten aus, unternommenen geometrischen Untersuchungen. Es ist nicht schwer, nachzuweisen, wo jede einzelne dieser Untersuchungen ihre Stelle oder wenigstens ihre Anknüpfungspuncte findet. Einigen blofsen Andeutungen hierüber ist dieser Paragraph bestimmt.

64. Zuvörderst tritt uns Carnot's schöne Theorie der Transversalen als ein Corollarium unserer allgemeinen Punct-Coordinaten-Bestimmung entgegen. Sie ergibt sich unmittelbar aus den Bemerkungen der 4. Nummer. Wenn nemlich

$$\varphi(y,x) = 0$$

die Gleichung einer Curve von einer beliebigen m. Ordnung in gewöhnlichen Parallel-Coordinaten ist und wir

$$q = \varphi(y,x)$$

setzen, so entspricht jedem gegebenen Puncte ein bestimmter Werth von q, und diesen können wir, nach der eben angezogenen Nummer, construiren, wenn wir durch den gegebenen Punct eine beliebige gerade Linie legen, und das Product derjenigen m Segmente, welche auf dieser geraden Linie zwischen dem gegebenen Puncte und den m Durchschnittspuncten mit der Curve liegen, bilden und mit einem solchen Coefficienten multipliciren, der für alle beliebigen gegebenen Puncte derselbe ist, aber, im Allgemeinen, mit der Richtung der durch den gegebenen Punct gehenden geraden Linie sich ändert, so dafs wir jeder gegebenen Richtung einen constanten Coefficienten als zugehörig betrachten können. Gerade entgegengesetzten Richtungen gehören gleiche Coefficienten an; diese müssen aber, je nachdem die Ordnung der Curve eine gerade oder ungerade ist, mit übereinstimmenden oder entgegengesetzten Vorzeichen behaftet werden. Nun wollen wir irgend ein gegebenes, in sich geschlossenes Polygon $O_1O_2O_3 \ldots O_{n-1}O_n$ von einer beliebigen Seitenzahl betrachten, und, nach den eben wieder ins Gedächtnifs zurückgerufenen Bemerkungen der 4. Nummer, diejenigen n Coefficienten, welche den Richtungen der n Polygon-Seiten O_1O_2, $O_2O_3, \ldots O_{n-1}O_n$, O_nO_1, wenn wir auf dem Umfange des Polygons von O_1 nach O_2, nach O_3 und so fort nach der Ordnung der Marken herum gehen, angehören, durch

$$\varkappa_1^2,\ \varkappa_2^3,\ \ldots\ \varkappa_{n-1}^n,\ \varkappa_n^1,$$

und diejenigen Constanten, welchen den Richtungen derselben Seiten, wenn wir gegen die Ordnung der Marken auf dem Umfange des Polygons herum gehen, durch

$$\varkappa_2^1,\ \varkappa_3^2,\ \ldots\ \varkappa_n^{n-1},\ \varkappa_1^n$$

bezeichnen. Wir wollen ferner das Product der m Segmente auf der ersten Polygon-Seite O_1O_2, von O_1 aus gerechnet, durch $[O_1Q_1^2]$, von O_2 aus gerechnet durch $[O_2Q_2^1]$, der entsprechenden Producte auf der zweiten Polygon-Seite O_2O_3 durch $[O_2Q_2^3]$ und $[O_3Q_3^2]$ und so fort, darstellen. Alsdann erhalten wir, wenn wir nach einander die einzelnen Winkelpuncte des gegebenen Polygons betrachten:

$$\begin{aligned}
\varkappa_1^n\ [O_1Q_1^n] &= \varkappa_1^2\ [O_1Q_1^2],\\
\varkappa_2^1\ [O_2Q_2^1] &= \varkappa_2^3\ [O_2Q_2^3],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varkappa_{n-1}^{n-2}[O_{n-1}Q_{n-1}^{n-2}] &= \varkappa_{n-1}^n[O_{n-1}Q_{n-1}^n],\\
\varkappa_n^{n-1}[O_n\ Q_n^{n-1}] &= \varkappa_n^1\ [O_nQ_n^1].
\end{aligned}$$

Wenn wir erwägen, dafs für jeden Werth der Marke g:

$$\varkappa_g^{g-1} = \pm\varkappa_{g-1}^g,$$

so bemerken wir auf der Stelle, dafs, wenn wir die vorstehenden n Gleichungen mit ein-

ander multipliciren, aus dem Resultate alle Coefficienten x ausfallen. Wir erhalten hiernach, wenn wir das Product der ersten Theile und der zweiten Theile dieser Gleichungen, indem wir von allen Coefficienten von vorne herein absehen, der Kürze halber, bezüglich durch $^{n}\Omega$ und Ω^{n} darstellen:

$$^{n}\Omega = \pm \Omega^{n}. \qquad (1)$$

Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dafs wir in dieser Gleichung, wenn die gegebene Curve von gerader Ordnung ist, immer das obere Zeichen nehmen müssen; wenn aber die Curve von ungerader Ordnung ist, entweder das obere oder untere Zeichen, je nachdem die Anzahl der Seiten des gegebenen Polygons eine gerade oder ungerade ist.

In Worten ausgedrückt heifst die Gleichung (1):

„Wenn irgend eine algebraische Curve und irgend ein in sich geschlossenes Polygon gegeben sind, so kann man, von einem Mittelpuncte des Polygons aus, den Umfang desselben auf doppelte Weise durchlaufen, bis man wiederum zu demjenigen Puncte anlangt, von welchem man ausgegangen ist, und kann beidesmal das Product aller Segmente bilden, die auf allen Polygon-Seiten zwischen denjenigen Winkelpuncten, von welchen ausgehend man diese Seiten durchläuft, und den Durchschnittspuncten derselben mit der gegebenen Curve liegen: die beiden Producte, welche man auf diese Weise erhält, sind einander gleich."

65. Wenn wir als einfaches Beispiel für das Polygon ein Dreieck und für die Curve eine gerade Linie nehmen, und die drei Puncte, in welchen die drei Seiten jenes Dreiecks O_1O_2, O_2O_3 und O_3O_1 von dieser geraden Linie geschnitten werden, A, B und C nennen, so gibt die Gleichung (1):

$$\frac{O_1A \,.\, O_2B \,.\, O_3C}{O_2A \,.\, O_3B \,.\, O_1C} = -1. \qquad (2)$$

Es ist klar, dafs in diesem Falle umgekehrt auch irgend drei Puncte A, B und C, in Beziehung auf welche die vorstehende Gleichung befriedigt wird, in gerader Linie liegen. Vertauschen wir einen dieser drei Puncte, etwa A, mit demjenigen A', welcher mit dem ursprünglichen und denjenigen beiden Winkelpuncten des Dreiecks O_1 und O_2, mit welchen dieser in gerader Linie liegt, als vierter harmonischer Theilungspunct zusammengehört, so behält der bezügliche Quotient $\frac{O_1A}{O_2A}$, indem er in $\frac{O_1A'}{O_2A'}$ übergeht, seinen ursprünglichen Werth, ändert aber sein Vorzeichen (14). Wenn wir B und C auf entsprechende Weise mit B' und C' vertauschen, so findet ein analoger Zeichenwechsel Statt. Die Gleichung (2) bleibt hiernach unverändert dieselbe, wenn wir zugleich irgend zwei der drei Puncte A, B und C bezüglich mit A', B' und C' vertauschen, so dafs also auch A, B' und C'; A', B und C'; A', B' und C in gerader Linie liegen. Wenn wir aber nur einen der drei Puncte A, B und C bezüglich mit A', B' und C' vertauschen, oder wenn die letztgenannten Puncte alle drei zugleich an die Stelle der ursprünglichen treten, so erhalten wir statt der vorstehenden Gleichung eine Gleichung mit verändertem Zeichen, zum Beispiel in dem zuletzt erwähnten Falle die folgende:

$$\frac{O_1A' \,.\, O_2B' \,.\, O_3C'}{O_2A' \,.\, O_3B' \,.\, O_1C'} = 1. \qquad (3)$$

Die drei Puncte A', B' und C' (so wie in den drei andern Fällen A', B und C; A, B' und C; A, B und C') sind aber drei solche, welche auf den drei Dreiecks-Seiten liegen und die Eigenschaft haben, dafs diejenigen drei geraden Linien, welche dieselben mit den drei gegenüberliegenden Winkelpuncten verbinden, in einem und demselben Puncte sich schnei-

den. Und umgekehrt zeigt auch die vorstehende Gleichung an, dafs die drei Puncte A', B' und C' nothwendig in der fraglichen Beziehung zu dem Dreiecke $O_1O_2O_3$ stehen.

Wenn wir als zweites Beispiel für die gegebene Curve einen Kegelschnitt nehmen, und die Durchnittspuncte desselben mit den Dreiecks-Seiten bezüglich durch A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 bezeichnen, so gibt die Gleichung (1):

$$\frac{O_1A_1 \cdot O_1A_2 \times O_2B_1 \cdot O_2B_2 \times O_3C_1 \cdot O_3C_2}{O_2A_1 \cdot O_2A_2 \times O_3B_1 \cdot O_3B_2 \times O_1C_1 \cdot O_1C_2} = 1. \qquad (4)$$

Da ein Kegelschnitt durch irgend fünf gegebene Puncte bestimmt ist, so folgt, dafs auch hier, umgekehrt, solche sechs Puncte, in Beziehung auf welche die vorstehende Gleichung Statt findet, auf dem Umfange eines und desselben Kegelschnittes liegen. Beiläufig bemerken wir, dafs, wenn drei der sechs gegebenen Puncte, etwa A_1, B_1 und C_1 eine solche Lage haben, dafs rücksichtlich derselben die Gleichung (3) befriedigt wird, dieselbe Gleichung auch für die drei übrigen Puncte A_2, B_2 und C_2 besteht.

66. Es versteht sich von selbst, dafs keine imaginären Durchschnittspuncte unberücksichtigt bleiben, und zusammenfallende nicht als einzelne gerechnet werden dürfen. Wenn in dem zuletzt erwähnten Falle alle Durchschnitte zu je zwei, oder überhaupt überall in gleicher Anzahl, auf den Seiten des Polygons zusammenfallen, so können wir die Fundamental-Gleichung durch Wurzel-Ausziehung vereinfachen.

Als erstes Beispiel wollen wir einen Kegelschnitt betrachten, welcher die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt. Um auf diese Annahme die Gleichung (4) anwendbar zu machen, brauchen wir blofs die Puncte A_2 und A_1, B_2 und B_1, C_2 und C_1 als dieselben zu betrachten, und erhalten alsdann, wenn wir zugleich die Quadrat-Wurzel ausziehen:

$$\frac{O_1A_1 \cdot O_2B_1 \cdot O_3C_1}{O_2A_1 \cdot O_3B_1 \cdot O_1C_1} = \pm 1.$$

In dieser Gleichung müssen wir, weil ein Kegelschnitt von einer geraden Linie nur in zwei Puncten geschnitten werden kann, das untere Zeichen verwerfen. Hiernach sehen wir, indem wir das obere Zeichen nehmen, „dafs diejenigen drei geraden Linien, welche von den drei Winkelpuncten eines einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecks nach den drei Berührungspuncten auf den gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, in demselben Puncte sich schneiden."

Nehmen wir als zweites Beispiel eine Curve dritter Ordnung, und für das gegebene Dreieck dasjenige, welches von den Tangenten in den drei Wendungspuncten, die wir A, B und C nennen wollen, gebildet wird, so geht, weil in diesem Falle jede Dreiecks-Seite die Curve in drei zusammenfallenden Puncten schneidet, die Fundamental-Gleichung, welche wir hier mit dem negativen Zeichen nehmen müssen, in eine solche über, aus welcher wir die dritte Wurzel ziehen können, und erhalten alsdann:

$$\frac{O_1A \cdot O_2B \cdot O_3C}{O_2A \cdot O_3B \cdot O_1C} = -1.$$

„Die drei Wendungspuncte einer Curve dritter Ordnung liegen also in gerader Linie."

67. Was diejenigen Durchschnittspuncte, die unendlich weit liegen, betrifft, so können wir ohne Weiteres von denselben ganz absehen, unbekümmert darum, ob aus dem Grunde, dafs es solche unendlich weit entfernten Durchschnittspuncte gibt, die Anzahl der eigentlichen Durchschnittspuncte mit jeder Polygon-Seite, oder ihrer Verlängerung, sich reducirt. Wenn wir, um uns hiervon zu überzeugen, annehmen, dafs auf irgend einer Polygon-Seite O_sO_{s+1} irgend ein Punct G liege, so kommt O_sG in Ω_n und $O_{s+1}G$ in $^n\Omega$

als Factor vor. Der Unterschied der absoluten Werthe dieser beiden Factoren, oder die Summe derselben, wenn wir die entgegengesetzten Vorzeichen derselben berücksichtigen, ist offenbar der Polygon-Seite $O_\varepsilon O_{\varepsilon+1}$ gleich, und ihr Quotient nähert sich, wenn nicht, gegen die Voraussetzung, die Polygon-Seite unendlich wird, immer mehr der, in Beziehung auf das Vorzeichen negativ zu nehmenden, Einheit, je weiter der Punct Q auf der Polygon-Seite sich entfernt. Hiernach können wir, wenn der Punct Q unendlich weit rückt, in unsrer Fundamental-Gleichung (1) die Factoren $O_\varepsilon G$ und $O_{\varepsilon+1}G$ beide zugleich auslassen, wenn wir blofs das Zeichen in derselben ändern; oder mit andern Worten, wir können, was die metrische Relation betrifft, vom Puncte G ganz abstrahiren. Für jeden neuen Punct, der auf irgend einer Polygon-Seite unendlich weit rückt, fällt ein neues Paar von Factoren aus der Gleichung (1) aus, und jedesmal tritt alsdann eine neue Zeichen-Aenderung ein.

Wenn wir beispielsweise eine Curve dritter Ordnung nehmen, und an die Stelle des gegebenen Polygons irgend ein Dreieck eintritt, dessen drei Seiten den Asymptoten der Curve parallel sind, so liegt auf jeder Dreiecks-Seite ein Punct unendlich weit, und jede schneidet die Curve, im engern Sinne, nur in zwei Puncten. Nennen wir diese Durchschnittspuncte A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2, so reducirt sich die Gleichung (1), in der wir ursprünglich, weil die Curve vom dritten Grade ist, das negative Vorzeichen nehmen müssen, bei dreimaliger Zeichen-Aenderung auf die Gleichung (4), und sagt hiernach aus, „dafs solche sechs Puncte, in welchen eine Curve dritter Ordnung, von irgend ihren drei Asymptoten parallelen geraden Linien geschnitten wird, auf einem Kegelschnitte liegen.“ Wenn insbesondere die Seiten des Dreiecks die Curve dritter Ordnung berühren, so erhalten wir nach einer, in der vorigen Nummer schon angewandten, Reductions-Weise aus der Gleichung (4) die Gleichung (5), in der wir, aus gleichem Grunde als früher, das obere Zeichen nehmen müssen. „Wenn man also ein Dreieck beschreibt, dessen Seiten den Asymptoten einer Curve dritter Ordnung parallel sind und die Curve berühren, so schneiden sich diejenigen drei geraden Linien, welche die Berührungspuncte mit den gegenüberliegenden Winkelpuncten des Dreiecks verbinden, in einem und demselben Puncte.“

Wenn man für das fragliche Dreieck dasjenige nimmt, welches von den Asymptoten selbst gebildet wird, so liegen auf jeder Seite desselben zwei Durchschnittspuncte unendlich weit. Bezeichnet man die drei übrig bleibenden Durchschnittspuncte durch A, B und C, so erhält man aus der ursprünglichen Gleichung, mit Hinweglassung von zweimal sechs Factoren und bei sechsmaliger Zeichen-Aenderuug, die Gleichung (2). „Die drei Durchschnittspuncte einer Curve dritter Ordnung mit ihren drei Asymptoten liegen in gerader Linie.“

Als zweites Beispiel wollen wir eine Hyperbel nehmen und für das Polygon ein Dreieck, dessen zwei Seiten O_1O_2 und O_1O_3 in die beiden Asymptoten derselben fallen, und dessen dritte Seite O_2O_3 dieselbe in irgend zwei Puncten B_1 und B_2 schneidet. Alsdann reducirt sich die Gleichung (4) auf:

$$O_2B_1 \cdot O_2B_2 = O_3B_1 \cdot O_3B_2,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$O_3B_1 = O_3B_2,$$

das heifst, „dafs auf jeder beliebigen Transversalen zwischen der Curve und ihren Asymptoten gleiche Segmente liegen.“

68. Es bleibt uns jetzt nur noch der Fall zu discutiren übrig, dafs die Winkelpuncte

des Polygons alle oder zum Theil in den Umfang der gegebenen Curve fallen. Alsdann stellt sich wiederum die Fundamental-Gleichung (1) unter unbestimmter Form dar, und zwar hier aus dem Grunde, dafs jeder Theil derselben verschwindet.

Wir wollen annehmen, dafs überhaupt irgend zwei in einem Puncte O_s zusammenstofsende Seiten des Polygons $O_{s-1}O_s$ und O_sO_{s+1} seien und die Curve in den beiden Puncten M und N schneiden, so dafs das Segment O_sM auf der ersten und das Segment O_sN auf der zweiten Seite der Gleichung (1), als Factor, vorkommt. Wenn wir die beiden Puncte M und N durch eine gerade Linie verbinden, so entsteht ein Dreieck MO_sN, und da in demselben das Verhältnifs der beiden Seiten O_sM und O_sN dem Verhältnifs der Sinus der gegenüberliegenden Winkel O_sNM und O_sMN gleich ist, können wir an die Stelle jener beiden Segmente diese beiden Sinus in die Fundamental-Gleichung (1) einführen. Wenn der Punct O_s auf den Umfang der Curve rückt, so tritt an die Stelle der geraden Linie MN die Tangente in diesem Puncte O_s, und an die Stelle der alsdann verschwindenden beiden Segmente O_sM und O_sN treten die Sinus derjenigen beiden Winkel, welche die beiden, in umgekehrter Ordnung genommenen, Polygon-Seiten O_sO_{s+1} und $O_{s-1}O_s$ mit jener Tangente, oder, was dasselbe heifst, mit der Curve selbst, im Puncte O_s bilden. Liegen insbesondere zwei auf einander folgende Winkel-Puncte des Polygons auf dem Umfange der Curve, so kommt diejenige Seite, welche diese Puncte verbindet, als Factor in beiden Theilen der Fundamental-Gleichung vor. Diesen Factor können wir also weglassen. Dasselbe gilt für je zwei neue auf einander folgende Winkelpuncte, welche in den Umfang der Curve fallen, so dafs, wenn das Polygon irgend ein n Eck ist und alle Ecken desselben in die Curve fallen, aus der Fundamental-Gleichung 2 n Factoren verschwinden.

Wir wollen uns hier mit einem einzigen Beispiele begnügen, indem wir annehmen, dafs die gegebene Curve nur von der zweiten Ordnung sei und alle Puncte des Polygons auf dem Umfange derselben liegen. Alsdann erhalten wir folgenden bemerkenswerthen Satz: „Wenn man in einen gegebenen Kegelschnitt irgend ein beliebiges, in sich geschlossenes Polygon $O_1O_2O_3 \ldots O_{n-1}O_n$ beschreibt, und diejenigen Winkel, welche die Seiten desselben O_1O_2, $O_2O_3 \ldots O_{n-1}O_n$, O_nO_1 in den Puncten O_1, $O_2 \ldots O_{n-1}$, O_n mit der Curve bilden,

$$\alpha^1,\ \alpha^2,\ \ldots\ \alpha^{n-1},\ \alpha^n$$

und diejenigen Winkel, welche dieselben Seiten in ihren andern Endpuncten O_2, $O_3 \ldots O_n$, O_1, mit der Curve bilden,

$$\alpha_2,\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n,\ \alpha_1$$

nennen, so ist:

$$\frac{\sin\alpha^1 \cdot \sin\alpha^2 \ldots \sin\alpha^{n-1} \cdot \sin\alpha^n}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_{n-1} \cdot \sin\alpha_n} = 1.$$

69. Die Theorie der Transversalen wurde zuerst von Carnot aufgestellt, und erhielt neuerdings, namentlich von Herrn Poncelet *), in Beziehung auf Anwendung Erweiterungen, die ihr Urheber nicht vermuthet zu haben scheint. Meine Absicht kann hier keine andere sein, als darauf hinzuweisen, in welcher nahen Beziehung diese Theorie zu

*) *Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques.* Mit dem Motto von Carnot: „*La théorie des transversales n'est, à proprement parler, que la théorie des coordonnées qui, au lieu de faire un angle, sont prises sur une même droite.*" Crelle's Journal, Bd. VIII.

unsern Betrachtungsweisen steht, und wie sie durch diese ihren natürlichen Platz erhält. Die Entwicklung dieser Theorie mit ihren Modificationen, wie ich sie oben gegeben und zum Behuf des Verständnisses durch Beispiele erläutert habe, scheint an Einfachheit und Uebersichtlichkeit nichts mehr zu wünschen übrig zu lassen. Gewifs wird jeder bei der ersten Bekanntschaft mit dem Satze, der diese Theorie enthält, von der Allgemeinheit und Eleganz desselben überrascht, und zwar in um so höherem Grade, als derselbe auch dann noch besteht, wenn an die Stelle der Curve irgend eine algebraische Oberfläche und an die Stelle des ebenen Polygons irgend ein in sich geschlossenes Polygon im Raume tritt *). Auch liefert derselbe eine grofse Menge geometrischer Resultate leicht und natürlich. Aber diese Resultate sind gerade diejenigen, welche sich eben so leicht und leichter nach mehreren andern Betrachtungsweisen und in den ihnen angepafsten Algorithmen ergeben; und ich möchte auf keine Weise diese Theorie als die Grundlage eines Systemes der Geometrie gelten lassen. Denn der Nerv derselben liegt eben darin, dafs der Satz, auf welchen sie sich gründet, immer fortbesteht, indem das Polygon, und insbesondere das Dreieck, auf alle mögliche Weise sich ändert, und hiernach nur ist eine gegebene Curve durch dieselbe characterisirt. Die Theorie der Transversalen liegt, um mich so auszudrücken, in der Beweglichkeit und Wandelbarkeit des Coordinaten-Systems, und deshalb kann ich sie nicht als eigentliche Coordinaten-Bestimmung, sondern nur als ein Corollarium derselben betrachten. —

70. Wir wollen uns nun zu der Betrachtung der Verwandtschaft zwischen geometrischen Sätzen und den verschiedenen Uebertragungs-Principien wenden. Der einfache und allgemeine Gedanke, der uns hierbei leiten wird, ist der folgende: „So wie wir, um einen vorliegenden geometrischen Satz zu beweisen, uns verschiedener Coordinaten-Bestimmungen bedienen können und dann eben so viele analytische Beweisführungen erhalten, so können wir auch den Symbolen irgend einer vorliegenden analytischen Beweisführung verschiedene Coordinaten-Bedeutung beilegen, und erhalten alsdann eben so viele geometrische Sätze. Bei diesem letztern Verfahren tritt an die Stelle des Gegebenen im Allgemeinen ein anderes Gegebenes, und das neue Resultat, zu dem wir gelangen, wenn wir dieselbe End-Gleichung in anderm Sinne deuten, steht mit dem frühern in einer solchen Beziehung, die einzig und allein von derjenigen Beziehung, in der die neue Bedeutung der analytischen Symbole zu der frühern steht, abhängt, so dafs jene Beziehung aus der Discussion von dieser sogleich und für alle Fälle sich ergibt.“ In den folgenden Nummern will ich in einige nähere Erörterungen hierüber eingehen, jedoch blofs in der Absicht, um die allgemeine Basis, auf welcher alle Uebertragungs-Principien beruhen, hinzustellen, und dann zweien dieser Principien, der Collineation und der Reciprocität, eine besondere Aufmerksamkeit schenken.

71. Wir wollen

$$\eta = \varphi(y,x), \qquad \xi = \psi(y,x),$$

setzen, und y und x mögen, damit wir an etwas Bestimmtem festhalten können, gewöhnliche Parallel-Coordinaten bedeuten. Gleichungen von dieser Form haben wir im ersten Paragraphen unter dem Gesichtspuncte discutirt, dafs, für einen gegebenen Punct, η und ξ be-

*) Der Beweis dieser Ausdehnung bleibt unverändert der frühere, weil die Bemerkungen der 4. Nummer auch für diesen Fall fortbestehen; was auf ganz analoge Weise sich ergibt, wenn wir, an die Stelle der beiden Coordinaten-Axen in der Ebene, drei Coordinaten-Axen im Raume setzen.

bestimmte Werthe erhalten, welche sich, wenn die demselben Puncte zugehörigen Coordinaten y und x gegeben sind, finden und wie diese geometrisch construiren lassen. Jetzt wollen wir dieselben Gleichungen aus einem ganz verschiedenen Gesichtspuncte betrachten. Wenn wir irgend zwei bestimmte Werthe b und a den beiden Coordinaten y und x und dieselben Werthe bezüglich den beiden neuen Coordinaten η und ξ beilegen, so erhalten wir zwei Puncte $\{y = b, x = a\}$ und $\{\eta = b, \xi = a\}$, die sich gegenseitig entsprechen, und die Art des sich Entsprechens zweier solchen Puncte wird in jedem vorliegenden Falle durch die beiden, durch φ und ψ angezeigten Functionen bestimmt. Eine gegebene Gleichung zwischen y und x stellt im Allgemeinen eine Curve dar, dieselbe Gleichung, wenn wir blofs η und ξ an die Stelle von y und x schreiben, stellt eine zweite Curve dar. Jedem Puncte der einen Curve entspricht, in der vorstehenden Bedeutung, ein Punct der andern; es entspricht die eine Curve der andern Curve.

Wir wollen zweitens von den folgenden beiden Gleichungen:

$$\vartheta = \varphi(w,v), \qquad \zeta = \psi(w,v),$$

ausgehen, die wir in dem zweiten Paragraphen aus dem Gesichtspunct discutirt haben, dafs, wenn wir für eine gegebene gerade Linie die Werthe ihrer beiden Coordinaten w und v kennen, sich für dieselbe gerade Linie die Werthe der Coordinaten ϑ und ζ geometrisch bestimmen lassen. Jetzt wollen wir irgend zwei bestimmte Werthe für w und v und dieselben Werthe für ϑ und ζ annehmen, und erhalten alsdann zwei bestimmte gerade Linien, die sich gegenseitig entsprechen, und die Art des Entsprechens hängt auch hier wiederum von den beiden, durch φ und ψ dargestellten Functionen ab. Eine und dieselbe Gleichung einerseits zwischen w und v und andrerseits zwischen ϑ und ζ stellt zwei verschiedene sich entsprechende Curven dar, in der Art, dafs jede Tangente der einen Curve, in der obigen Bedeutung, einer Tangente der andern Curve entspricht.

Wir wollen drittens die beiden Gleichungen:

$$\Phi(\eta, \xi, \vartheta, \zeta) = 0, \qquad \Psi(\eta, \xi, \vartheta, \zeta) = 0, \tag{3}$$

betrachten, woraus, einerseits, η und ξ als Functionen von ϑ und ζ und, andrerseits, diese letzten beiden Gröfsen als Functionen von jenen beiden ersten sich ergeben. η und ξ wollen wir wie bisher als Punct- und ϑ und ζ als Linien-Coordinaten betrachten. Wenn wir hiernach zwei bestimmte Werthe den beiden Punct-Coordinaten η und ξ und dieselben beiden Werthe den Linien-Coordinaten ϑ und ζ beilegen, so erhalten wir einerseits einen Punct und andrerseits eine gerade Linie: beide entsprechen sich gegenseitig, und die Art des Entsprechens wird auch hier durch die obigen Functionen bestimmt. Irgend zwei Gleichungen:

$$F(\eta, \xi) = 0, \qquad F(\vartheta, \zeta) = 0,$$

stellen zwei Curven dar, die sich entsprechen, und zwar in der Art, dafs jedem Puncte der ersten Curve eine Tangente der zweiten entspricht.

Es tritt uns also auf diese Weise eine dreifache Art des Entsprechens entgegen, erstens ein Entsprechen zwischen Punct und Punct, und zwischen geometrischen Oertern, in so fern wir uns dieselben durch die Bewegung eines Punctes beschrieben denken; zweitens zwischen gerader Linie und gerader Linie und zwischen zwei geometrischen Oertern, in so fern wir uns dieselben durch eine bezügliche gerade Linie umhüllt denken, und drittens endlich zwischen Punct und gerader Linie und zwischen zwei Curven, von welchen wir uns die eine durch einen Punct beschrieben und die andere von einer geraden Linie umhüllt vorstellen. Auf dieser dreifachen Art des Entsprechens beruhen die drei Haupt-Classen von Uebertragungs-Principien.

72. Wir können nach geometrischen Voraussetzungen über die in der vorigen Nummer eingeführten Functionen allgemeine Bestimmungen machen. Wir können zum Beispiel die Bedingung stellen, dafs jedem Puncte (y, x) nur ein einziger Punct (η, ξ) entspricht: diefs setzt blofs voraus, dafs in den Gleichungen (1) durch φ und ψ rationale Functionen dargestellt werden, damit wir nicht für dieselben beiden Werthe von y und x mehrfache Werthe von η und ξ erhalten. Bei dieser Voraussetzung kann umgekehrt jedem Puncte (η, ξ) noch jede beliebige Anzahl von Puncten (y, x) entsprechen. Fügen wir die neue Beschränkung hinzu, dafs zugleich auch nur ein einziger Punct (y, x) jedem Puncte (η, ξ) entspricht, so erhalten wir nach der allgemeinsten Bestimmung der Functionen φ und ψ:

$$\eta = \mu . \frac{y + ax + b}{y + a''x + b''}, \qquad \xi = \nu . \frac{y + a'x + b'}{y + a'''x + b'''}. \tag{4}$$

Durch Gleichungen von derselben Form lassen sich umgekehrt auch y und x durch η und ξ ausdrücken, eine Bemerkung, die *a priori* schon aus den geometrischen Voraussetzungen sich ergibt *).

Bei gleicher Functionen-Bestimmung gehen die Gleichungen (2) in die folgenden über:

$$\vartheta = \mu . \frac{w + av + b}{w + a''v + b''}, \qquad \zeta = \nu . \frac{w + a'v + b'}{w + a'''v + b'''}; \tag{5}$$

und enthalten ein Uebertragungs-Princip der zweiten Art, nach welchem zwei gerade Linien (ϑ, ζ) und (w, v) sich gegenseitig und auf einzige Weise entsprechen.

73. Wenn wir endlich die neue Voraussetzung machen, dafs zwischen zwei Constructionen die doppelte Beziehung Statt findet, dafs, einerseits, je zwei Puncte derselben und, andrerseits, je zwei gerade Linien derselben sich gegenseitig und auf einzige Weise entsprechen, so vereinigen sich die beiden eben erwähnten Uebertragungs-Principien in ein einziges, in dasjenige nemlich, welches sich auf diejenige geometrische Verwandtschaft bezieht, der Herr Möbius in seinem „barycentrischen Calcül" den Namen Collineation beigelegt hat. Für diesen Fall findet man, dafs die Form der Gleichungen (4) und (5), indem man einerseits die Bedingung aufsucht, dafs eine Gleichung des ersten Grades zwischen η und ξ eine gerade Linie, und andrerseits, dafs eine Gleichung des ersten Grades zwischen ϑ und ζ einen Punct darstellt, in folgende übergeht:

$$\eta = \mu . \frac{y + ax + b}{y + a''x + b''}, \qquad \xi = \nu . \frac{y + a'x + b'}{y + a''x + b''}; \tag{6}$$

$$\vartheta = \mu . \frac{w + av + b}{w + a''v + b''}, \qquad \zeta = \nu . \frac{w + a'v + b'}{w + a''v + b''}. \tag{7}$$

Durch jedes dieser beiden Gleichungen-Paare wird also die Verwandtschaft der Collineation ausgedrückt. Diese neuen Gleichungen unterscheiden sich von den entsprechenden frühern dadurch, dafs die Nenner in den beiden Gleichungen jedes Paares, welche früher irgend zwei beliebige lineare Functionen waren, nun identisch dieselben geworden sind;

*) Die Frage, „wann entspricht in zwei Figuren gegenseitig einem Puncte immer nur ein Punct" (eine Frage, die, ihrer Natur nach, übrigens keine rein geometrische ist, sondern sich lediglich auf algebraische Begriffs-Bestimmung gründet) stellten sich in neuester Zeit zwei Geometer, zuerst Herr Magnus, auf analytischem Wege (Crelle's Journal Bd. VIII, S. 51.), und dann Herr Steiner, auf nicht minder elegante Weise, indem er die bekannte Erzeugung des Hyperboloids, durch die Bewegung einer geraden Linie, welche in allen ihren Lagen drei gegebene und feste gerade Linien im Raume schneidet, zu Hülfe nahm, und gelangten beide zu demjenigen Uebertragungs-Principe, das ich früher schon (Crelle's Journal Bd. V, S. 9.) angezeigt hatte.

wonach, während die den Gleichungen (4) und (5) entsprechenden allgemeinern Verwandtschaften von zehn Constanten, die Verwandtschaft der Collineation nur von acht Constanten abhängt.

Wir bemerken, dafs die Gleichungen (6) und (7) eben dieselben sind, auf welche wir unsere allgemeine Bestimmung linearer Coordinaten in den beiden ersten Paragraphen basirt haben: schon der Begriff solcher Coordinaten schliefst also den Begriff der Collineations-Verwandtschaft ein. Jede Darstellungsweise der Geometrie, die auf Allgemeinheit Anspruch macht, mufs ihren eigenen Algorithmus haben, um diese Verwandtschaft auszudrücken. Für uns liegt er unmittelbar vor. Es ist jede geometrische Eigenschaft, deren Beweis in der allgemeinen linearen Coordinaten-Bestimmung, ohne dafs über die Constanten, von welchen sie abhängig ist, besondere Voraussetzungen gemacht werden, geführt worden ist, ihrer Art nach eine collineare.

Zwei andere Algorithmen sind noch mit Erfolg angewandt worden, um die Collineation darzustellen: erstens die Betrachtung der metrischen Relationen, und zweitens die perspectivische Projection. Wir müssen uns hier begnügen, diese blofs erwähnt zu haben, jene wollen wir andeutungsweise mit ein paar Worten berühren.

74. Wenn irgend eine Zusammenstellung von Gleichungen zwischen irgend zwei allgemeinen linearen Punct-Coordinaten, η und ξ, und durch dieselbe also irgend eine Figur, irgend eine Zusammenstellung geometrischer Oerter, gegeben ist, so können wir in allen gegebenen Gleichungen überall η und ξ mit zwei andern Coordinaten derselben Art, η' und ξ', vertauschen. Alsdann stellen die neuen Gleichungen eine zweite Figur dar, welche, der Definition zufolge, mit der ersten in der Verwandtschaft der Collineation steht. Wenn wir hiernach irgend eine Reihe von Puncten in der ersten Figur beliebig auswählen, und für dieselben etwa:

$$\eta = b_1, \quad \eta = b_2, \quad \eta = b_3, \quad \eta = b_4, \ldots \tag{1}$$

erhalten, so springt in die Augen, dafs, für die entsprechenden Puncte in der zweiten Figur,

$$\eta' = b_1, \quad \eta' = b_2, \quad \eta' = b_3, \quad \eta' = b_4, \ldots \tag{2}$$

sich ergibt, wobei in beiden Reihen von Gleichungen die auf dieselbe Weise bezeichneten b dieselben Constanten bedeuten. Wenn wir, ähnlich wie in der 7. Nummer, $\varkappa . \frac{q}{r}$ an die Stelle von η schreiben, und denjenigen Werthen, welche die linearen und ganzen Functionen q und r für die verschiedenen Puncte der ersten Figur erhalten, zur Unterscheidung die entsprechenden Marken beifügen, so kommt:

$$\varkappa . \frac{q_1}{r_1} = b_1, \quad \varkappa . \frac{q_2}{r_2} = b_2, \quad \varkappa . \frac{q_3}{r_3} = b_3, \quad \varkappa . \frac{q_4}{r_4} = b_4 \ldots . \tag{3}$$

So lange $\varkappa$ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet, können wir q und r als ganze und lineare Functionen von der Form $\mu(y + ax + b)$ und μ als gegeben betrachten. Insbesondere können wir also, zum Behuf geometrischer Deutung, die Functionen q und r construiren: als Perpendikel, welche von dem bezüglichen Puncte aus auf die beiden, durch die Gleichungen

$$q = 0, \qquad r = 0, \tag{4}$$

dargestellten geraden Linien gefällt werden — oder als Parallel-Coordinaten — oder als Segmente derjenigen geraden Linie, welche durch den bezüglichen Punct geht und eine gegebene Richtung hat, etwa der durch die beiden ersten Puncte der ersten Figur gehenden geraden Linie parallel ist — oder wir können endlich auch den willkührlichen Coef-

ficienten μ so annehmen, dafs zum Beispiel der Ausdruck $(q_1r_2 - q_2r_1)$ die Fläche desjenigen Dreiecks darstellt, dessen drei Winkelpuncte die beiden ersten Puncte der ersten Figur und der Durchschnitt der beiden geraden Linien (4) sind.

75. Wenn wir zuvörderst blofs die beiden ersten Puncte betrachten und zwischen den bezüglichen beiden der Gleichungen (3) den unbestimmten Coefficienten $\varkappa$ eliminiren, so kommt:

$$\frac{q_1}{r_1} : \frac{q_2}{r_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Die Form dieser Gleichung können wir unmittelbar auf die beiden entsprechenden Puncte der zweiten Figur übertragen, indem wir an die Stelle der beiden geraden Linien

$$q = 0, \quad r = 0, \quad \text{oder} \quad \eta = 0, \quad \eta = \infty,$$

die ihnen entsprechenden

$$q' = 0, \quad r' = 0, \quad \text{oder} \quad \eta' = 0, \quad \eta' = \infty,$$

setzen und erhalten alsdann, bei analoger Bezeichnung:

$$\frac{q'_1}{r'_1} : \frac{q'_2}{r'_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{q_1}{r_1} : \frac{q_2}{r_2}. \tag{5}$$

„Wenn man irgend zwei gerade Linien und zwei Puncte einer gegebenen Figur betrachtet, so kann man den Quotienten der kürzesten Abstände eines dieser Puncte von der einen jener geraden Linien und des andern Punctes von der andern geraden Linie bilden und dann wiederum den neuen Quotienten derjenigen beiden, welche sich auf diese Weise ergeben. Dieser neue Quotient bleibt alsdann constant, wie sich auch die gegebene Figur collinear umgestalten mag.“

„Wenn man irgend zwei gerade Linien und zwei Puncte einer gegebenen Figur nimmt, so kann man zwei solche Parallelogramme beschreiben, deren zwei anstofsende Seiten in die beiden geraden Linien fallen, und deren beide übrigen Seiten durch die beiden Puncte gehen, ohne sich in diesen Puncten zu schneiden: der Quotient dieser beiden Parallelogramme bleibt constant, wie sich auch die gegebene Figur collinear umgestalten mag.“

Legen wir durch die gegebenen beiden Puncte der ursprünglichen Figur, die wir M_1 und M_2 nennen wollen, eine gerade Linie, welche die beiden gegebenen geraden Linien (4) in den Puncten Q und R schneiden, so können wir für den constanten Ausdruck $\frac{b_1}{b_2}$ den folgenden nehmen:

$$\frac{M_1Q}{M_1R} : \frac{M_2Q}{M_2R}.$$

Hiernach ergibt sich eine metrische Relation zwischen den gegenseitigen Abständen von irgend vier Puncten, die in gerader Linie liegen, welche, bei jeder collinearen Umgestaltung, dieselbe bleibt. Herr Möbius hat den fraglichen Gegenstand unter diesem Gesichtspuncte betrachtet, und nennt den vorstehenden Ausdruck: „Doppelschnitts-Verhältnifs.“

„Ein Doppelschnitts-Verhältnifs bleibt, bei jeder collinearen Umgestaltung, constant.“

76. Aus den Gleichungen (3) erhalten wir ferner, indem wir vier Puncte der ursprünglichen Figur betrachten:

$$\varkappa \cdot \frac{q_1r_2 - q_2r_1}{r_1r_2} = b_1 - b_2, \qquad \varkappa \cdot \frac{q_3r_4 - q_4r_3}{r_3r_4} = b_3 - b_4,$$

$$\varkappa \cdot \frac{q_1r_3 - q_3r_1}{r_1r_3} = b_1 - b_3, \qquad \varkappa \cdot \frac{q_2r_4 - q_4r_2}{r_2r_4} = b_2 - b_4.$$

Wenn wir das Product der beiden ersten dieser vier Gleichungen durch das Product der beiden letzten dividiren, so verschwinden die Nenner der ersten Theile zugleich mit dem unbestimmten Coefficienten $\varkappa$, es kommt:

$$\frac{(q_1r_2 - q_2r_1)(q_3r_4 - r_4q_3)}{(q_1r_3 - q_3r_1)(q_2r_4 - q_4r_3)} = \frac{(b_1 - b_2)(b_3 - b_4)}{(q_1 - b_3)(b_2 - b_4)},$$

oder, indem wir, nach einer oben gemachten Bemerkung geometrisch deuten, und den Durchschnitt der beiden geraden Linien (4) A und die vier Puncte der ersten Figur B, C, D und E nennen:

$$\frac{\text{BAC}}{\text{BAD}} \cdot \frac{\text{DAE}}{\text{CAE}} = \frac{(b_1 - b_2)(b_3 - b_4)}{(b_1 - b_3)(b_2 - b_4)}.$$

„Wenn man irgend fünf Puncte einer gegebenen Figur betrachtet, so kann man einen beliebigen derselben (A) mit den vier übrigen B, C, D und E, und überdiefs die letztgenannten vier Puncte unter sich auf beliebige Weise zu einem Viereck (etwa BCED) verbinden, und erhält alsdann zwei Paare von Dreiecken mit gemeinschaftlichem Scheitel im Puncte A, welche zu ihren Basen die beiden Paare gegenüberliegender Seiten des Vierecks (einerseits BC und DE, andrerseits BD und CE) haben: das Verhältnifs des Productes der beiden Dreiecke des einen Paares zu dem Producte der beiden Dreiecke des andern bleibt, bei jeder collinearen Umgestaltung, constant."

Das Vorstehende enthält eine, zuerst von Herrn Möbius aufgestellte, constante metrische Relation der collinearen Verwandtschaft zwischen fünf beliebigen Puncten, während die frühere Relation sich auf vier Puncte derselben geraden Linie bezieht. Beide Relationen führen zu identischen Gleichungen, wenn zwei der bezüglichen Puncte zusammenfallen.

77. Zwei collineare Figuren sind auf vollständige und lineare Weise gegenseitig durch einander bestimmt, wenn vier Puncte der einen und vier Puncte der andern, die in festgestellter Aufeinanderfolge sich gegenseitig entsprechen, gegeben sind, vorausgesetzt jedoch, dafs unter den beidesmaligen vier Puncten nicht drei in gerader Linie liegen. Statt der beiden Gruppen von vier sich entsprechenden Puncten, können auch zwei Gruppen von vier sich entsprechenden geraden Linien gegeben sein. Es ist beides als gleichbedeutend anzusehen, denn, wenn wir die vier gegebenen Puncte jeder der beiden Gruppen auf analoge Weise zu einem Viereck verbinden, so ergeben sich zwei Gruppen von vier sich entsprechenden geraden Linien. Nach der 18. Nummer hängt die allgemeine Bestimmung der Punct-Coordinaten von vier gegebenen geraden Linien, und nach der 51. Nummer die allgemeine Bestimmung der Linien-Coordinaten von vier gegebenen Puncten auf lineare Weise ab. Wir können also, in Beziehung auf das Viereck der ersten Figur, die wir als ursprünglich gegeben betrachten wollen, einerseits die Coordinaten-Werthe jedes fünften Punctes und andrerseits die Coordinaten-Werthe jeder fünften geraden Linie bestimmen; und dann, in Beziehung auf das entsprechende Viereck der zweiten Figur, einerseits denjenigen Punct und andrerseits diejenige gerade Linie, welche bezüglich durch jene Coordinaten-Werthe gegeben sind, construiren. Auf diesem Wege finden wir also zu jedem gegebenen Puncte und jeder gegebenen geraden Linie der ersten Figur den entsprechenden Punct und die entsprechende gerade Linie, und somit die ganze entsprechende zweite Figur.

78. Wenn wir, wie bisher, die beiden Punct-Coordinaten irgend zweier Bestimmungen durch η und ξ, η' und ξ' darstellen, und diese Symbole im Allgemeinen also verän-

derliche Grösen bedeuten, die, auf gegebene Puncte bezogen, erst bestimmte Werthe erhalten, so hat man für je zwei sich entsprechende Puncte:

$$\eta = [\eta'], \qquad \xi = [\xi']. \tag{1}$$

Diese beiden Gleichungen enthalten die vollständige Definition der Collineations-Verwandtschaft. Sie zeigen zugleich, dafs diese Verwandtschaft von acht Constanten abhängt, weil wir durch eine solche Anzahl von unbestimmten Constanten η' und ξ' immer durch η und ξ ausdrücken können. Sie zeigen ferner, dafs eine Gruppe collinear verwandter Figuren in einer solchen gegenseitigen Beziehung stehen, dafs man alle diese Figuren erhalten kann, wenn irgend eine derselben gegeben ist; und dafs, wenn in einer Reihe von Figuren jede von diesen mit der auf sie folgenden collinear verwandt ist, je zwei beliebige derselben in der Verwandtschaft der Collineation stehen.

Wenn wir particuläre Voraussetzungen über die Bestimmung der Coordinaten η und ξ, η' und ξ' machen, so erhalten die Gleichungen (1) eine beschränktere Bedeutung, und drücken, wenn unsere Voraussetzungen sich gleichmäfsig auf beide Coordinaten-Paare erstrecken, eine engere Verwandtschaft zwischen Figuren, welche unter sich eine abgeschlossene Gruppe bilden, aus. Diese engere Verwandtschaft kann sich indefs auf gleiche Weise auf die Gestalt, die Dimension und die gegenseitige Lage der Figuren beziehen.

79. Eine engere Verwandtschaft wird hiernach zum Beispiel durch die nachstehenden beiden Gleichungen:

$$\frac{q}{r} = \left[\frac{q}{r'}\right], \qquad \frac{p}{r} = \left[\frac{p}{r'}\right], \tag{2}$$

ausgedrückt, deren Form dadurch characterisirt ist, dafs die Zähler in den allgemeinen Ausdrücken für die Coordinaten η und η', ξ und ξ' bezüglich dieselben linearen Functionen sind.

Es stellen die beiden Gleichungen:

$$\eta + A\xi + B = 0,$$
$$\eta' + A\xi' + B = 0,$$

überhaupt irgend zwei sich entsprechende gerade Linien dar, wenn wir für A und B irgend zwei constante Werthe annehmen. Bei unserer particulären Voraussetzung gehen diese Gleichungen in die folgenden über:

$$q + Ap + Br = 0, \tag{3}$$
$$q + Ap + Br' = 0,$$

und werden identisch, sobald B verschwindet. Es fallen also unendlich viele sich entsprechende gerade Linien zusammen, die alle durch denselben Punct, den Durchschnittspunct der durch die Gleichungen:

$$q = 0, \qquad p = 0, \tag{4}$$

dargestellten, beiden geraden Linien gehen.

Irgend zwei Paare sich entsprechender gerader Linien schneiden sich in zwei entsprechenden Puncten. Um also insbesondere diejenigen sich entsprechenden Puncte zweier Systeme, die auf einander fallen, zu erhalten, müssen wir Gleichungen-Paare wie die vorstehenden (3) mit einander verbinden. Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$r - r' = 0: \tag{5}$$

eine Gleichung, aus der alle Spur derjenigen Constanten, welche jedes Paar sich entsprechender gerader Linien particularisiren, verschwunden ist. Neben dem merkwürdigen

Puncte, der die Eigenschaft hat, dafs in jede durch denselben gehende gerade Linie zwei sich entsprechende gerade Linien der beiden Systeme zusammenfallen, gibt es also auch noch eine gerade Linie (5), welche die Eigenschaft hat, dafs in jeden Punct derselben zwei sich entsprechende Puncte der beiden Systeme zusammenfallen.

Herr Magnus hat zuerst gezeigt *), dafs je zwei collinear verwandte Figuren, im Allgemeinen, durch Fortrückung und Drehung einer derselben, in diejenige Verwandtschaft treten können, welche durch die Gleichungen (2) ausgedrückt wird. Er sagt, dafs die beiden collinearen Figuren alsdann zugleich eine collineare Lage haben, und nennt den Durchschnittspunct der beiden geraden Linien (4) Collineations-Centrum und die gerade Linie (5) Collineations-Axe.

80. Wir wollen ferner die Gleichungen (1) dadurch particularisiren, dafs wir

$$\frac{\varkappa q}{r} = \left[\frac{\varkappa' q}{r}\right], \qquad \frac{\pi p}{r} = \left[\frac{\pi' p}{r}\right], \tag{6}$$

setzen, indem wir, wie bisher, die ersten Theile dieser beiden Gleichungen auf die Puncte des einen und die zweiten Theile derselben auf die entsprechenden Puncte eines andern collinearen Systems beziehen. Die Form der vorstehenden Gleichungen ist so gewählt, dafs die in beiden Theilen derselben vorkommenden, linearen Functionen identisch dieselben sind, und also nur deshalb im Allgemeinen verschiedene Werthe erhalten, weil, im Allgemeinen, sich entsprechende Puncte nicht zusammenfallen. Zugleich aber bemerken wir, dafs in jede der drei geraden Linien:

$$r = 0, \qquad q = 0, \qquad p = 0, \tag{7}$$

sich entsprechende gerade Linien, und also in den Durchschnittspuncten je zweier derselben sich entsprechende Puncte zusammenfallen.

Bei schicklicher Functionen-Bestimmung können wir irgend zwei beliebige collineare Systeme durch die beiden Gleichungen (6) characterisiren; weil in je zwei solchen Systemen, welche gegenseitige Lage dieselben auch haben mögen, immer drei Paare sich entsprechender gerader Linien einander decken. Wir wollen, um diese Behauptung direct zu rechtfertigen, indem wir zu dem allgemeinen Falle der Gleichungen (1) oder

$$\frac{q}{r} = \left[\frac{q'}{r'}\right], \qquad \frac{p}{r} = \left[\frac{p'}{r'}\right]$$

*) Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie von L. J. Magnus. Berlin, 1833.

Der letzte Grund, auf welchem die Möglichkeit, geometrische Relationen durch Ausdrücke von bestimmter Form darzustellen, beruht, ist immer die Anzahl der Constanten, welche diese Ausdrücke enthalten. Was den vorliegenden Fall betrifft, so kommen in den Gleichungen (2) der 79. Nummer des Textes im Ganzen zehn Constante vor. Die Bestimmung zweier collinearer Systeme hängt, im Allgemeinen, von $2 . 8 = 16$ Constanten ab. Diese Anzahl von Constanten reducirt sich aber um $2 . 3 = 6$, wenn wir die Lage der beiden Systeme als eine willkührliche betrachten. Denn die Lage einer Figur überhaupt ist als gegeben zu betrachten, wenn die Lage eines bestimmten Punctes und einer durch denselben gehenden bestimmten geraden Linie der Figur gegeben ist, und hängt somit von drei linearen Constanten ab. Um einer gegebenen Figur eine gegebene Lage zu geben, können wir nemlich zuerst einen bestimmten Punct derselben mit einem gegebenen Puncte zur Deckung bringen, und dann um diesen Punct die Figur so drehen, dafs eine bestimmte, durch diesen Punct gehende, gerade Linie der Figur eine gegebene Richtung erhält; oder, wir können auch eine bestimmte gerade Linie der Figur mit einer gegebenen zur Deckung bringen, und dann die Figur, parallel mit sich selbst, nach der Richtung dieser geraden Linie, so verschieben, dafs ein bestimmter, der Figur angehöriger Punct auf dieser geraden Linie eine gegebene Lage erhält. Hiernach hängt also die allgemeine Bestimmung zweier collinearer Systeme, in so fern wir ihre Lage als eine willkührliche betrachten, nur noch von so vielen Constanten ab, als in den Gleichungen (2) vorkommen, nemlich von zehn.

zurückgehen, irgend zwei einander entsprechende gerade Linien durch die beiden Gleichungen:

$$q + Ap + Br = 0, \qquad (8)$$
$$q' + Ap' + Br' = 0,$$

darstellen. Wir können immer (27) die linearen Functionen, die auf das zweite System sich beziehen, vermittelst neun unbestimmter Coefficienten durch die drei linearen Functionen des ersten Systems auf folgende Weise ausdrücken:

$$q' \equiv aq + bp + cr, \quad p' \equiv a'q + b'p + c'r, \quad r' \equiv a''q + b''p + c''r;$$

und erhalten alsdann an die Stelle der zweiten der Gleichungen (8) die nachstehende:

$$(a + Aa' + Ba'')q + (b + Ab' + Bb'')p + (c + Ac' + Bc'')r = 0. \qquad (9)$$

Sollen also die beiden durch die Gleichungen (8) dargestellten geraden Linien zusammenfallen, so müssen folgende beide Bedingungs-Gleichungen befriedigt werden:

$$\frac{b + Ab' + Bb''}{a + Aa' + Ba''} = A,$$
$$\frac{c + Ac' + Bc''}{a + Aa' + Ba''} = B.$$

Nehmen wir, etwa aus der ersten dieser Gleichungen, den Werth von B, um ihn in die zweite derselben einzusetzen, so gelangen wir, um A zu bestimmen, zu einer Gleichung des dritten Grades. Für jeden der drei auf diese Weise sich ergebenden Werthe dieser Constanten gibt die zweite der vorstehenden Gleichungen auf lineare Weise den bezüglichen Werth von B; so dafs wir immer durch eine dreifache Bestimmung von A und B die beiden Gleichungen (8) identisch machen können. Es gibt also, in Uebereinstimmung mit der vorstehenden Behauptung, in je zwei collinearen Systemen immer drei Paare sich entsprechender und auf einander fallender geraden Linien. Eine dieser geraden Linien ist nothwendig reell, die beiden andern können imaginär sein, schneiden sich alsdann aber immer in einem reellen Puncte, so dafs also wenigstens ein Paar sich entsprechender reeller gerader Linien und ein Paar sich entsprechender reeller Puncte auf einander fallen.

Wir wollen diejenigen drei Puncte, in deren jedem zwei sich entsprechende Puncte zweier gegebenen collinearen Systeme, bei einer gegebenen gegenseitigen Lage derselben, zusammenfallen, Situations-Puncte und diejenigen drei geraden Linien, welche diese Puncte paarweise verbinden, und in deren jeder also zwei sich entsprechende gerade Linien zusammenfallen, Situations-Axen nennen.

Wenn das eine von zwei collinearen Systemen eine feste Lage behält, während das andere derselben sich fortbewegt, so verändert das von den drei Situations-Puncten gebildete Dreieck, im Allgemeinen, zugleich seine Gestalt und seine Lage. Es treten uns hierbei mehrfache interessante Fragen entgegen, in deren Beantwortung hier einzugehen der Raum verbietet.

81. Nur eine Beziehung kann ich nicht ganz unberührt lassen. Wenn irgend zwei collineare Systeme gegeben sind, so gibt es in jedem derselben eine merkwürdige vollkommen bestimmte gerade Linie, welche von der gegenseitigen Lage der beiden Systeme unabhängig ist. Eine gerade Linie, die unendlich weit rückt, verliert dadurch ihre bestimmte Richtung und steht zu jedem Systeme in einer solchen Beziehung, die sich auch dann nicht ändert, wenn dieses System um eine endliche Strecke verschoben und beliebig gedreht wird. Betrachtet man diese unendlich entfernte gerade Linie nach einander als jedem der beiden collinearen Systeme angehörig, so kann man in dem jedesmaligen andern Systeme die entsprechende gerade Linie bestimmen. Man erhält alsdann zwei solche

ge-

gerade Linien, von welchen jede die Eigenschaft hat, dafs irgend zweien geraden Linien des bezüglichen Systems, die auf derselben sich schneiden, zwei solche gerade Linien des andern Systems entsprechen, die parallel sind. Die so bestimmten beiden geraden Linien drehen sich, wenn die beiden Systeme sich drehen, zugleich mit diesen, und werden, wenn die beiden Systeme eine collineare Lage erhalten, mit der Collineations-Axe und also auch unter sich parallel.

82. Ein ausgezeichneter Fall, den wir besonders hervorheben müssen, ist derjenige, dafs die Nenner in den Ausdrücken für die Coordinaten der allgemeinen Bestimmung auf eine Constante sich reduciren. Wir können die Fundamental-Gleichungen (1), welche die allgemeine Collineations-Verwandtschaft ausdrücken, alsdann auf folgende Weise particularisiren:

$$\varkappa q = [\varkappa' q'], \qquad \pi p = [\pi' p'], \tag{1}$$

so dafs, wenn für eine Gruppe von Puncten eines Systems, M_1, M_2, M_3 . . .

$$\begin{aligned} \varkappa q_1 &= b_1, \quad \varkappa q_2 = b_2, \quad \varkappa q_3 = b_3, \ldots \\ \pi p_1 &= a_1, \quad \pi p_2 = a_2, \quad \pi p_3 = a_3, \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

indem wir, durch die den Functionen q und p beigefügten Marken, diejenigen besondern Werthe derselben unterscheiden, welche sich auf die verschiedenen Puncte beziehen: für die entsprechende Gruppe von Puncten des andern Systems, M'_1, M'_2, M'_3 . . .

$$\begin{aligned} \varkappa' q'_1 &= b_1, \quad \varkappa' q'_2 = b_2, \quad \varkappa' q'_3 = b_3, \ldots \\ \pi' p'_1 &= a_1, \quad \pi' p'_2 = a_2, \quad \pi' p'_3 = a_3, \ldots \end{aligned}$$

hervorgeht. Je zwei sich entsprechende gerade Linien der beiden Systeme können wir durch die nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varkappa q + A\pi p + B &= 0, \\ \varkappa' q' + A\pi' p' + B &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

darstellen, indem wir A und B, die irgend zwei Constante bedeuten, gehörig annehmen.

So lange wir $\varkappa$ und π als unbestimmte Coefficienten betrachten, können wir die Werthe der beiden Functionen q und p als gerade Linien construiren, welche von den bezüglichen Puncten aus, nach den beiden geraden Linien,

$$q = 0, \qquad p = 0, \tag{4}$$

unter irgend zwei constanten Winkeln gezogen werden. Die einfachste Function der Coordinaten-Werthe von Puncten des ersten Systems, die von jenen beiden Constanten unabhängig ist und also eine unmittelbare geometrische Deutung zuläfst, erhalten wir aus der Zusammenstellung etwa der beiden ersten der Gleichungen (2). Es ergibt sich nemlich aus derselben:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Wir sehen hieraus, „dafs der Quotient der Abstände irgend zweier Puncte einer gegebenen Figur von einer geraden Linie derselben, bei jeder affinen Umgestaltung, constant bleibt."

Wenn wir die Ausdrücke q_1 und q_2 auf derjenigen geraden Linie, welche die beiden bezüglichen Puncte M_1 und M_2 verbindet, und die gerade Linie: $q = 0$, in irgend einem Puncte Q schneidet, construiren, so kommt:

$$\frac{M_1 Q}{M_2 Q} = \frac{b_1}{b_2};$$

woraus hervorgeht, „dafs das Verhältnifs der beiden Abstände eines von irgend drei Punc-

ten derselben geraden Linie von den beiden andern, bei jeder affinen Umgestaltung, constant bleibt."

Wir erkennen den geometrischen Grund dieser Vereinfachung der metrischen Relationen der Collineation sogleich darin, dafs, indem die beiden Functionen, die wir früher durch r und r' bezeichnet haben, sich auf eine Constante reduciren, die bezüglichen, einander entsprechenden, geraden Linien: $r = 0$ und $r' = 0$, unendlich weit rücken, so dafs in allen affinen Systemen in unendlicher Entfernung sich entsprechende gerade Linien zusammenfallen. Zugleich knüpft sich hieran die Folgerung, dafs parallele gerade Linien, bei jeder affinen Umgestaltung, ihren Parallelismus behalten.

Wir erhalten ferner, wenn wir die drei sich entsprechenden Puncten-Paare M_1 und M'_1, M_2 und M'_2, M_3 und M'_3 zusammenstellen,

$$\left.\begin{matrix}\pi x\\ \pi' x'\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}p_1q_1 + p_2q_3 + p_3q_1 - q_1p_2 - q_2p_3 - q_3p_1\\ p'_1q'_2 + p'_2q'_3 + p'_3q'_1 - q'_1p'_2 - q'_2p'_3 - q'_3p'_1\end{matrix}\right\} = \{a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - b_1a_2 - b_2a_3 - b_3a_1\},$$

und hieraus, bei gehöriger Functionen-Bestimmung (74):

$$\frac{p_1q_2 + p_2q_3 + p_3q_1 - q_1p_2 - q_2p_3 - q_3p_1}{p'_1q'_2 + p'_2q'_3 + p'_3q'_1 - q'_1p'_2 - q'_2p'_3 - q'_3p'_1} = \frac{\Delta M_1M_2M_3}{\Delta M'_1M'_2M'_3} = \frac{\pi'x'}{\pi x}.$$

Da wir die vorstehenden Ausdrücke auf beliebig viele Puncte der beiden affinen Systeme ausdehnen können, so folgt, dafs überhaupt in zwei affinen Systemen das Verhältnifs zweier beliebigen, sich entsprechenden Flächenräume constant ist, oder auch, „dafs das Verhältnifs zweier Flächenräume derselben Figur zu einander, bei einer beliebigen affinen Umgestaltung dieser Figur, sich nicht ändert."

83. Es drücken die Gleichungen:

$$\varkappa q = [\varkappa' q], \qquad \pi p = [\pi' p], \tag{5}$$

die aus den Gleichungen (1), indem wir die Functionen q und q', p und p' als identisch dieselben nehmen, hervorgehen, eine engere Verwandtschaft aus, die, wenn wir die Functionen q und p von vorne herein beliebig annehmen, nur noch von zwei Constanten abhängt. Von einer andern Seite betrachtet, können wir aber auch die allgemeinen Gleichungen (1), welche überhaupt die Verwandtschaft der Affinität ausdrücken, wenn wir dieselben blofs auf zwei affine Systeme beziehen, immer, bei gehöriger Functionen-Bestimmung, auf die vorstehende particuläre Form bringen. Da in je zwei affinen Systemen nemlich ein Paar sich entsprechender gerader Linien in unendlicher Entfernung zusammenfällt, so können nach der 80. Nummer (indem wir die Affinität als eine Particularisation der Collineation betrachten) nur noch zwei andere solcher Linien-Paare sich decken. Diese sind entweder reell oder imaginär und mit ihnen die bezüglichen Functionen p und q; aber die Durchschnittspuncte der beiden Linien jedes Paares sind immer zwei reelle sich entsprechende Puncte, die zusammenfallen.

Wenn wir, ähnlich wie in der 80. Nummer, indem wir von den allgemeinen Gleichungen (1) ausgehen,

$$\varkappa' q' \equiv g\varkappa q + h\pi p + c, \qquad \pi' p' \equiv g'\varkappa q + h'\pi p + c', \tag{6}$$

setzen, so erhalten wir für irgend zwei sich entsprechende gerade Linien die beiden nachstehenden Gleichungen:

$$\varkappa q + A\pi p + B = 0,$$
$$(g + Ag')\varkappa q + (h + Ah')\pi p + (c + Ac' + B) = 0;$$

und wenn diese geraden Linien zusammenfallen sollen, mufs A und B so bestimmt werden, dafs

$$\frac{h + Ah'}{g + Ag'} = A, \qquad \frac{c + Ac' + B}{g + Ag'} = B.$$

Schon die erste dieser beiden Gleichungen allein gibt A, und für dasselbe einen zwiefachen Werth; dann erhalten wir aus der zweiten Gleichung zwei Werthe von B, die den beiden Werthen von A auf lineare Weise entsprechen und, übereinstimmend mit diesen, entweder reell oder imaginär sind. Es gibt also immer, der obigen Behauptung gemäfs, zwei Paare (reller oder imaginärer) gerader Linien je zweier affinen Systeme, die sich decken, und wenn wir diese durch das Gleichungen-Paar:

$$q = 0, \qquad p = 0,$$

darstellen, ergeben sich, um die Affinität der beiden Systeme auszudrücken, die vorstehenden Gleichungen (5). Die so bestimmten beiden geraden Linien wollen wir die Situations-Axen und ihren Durchschnittspunct den Situationspunct der beiden affinen Systeme nennen. (Die letzte Benennung hat Herr Magnus für einen besondern Fall der Affinität: die Aehnlichkeit, eingeführt.)

Es tritt uns hierbei sogleich eine erste Bemerkung entgegen. Wenn wir das eine der beiden affinen Systeme beliebig verschieben, jedoch so, dafs keine Drehung Statt findet, so wird diefs offenbar durch eine blofse Aenderung der beiden Constanten c und c' ausgedrückt, und hat also auf die Bestimmung von A durchaus keinen Einfluſs. Wir sehen hieraus, dafs, während der Situationspunct bei einer solchen Verschiebung irgend einen Weg beschreibt, die in demselben sich schneidenden Situations-Axen parallel mit sich selbst fortrücken.

84. Indem wir uns ferner nochmals zu dem allgemeinen Fall der Affinität zurückwenden, können wir, mit Rücksicht darauf, dafs $\varkappa$ und π, $\varkappa'$ und π' unbestimmte Coefficienten bedeuten, in den, diese Verwandtschaft characterisirenden, Gleichungen (1) q und p, q' und p' als Parallel-Coordinaten betrachten. Zur Unterscheidung wollen wir dieselben umklammern.

Wenn wir zugleich, der Kürze wegen, $\frac{\pi}{\varkappa} = a$, $\frac{\pi'}{\varkappa'} = a'$ setzen und durch α irgend eine beliebige Constante bezeichnen, erhalten wir:

$$(q) - \alpha a(p) = 0, \qquad \alpha(q) + a(p) = 0,$$
$$(q') - \alpha a'(p') = 0, \qquad \alpha(q') + a'(p') = 0,$$

als die Gleichungen zweier sich entsprechenden Linien-Paare zweier affinen Systeme. Wenn wir hiernach der Constanten α nach einander alle möglichen Werthe beilegen, erhalten wir zwei Involutionen von geraden Linien (erster Art), deren je zwei Paare, die von demselben Werthe von α abhängen, sich ensprechen. Zwei solche Linien-Paare sind namentlich diejenigen, welche den Werthen $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ entsprechen und durch die Gleichungen: $q = 0$ und $q' = 0$; $p = 0$ und $p' = 0$, dargestellt werden.

Betrachten wir nun insbesondere etwa die zweite Involution, so wird dieselbe, ihrer Natur nach, durch denjenigen Winkel, welchen die beiden geraden Linien: $q' = 0$ und $p' = 0$, einschliefsen, und durch die Constante a' vollkommen bestimmt, und ist also (so wie andrerseits die erste Involution) für je zwei affine Systeme, als unmittelbar durch die Gleichungen (1) gegeben, zu betrachten. Die Constante α, durch welche die einzelnen Paare der Involution sich unterscheiden, hängt von einer constanten Richtung ab; ändern wir diese constante Richtung so, dafs sie, nach einander, mit der Richtung jeder der beiden Linien desselben Paares zusammenfällt, so ändert sich, für dieses Paar, der Werth von α continuirlich zwischen den Gränzen Null und Unendlich. Statt aber jene constante Richtung zu ändern, können wir auch die zweite Involution, unabhängig von der ersten, um ihren Scheitel drehen; dann wird dasselbe Paar nach einander durch alle möglichen

Werthe von α bezeichnet, und irgend einem gegebenen Werthe von α entsprechen nach einander alle möglichen Paare der zweiten Involution. Hieraus sehen wir, ohne die Aenderung, welche die beiden Gleichungen (1), die die Affinität zweier Systeme ausdrücken, dadurch erleiden, dafs eines derselben um den Situationspunct sich dreht, analytisch zu discutiren, dafs, bei einer solchen Drehung, jedem Paare der Involution des ersten Systems nach einander jedes Paar der Involution des zweiten Systemes entspricht.

Wenn wir also in der vorigen Nummer nachgewiesen haben, dafs durch den Situationspunct zweier affinen Systeme immer solche zwei sich entsprechende gerade Linien gehen, die sich decken, so ist diefs, nach den vorstehenden Betrachtungsweisen, damit gleichbedeutend, zu zeigen, dafs, wenn irgend zwei Involutionen denselben Scheitel haben, im Allgemeinen die beiden Linien eines Paares der ersten die beiden Linien eines Paares der zweiten decken; was leicht direct zu beweisen ist *). Zugleich aber ergibt sich eine Reihe neuer Folgerungen (33, 34).

In jeder Involution gibt es ein einziges Paar, dessen beide Linien auf einander senkrecht stehen, und wenn zwei Involutionen denselben Scheitel haben, so können offenbar immer, durch eine schickliche Drehung einer derselben, diejenigen beiden Paare, deren Linien sich rechtwinklig schneiden, zur Deckung gebracht werden. Nehmen wir hiernach in einem zweier affinen Systeme einen Punct beliebig an, so können wir zuvörderst dieses System parallel mit sich selbst so verschieben, dafs dieser Punct der Situationspunct wird, und dann das System um diesen Punct so drehen, dafs die beiden Situations-Axen auf einander senkrecht stehen. Wir können also zwei affine Systeme immer in eine solche gegenseitige Lage bringen, dafs die Fundamental-Gleichungen (1), auch unter der Voraussetzung, dafs die beiden Situations-Axen:

$$q = 0, \qquad p = 0,$$

auf einander senkrecht stehen, die Form:

$$\varkappa(q) = [\varkappa'(q)], \qquad \pi p = [\pi'(p)], \tag{7}$$

annehmen, oder, indem wir a und a' in der frühern Bedeutung einführen, nachstehende Form:

$$\varkappa(q) = [\varkappa'(q)], \qquad a\varkappa(p) = [a'\varkappa'(p)]. \tag{8}$$

Die beiden Werthe von a und a' erreichen in dem vorliegenden Falle, dafs die beiden

---

*) Wenn die beiden Gleichungen-Paare:

$$u = 0, \qquad v = 0;$$
$$mu+nv = 0, \qquad m'u+n'v = 0,$$

sich auf irgend zwei Linien-Paare zweier Involutionen beziehen, so können wir, wenn γ und δ unbestimmte Coefficienten bedeuten, nach einander alle übrigen Linien-Paare der beiden Involutionen durch die nachstehenden Gleichungen darstellen (32):

$$u+\gamma v = 0, \qquad \gamma u - v = 0;$$
$$(mu+nv)+\delta(m'u+n'v) = 0, \qquad \delta(mu+nv)-(m'u+n'v) = 0.$$

Bestimmen wir die beiden Coefficienten γ und δ durch die Gleichungen:

$$\gamma = \frac{n+\delta n'}{m+\delta m'}, \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{n'-\delta n}{m'-\delta m},$$

so fallen die beiden bezüglichen Linien-Paare zusammen. Diese Bestimmung ist immer reell, denn aus den vorstehenden Gleichungen erhält man unmittelbar:

$$mm'(1-\delta^2)-(n^2-n'^2)\delta = nn'(1-\delta^2)-(n^2-n'^2)\delta,$$

und hieraus zwei reelle Werthe für δ, die sich, da ihr Product gleich ist (-1), auf dasselbe Paar der zweiten Involution beziehen.

Situations-Axen auf einander senkrecht stehen, ihr Maximum, der Abweichung von der Einheit. In jedem der beiden, durch zwei affine Systeme bestimmten Involutionen gibt es ferner ein Maximum der Abweichung der Durchschnitts-Winkel desselben Paares von einem rechten Winkel. Das kleinere der beiden, auf diese Weise sich ergebenden, Maxima ist zugleich das Maximum der Abweichung der Winkel, unter denen die Situations-Axen der beiden affinen Systeme, bei einer beliebigen Drehung, sich schneiden. Diesem Falle entspricht, dafs entweder $a = 1$ oder $a' = 1$.

Es kann insbesondere eine der beiden Involutionen nur aus Paaren von solchen geraden Linien, die auf einander senkrecht sind, bestehen. Die beiden Situations-Axen schneiden sich alsdann ebenfalls bei jeder gegenseitigen Lage der beiden affinen Systeme unter rechten Winkeln, und überdiefs behalten sie, bei einer beliebigen Drehung desjenigen Systems, auf welches jene Involution sich bezieht, um den Situationspunct, unverrückt dieselbe Lage. Die beiden Werthe der Constanten a und a' bleiben für alle Lagen der Systeme dieselben, und überdiefs einer von ihnen der Einheit gleich.

85. Ein ausgezeichneter Fall endlich ist derjenige, dafs die beiden Involutionen identisch dieselben sind; er wird dadurch angezeigt, dafs $a = a'$. Abweichend von dem allgemeinen Falle decken sich alsdann, im Allgemeinen, nicht irgend zwei Linien-Paare der beiden Involutionen, bei einer gehörigen Drehung indefs fallen zugleich alle sich entsprechenden Linien-Paare zusammen. Im vorliegenden besondern Falle erhält die Affinität den Namen der Aehnlichkeit, und die zuletzt angezeigte gegenseitige Lage zweier Systeme wird eine ähnliche Lage genannt. Endlich heifst noch der Situationspunct irgend zweier ähnlichen Systeme, nachdem man dieselben durch eine schickliche Drehung um denselben in eine ähnliche Lage gebracht hat, der Aehnlichkeitspunct der beiden Systeme. Jede durch diesen Punct gehende gerade Linie ist alsdann als eine Situations-Axe zu betrachten; in jede fallen zwei sich entsprechende gerade Linien der beiden Systeme zusammen. Wir bemerken zugleich, dafs zwei collineare und collinear liegende Systeme in zwei ähnliche und ähnlich liegende, und der Collineationspunct von jenen in den Aehnlichkeitspunct von diesen übergeht, wenn die Collineations-Axe unendlich weit rückt. Die Fundamental-Gleichungen der Affinität nehmen für den Fall der Aehnlichkeit, bei einer ähnlichen Lage, die nachstehende Form an:

$$\varkappa(q) = [\varkappa'(q)], \qquad a\varkappa(p) = [a\varkappa'(p)]. \tag{9}$$

Wenn wir in den Gleichungen (5), welche überhaupt die Verwandtschaft der Affinität zweier Systeme durch die Vermittelung der jedesmaligen beiden Situations-Axen ausdrücken, die Zeichen von $\varkappa'$ und π' ändern, so heifst dieſs das zweite System um einen Winkel von 180°, um den Situations-Punct drehen. Die beiden Situations-Axen bleiben hiernach dieselben, es wird blofs diejenige Richtung jeder dieser Axen, welche früher die positive war, nun die negative, und umgekehrt. In dem Falle, dafs die beiden Systeme zwei ähnliche sind und irgend eine beliebige Lage haben, können wir diese Lage auf zwiefache Weise durch eine Drehung eines der beiden Systeme um den jedesmaligen Situations-Punct in eine ähnliche verwandeln. Die beiden, sich auf diese Weise im Allgemeinen ergebenden, ähnlichen Lagen der beiden Systeme können wir durch Einführung eines doppelten Vorzeichens in den vorstehenden Gleichungen auf folgende Weise characterisiren:

$$\varkappa(q) = \pm[\varkappa'(q)], \qquad a\varkappa(p) = \pm[a\varkappa'(p)]. \tag{10}$$

Der doppelte Aehnlichkeitspunct, in welchen hiernach, bei schicklicher Drehung, der Si-

tuationspunct übergehen kann, steht auch in einer doppelten Beziehung zu den beiden Systemen. Es liegen entweder, auf jeder durch denselben gehenden geraden Linie, die beiden sich entsprechenden Puncte auf denselben, oder auf entgegengesetzten Seiten, in Beziehung auf diesen Punct. In dem ersten Falle unterscheiden wir den Aehnlichkeitspunct durch die Benennung eines äufsern, in dem zweiten Falle durch die eines innern. Wenn, was hier vorauszusetzen ist, $\varkappa$ und $\varkappa'$ beide negativ oder beide positiv sind, so ist der Aehnlichkeitspunct ein äufserer im Falle der obern, und ein innerer im Falle der untern Zeichen in den vorstehenden Gleichungen.

86. Endlich geht, wenn wir in den Gleichungen (7) der 84. Nummer $\varkappa = \varkappa'$ und zugleich $\pi = \pi'$ setzen, wonach sich:

$$\varkappa(q) = [\varkappa(q)], \qquad \pi(p) = [\pi(p)],$$

ergibt, die Affinität der beiden Systeme in Congruenz über.

Bei zwei congruenten Systemen kommt nur noch die gegenseitige Lage derselben in Betracht, und namentlich ob die beiden Systeme durch eine blofse Verschiebung und Drehung in ihrer gemeinschaftlichen Ebene zur Deckung gebracht werden können, oder ob hierzu überdiefs auch noch eine Umwendung, eine Drehung des einen Systems um irgend eine gerade Linie der gemeinschaftlichen Ebene, als eine feste Axe, erforderlich ist. In derjenigen Lage der beiden congruenten Systeme, auf die sich die voranstehenden Gleichungen beziehen, fallen je zwei einander entsprechende Puncte zusammen. Wenn wir voraussetzen, dafs die beiden willkührlichen Axen: $p = 0$ und $q = 0$, auf einander senkrecht stehen, und dann das zweite System durch eine Drehung um die Axe: $p = 0$, umwenden, so bleiben, nach der Umwendung, die Werthe von p und q offenbar dieselben, und blofs der Werth von p ändert sein Zeichen, wonach die Gleichungen der Congruenz in die folgenden sich verwandeln:

$$\varkappa(q) = [\varkappa(q)], \qquad \pi(p) = -[\pi(p)].$$

Wenn die beiden Axen nicht auf einander senkrecht stehen, so können wir uns die Umwendung durch eine Drehung des zweiten Systems, um diejenige gerade Linie, welche den von den beiden Axen gebildeten Winkel halbirt, hervorgebracht denken. Alsdann vertauschen sich durch die Umdrehung für das zweite System die Functionen p und q, und es kommt:

$$\varkappa(q) = [\varkappa(p)], \qquad \pi(p) = [\pi(q)]. -$$

Wenden wir von zwei ähnlichen Systemen, die überdiefs eine ähnliche Lage haben, das zweite durch eine Drehung um irgend eine beliebige der unendlich vielen durch den Aehnlichkeitspunct gehenden Situations-Axen um, so bleibt diese Axe offenbar auch nach der Umwendung eine Situations-Axe der beiden Systeme. Derselbe Fall tritt für diejenige Axe ein, welche auf dieser senkrecht steht, ungeachtet dafs, durch die Umdrehung, die positive Richtung derselben zur negativen und diese zu jener wird. Die Erklärung dieses Umstandes, so wie eines analogen in der vorigen Nummer, liegt darin, dafs einerseits jede Situations-Axe dadurch bestimmt ist, dafs sie, aufser durch den Situationspunct, auch noch durch zwei nach bestimmter Richtung in unendlicher Entfernung zusammenfallende, sich entsprechende Puncte geht, und dafs andrerseits für solche unendlich weit entfernte Puncte das Entgegengesetzte in der Richtung sich nicht mehr unterscheiden läfst. Der frühere Aehnlichkeitspunct wird nach der Umwendung ein blofser Situationspunct, in dem nur zwei, auf einander senkrechte, Situations-Axen sich schneiden. Wenn wir das umgewendete System, in seiner Ebene, um den Situationspunct um irgend einen beliebigen Winkel ω drehen, so erhält es dadurch gerade dieselbe Lage, als wenn wir es ursprünglich um eine andere Si-

tuations-Axe, um diejenige, welche mit der früheren den Winkel ω bildet, umgewendet hätten, so dafs also, in der umgewendeten Lage, die beiden Situations-Axen immer auf einander senkrecht bleiben, und sich, wenn wir das eine System um einen beliebigen Winkel um den Situationspunct drehen, eine Drehung nach derselben Richtung und um denselben Winkel erleiden. Da endlich bei einer parallelen Verschiebung der beiden Systeme nur der Situationspunct seine Lage, nicht aber die Situations-Axen ihre Richtung ändern (83), so ist klar, dafs, bei irgend einer beliebigen Lage zweier ähnlichen Systeme, nach der Umwendung, die beiden Situations-Axen immer reell sind und auf einander senkrecht stehen. Weil es ferner in einer ähnlichen Lage zweier ähnlichen Systeme unendlich viele Situations-Axen von allen möglichen Richtungen gibt, so sind auch je zwei entsprechende gerade Linien parallel. In einer beliebigen Lage, nach der Umwendung, bilden je zwei sich entsprechende gerade Linien mit jeder der Situations-Axen, zu beiden Seiten derselben, gleiche Winkel.

Nach der Umwendung, aber vor der parallelen Verschiebung des einen der obigen beiden ähnlichen Systeme, können wir, in der Annahme, dafs $q = 0$ und $p = 0$ die beiden auf einander senkrechten Situations-Axen darstellen, die Verwandtschaft der beiden Systeme durch die Gleichungen:

$$\varkappa(q) = \pm[\varkappa'(q)], \qquad a\varkappa(p) = \mp[a\varkappa'(p)], \tag{1}$$

ausdrücken, und wenn wir das zweite System alsdann parallel mit sich selbst verschieben, durch die neuen Gleichungen:

$$\varkappa(q) = \pm[\varkappa'(q)+c], \qquad a\varkappa(p) = \mp[a\varkappa'(p)+c'], \tag{2}$$

indem wir durch c und c' zwei unbestimmte Constanten bezeichnen. Um den jedesmaligen Situationspunct zu bestimmen, müssen wir die linearen Functionen auf beiden Seiten der vorstehenden Gleichungen auf denselben Punct beziehen. Wir sehen alsdann, dafs der Situationspunct nur in dem Falle, dafs $\varkappa = \varkappa'$, und also die beiden Systeme congruent sind, unendlich weit liegt, und zwar nach der Richtung der beiden Situations-Axen. Diefs findet also, im Allgemeinen, bei einer beliebigen Lage zweier congruenten Systeme, nach der Umwendung eines derselben, Statt. In Ausnahms-Fällen, wenn in den letzten Gleichungen c und c' beide verschwinden, oder auch, wenn, im Falle der obern Zeichen, auch blofs c, und im Falle der untern Zeichen, blofs c' verschwindet, gibt es unendlich viele Situationspuncte (91).

87. Ein besonderer Fall der Affinität, welcher vorzugsweise unsere Aufmerksamkeit verdient, und auf den zuerst Herr Möbius aufmerksam gemacht hat, ist die Verwandtschaft solcher zwei Figuren, in welchen irgend zwei, von einander entsprechenden geraden Linien eingeschlossene, Flächen-Räume gleichen Inhalt haben. Ehe wir hierüber in analytische Bestimmungen eingehen, möchte es zweckmäfsig sein, von vorn herein die Möglichkeit einer solchen Verwandtschaft und hiermit zugleich die Natur derselben geometrisch festzustellen. Wenn irgend ein Dreieck ABC gegeben ist, so können wir ein demselben gleiches Dreieck A'B'C' immer auch dann noch construiren, wenn wir zwei Winkelpuncte von diesem beliebig annehmen und überdiefs die Bestimmung machen, dafs der dritte Winkelpunct auf einer, ebenfalls beliebig angenommenen, geraden Linie liege. Dieser Winkelpunct selbst kann alsdann zwar noch ein zwiefacher sein, wird aber beidemale auf lineare Weise bestimmt; zugleich läfst sich, nachdem eine positive und negative Richtung beliebig festgesetzt ist, ein für alle Mal die eine Lage des Punctes von der andern unterscheiden. Hiernach wollen wir die Winkelpuncte des ersten Dreiecks den Winkelpuncten des zweiten Dreiecks der Ordnung nach

als entsprechend betrachten. Ist alsdann irgend ein vierter Punct D des ersten Systems gegeben, so können wir immer auf lineare Weise einen entsprechenden vierten Punct D' des zweiten Systems so bestimmen, dafs etwa $\Delta CBD = \Delta C'B'D'$ und zugleich $\Delta CAD = \Delta C'A'D'$, woraus alsdann sogleich sich ergibt, dafs auch die beiden Vierecke ACDB und A'C'D'B', so wie je zwei der durch die beiden Gruppen von vier Puncten bestimmten Flächen-Räume, gleichen Inhalt haben. Auf diese Weise können wir fortfahren, zu jedem neuen Puncte des ersten Systems den entsprechenden in dem zweiten zu bestimmen, und erhalten alsdann zwei solche Figuren, die in der verlangten Verwandtschaft stehen. Dafs diese Verwandtschaft zur Collineation gehört, folgt unmittelbar daraus, dafs, nach ihrer Definition, drei Puncte, die in gerader Linie liegen (und also ein Dreieck bilden, dessen Flächen-Inhalt verschwindet), nothwendig dreien andern eben solchen Puncten entsprechen; und weil bei der Umgestaltung eines Dreiecks, wenn dessen Inhalt unverändert derselbe bleiben soll, nicht ein Winkelpunct desselben unendlich weit rücken darf, so ist klar, dafs die fragliche Verwandtschaft insbesondere auch zur Verwandtschaft der Affinität gehört. Sie ist nach dem Vorstehenden blofs von fünf Constanten abhängig, während diese, im Allgemeinen, von sechs Constanten abhängt.

Um die Verwandtschaft der Gleichheit der Flächen-Räume analytisch auszudrücken, wollen wir wiederum, was uns, unbeschadet der Allgemeinheit, gestattet ist, voraussetzen, dafs in den Fundamental-Gleichungen der Affinität:

$$\varkappa(q) = [\varkappa'(q')], \qquad \pi(p) = [\pi'(p')],$$

die Functionen (q), (q'), (p) und (p') die Bedeutung gewöhnlicher Parallel-Coordinaten haben, und den Coordinaten-Winkel in dem ersten Systeme β und in dem zweiten Systeme β' nennen. Alsdann geht, wenn M_1, M_2, M_3 und M'_1, M'_2, M'_3 drei Paare sich entsprechender Puncte sind, die letzte Gleichung der 82. Nummer offenbar in die nachstehende über:

$$\frac{\Delta M_1 M_2 M_3}{\Delta M'_1 M'_2 M'_3} = \frac{\pi'\varkappa' \sin\beta'}{\pi\varkappa \sin\beta}.$$

Wenn also die Flächen-Räume der beiden Dreiecke einander gleich sein sollen, so mufs die nachstehende Bedingungs-Gleichung befriedigt werden:

$$\pi\varkappa \sin\beta = \pm\pi'\varkappa' \sin\beta', \qquad (1)$$

welche, indem wir a und a' in der frühern Bedeutung einführen, in die folgende übergeht:

$$a\varkappa^2 \sin\beta = \pm a'\varkappa'^2 \sin\beta'. \qquad (2)$$

Diese Gleichung reducirt sich, wenn die Functionen (q) und (q'), (p) und (p') dadurch, dafs wir sie auf die beiden Situations-Axen beziehen, identisch werden, wonach auch β' gleich β wird, auf die folgende:

$$\pi\varkappa = \pm\pi'\varkappa' \quad \text{oder} \quad a\varkappa^2 = \pm a'\varkappa'^2. - \qquad (3)$$

88. Es liegt uns jetzt noch ob, auch auf den zweiten Hauptfall, dafs die beiden Situations-Axen imaginär sind, Rücksicht zu nehmen. Wir können denselben unmittelbar auf den bisher discutirten zurückführen. Wenn wir nemlich die Affinität der beiden Systeme wiederum durch die beiden Gleichungen:

$$\varkappa(q) = [\varkappa'(q')], \qquad \pi(p) = [\pi'(p')],$$

ausdrücken und, wie in der 83. Nummer,

$$\varkappa'(q') \equiv g\varkappa(q) + h\pi(p) + c, \qquad \pi'(p') \equiv g'\varkappa'(q) + h'\pi(p) + c',$$

setzen, so sind die beiden Situations-Axen dann imaginär, wenn der Ausdruck:

$$4g'h+(g-h')^2 \qquad (1)$$

einen negativen Werth hat. Nehmen wir nun an, dafs die beiden geraden Linien des zweiten Systems: $q' = 0$ und $p' = 0$, was, unbeschadet der Allgemeinheit, gestattet ist, auf einander senkrecht stehen, und wenden dann das genannte System durch eine Drehung um die erste dieser beiden geraden Linien um, so wird, nach der Umwendung, die Verwandtschaft der beiden Systeme durch die folgenden Gleichungen:

$$\varkappa(q) = [\varkappa'(q')], \qquad \pi(p) = -[\pi'(p')],$$

ausgedrückt (86). Dem Ausdrucke (1) entspricht alsdann der nachstehende:

$$-4g'h+(g+h')^2,$$

und dieser ist nothwendig positiv, wenn jener negativ ist. Wenn also die beiden Situations-Axen vor der Umwendung des zweiten Systems imaginär waren, so sind sie nach der Umwendung nothwendig reell.

89. Zwischen den beiden Hauptfällen, dafs die beiden Situations-Axen reell und dafs sie imaginär sind, bildet der dritte Fall, dafs diese beiden Axen zusammenfallen, den Uebergang. Dieser dritte Fall wird dadurch angezeigt, dafs mit Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung der 83. Nummer:

$$4g'h+(g-h')^2 = 0. \qquad (1)$$

In diesem Falle können wir die Verwandtschaft der Affinität nicht mehr durch zwei Gleichungen von der Form:

$$\varkappa q = [\varkappa' q], \qquad \pi p = [\pi' p],$$

ausdrücken, während, in dem Falle der vorigen Nummer, diese Gleichungen, vor der Umwendung des einen Systems, sich blofs unter imaginärer Form darstellen. Diese Gleichungen sagen unmittelbar aus, dafs, aufser dem Situationspuncte, für welchen p und q zugleich verschwinden, es auch noch, in unendlicher Entfernung, zwei Puncte gibt, in welchen zwei Paare sich entsprechender Puncte der beiden Systeme zusammenfallen; denn es werden jene Gleichungen auch dann befriedigt, wenn wir, einerseits, $q = 0$ und zugleich $p = \infty$ und, andrerseits, $p = 0$ und zugleich $q = \infty$ setzen. Jeder dieser beiden Puncte ist als ein Situationspunct, der nach gegebener Richtung unendlich weit liegt, zu betrachten, und von jeder, einer der beiden Situations-Axen parallelen, geraden Linie kann man sagen, dafs sie durch einen solchen Situationspunct geht. In dem zuletzt discutirten Falle decken sich die beiden unendlich weit entfernten Situationspuncte, und aus diesem Grunde fallen alsdann auch die beiden Situations-Axen in eine einzige gerade Linie zusammen. Wenn wir in diesem Falle das eine der beiden Systeme beliebig verrücken und dann durch eine schickliche Drehung desselben um den jedesmaligen Situationspunct das Zusammenfallen der beiden Situations-Axen in eine einzige gerade Linie bewirken, so hat diese gerade Linie immer dieselbe Richtung (83). In der so bestimmten Lage der beiden Systeme erhalten wir, um ihre Verwandtschaft auszudrücken, die nachstehenden Gleichungen:

$$\varkappa q = [g\varkappa q+h\pi p], \qquad \pi p = [g\pi p], \qquad (2)$$

indem wir $g' = 0$ und hiernach, um die Bedingungs-Gleichung (1) zu befriedigen, $h' = g$ nehmen. Wir können, mit Rücksicht auf die Unbestimmtheit der beiden Coefficienten π und $\varkappa$, die Functionen p und q als Parallel-Coordinaten construiren und da wir für die gerade Linie: $q = 0$, jede beliebige, durch den Situationspunct gehende nehmen können, überdiefs auch noch die Voraussetzung machen, dafs, während die eine Coordinaten-Axe in die Situations-Axe fällt, die andere auf ihr senkrecht steht. Setzen wir hiernach:

$$g\varkappa q+h\pi p = g\varkappa.q',$$

so entspricht der Linie: $q = 0$, in dem zweiten Systeme die Linie $q' = 0$. Wenn endlich α den constanten Winkel bezeichnet, den diese Linie mit der Situations-Axe bildet, und wir dann $p^0 = \frac{p}{\sin\alpha}$ nehmen, so können wir auch q' und p^0 als Parallel-Coordinaten construiren. An die Stelle der beiden Gleichungen (15) treten, bei diesen Voraussetzungen, die nachstehenden:

$$\varkappa(q) = [g\varkappa(q')], \qquad \pi(p) = [g\pi\sin\alpha.(p^0)]. \tag{2}$$

Jede besondere Voraussetzung, die wir nun ferner noch über die Constanten in den letzten beiden Gleichungen machen, bestimmt einen engern Grad der schon particularisirten Affinitäts-Verwandtschaft. Wenn wir namentlich erstens g der Einheit gleich setzen, so zeigen die demnach particularisirten Gleichungen, dafs alsdann irgend zwei sich entsprechende Puncte der beiden Systeme auf einer, der Situations-Axe parallelen, geraden Linie liegen, und dafs die Entfernung je zweier sich entsprechenden Puncte, die auf derselben Parallelen liegen, constant ist. Wenn wir zweitens $\sin\alpha = 1$ setzen, so wird $q \equiv q'$ und $p \equiv p^0$, wonach die vorstehenden Gleichungen ausdrücken, dafs die Systeme einander ähnlich sind.

90. Wir haben in den vorstehenden Nummern überall stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dafs wenigstens ein Situationspunct der beiden verwandten Systeme nicht unendlich weit liege. Wir wollen nun diesen Ausnahmsfall näher ins Auge fassen, und zu diesem Ende, der 83. Nummer gemäfs, die Fundamental-Gleichungen der Affinität auf folgende Weise schreiben:

$$\varkappa q = [g\varkappa q + h\pi p + c], \qquad \pi p = [g'\varkappa q + h'\pi p + c'].$$

Für solche sich entsprechende Puncte, welche zugleich sich decken, erhält auf beiden Seiten der vorstehenden beiden Gleichungen p sowohl als q denselben Werth. Hiernach stellt jede dieser Gleichungen, wenn wir p und q als veränderlich betrachten, eine gerade Linie dar, und durch den Durchschnitt der beiden, auf diese Weise sich ergebenden, geraden Linien bestimmt sich der jedesmalige Situationspunct. Dieser liegt unendlich weit, wenn die beiden geraden Linien parallel sind, ein Fall, der analytisch durch die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{g-1}{g'} = \frac{h}{h'-1} \tag{1}$$

angezeigt wird. Zugleich aber sehen wir, dafs, wenn die fraglichen beiden geraden Linien zusammenfallen, es unendlich viele Situationspuncte gibt, weil alsdann in jeden beliebigen Punct dieser geraden Linien zwei sich entsprechende Puncte der beiden Systeme zusammenfallen. Dieſs geschieht in dem Falle, dafs

$$\frac{g-1}{g'} = \frac{h}{h'-1} = \frac{c}{c'}.$$

Es ergibt sich aus diesen Betrachtungen zuvörderst, dafs in dem Falle, wo der Situationspunct unendlich weit liegt, man, durch eine schickliche parallele Verschiebung des einen der beiden Systeme, unendlich viele sich entsprechende Puncte der beiden Systeme zur Deckung bringen kann. Eine solche Lage wird insbesondere dadurch angezeigt, dafs, während die Bedingungs-Gleichung (1) besteht, c und c' verschwinden.

91. Um die Gleichungen (1) zu befriedigen, können wir $g = 1$ und $g' = 0$ setzen, woraus alsdann, um die fragliche Verwandtschaft auszudrücken, hervorgeht:

$$\varkappa q = [\varkappa q + h\pi p], \qquad \varkappa p = [h'\pi p]. \tag{2}$$

Aus der Form dieser Gleichungen leuchtet sogleich hervor, dafs wir, um denselben Ge-

nüge zu leisten, so lange nur p verschwindet, der Function q einen willkührlichen Werth beilegen können. Jeder Punct der geraden Linie, welche durch die Gleichung:

$$p = 0,$$

dargestellt wird, ist mithin als ein Situationspunct der beiden Systeme anzusehen.

Wir können die obigen beiden Gleichungen (2) noch vereinfachen, indem wir, ähnlich wie in der vorigen Nummer, eine neue Function q' durch die Gleichung:

$$\varkappa q + h\pi p = \varkappa q'$$

einführen und π' statt $h'\pi$ schreiben. Alsdann kommt:

$$\varkappa q = [\varkappa q'], \qquad \pi p = [\pi' p]. \tag{3}$$

In diesen Gleichungen bedeuten q und q', bezogen auf die verschiedenen Puncte der beiden Systeme, solche Segmente, welche auf geraden Linien, die der Axe: $p = 0$, parallel sind, zwischen jenen Puncten und den beiden geraden Linien: $q = 0$ und $q' = 0$ liegen, construirt werden können, und bei gehöriger Bestimmung der unbestimmten Constanten $\varkappa$, construirt werden müssen.

Die neue besondere Art der Affinitäts-Verwandtschaft, welche durch die letzten beiden Gleichungen ausgedrückt wird, wollen wir Projectivität, die gerade Linie: $p = 0$, Projectivitäts-Axe, und eine solche Lage der beiden Systeme, auf welche sich die Form der ebengenannten Gleichungen bezieht, und bei welcher unendlich viele sich entsprechende Puncte zusammenfallen, eine projective Lage nennen.

Die Annahme einer der beiden linearen Functionen q und q' in den letzten Gleichungen hängt, so lange wir nur zwei projective Systeme betrachten, ganz von unserer Willkühr ab: wir können dieselbe immer und auf einzige Weise auch so bestimmen, dafs beide Functionen identisch werden. Denn durch jeden beliebigen Punct der Projectivitäts-Axe geht, aufser dieser Axe, noch eine zweite vollkommen bestimmte gerade Linie, in welcher zwei einander entsprechende gerade Linien der beiden Systeme zusammenfallen. Um dieſs zu zeigen, brauchen wir blofs, indem wir zu den Gleichungen (2) zurückgehen, nachzuweisen, dafs die beiden Gleichungen:

$$\varkappa q + A\pi p = 0, \qquad \varkappa q + h\pi p + Ah'\pi p = 0,$$

durch schickliche Bestimmung der unbestimmten Constanten A, identisch werden können, und dieſs findet wirklich Statt, wenn

$$A = -\frac{h}{h'-1}.$$

Wir können hiernach, unbeschadet der Allgemeinheit, die Verwandtschaft der Projectivität auch durch die nachstehenden Gleichungen ausdrücken:

$$\varkappa(q) = [\varkappa(q)], \qquad \pi(p) = [\pi'(p)], \tag{4}$$

indem wir zugleich die beiden Functionen (q) und (p) als Parallel-Coordinaten construiren. Man sieht, dafs je zwei sich entsprechende Puncte der beiden Systeme auf irgend einer geraden Linie liegen, die der Linie: $q = 0$, parallel ist, und dafs es mithin unendlich viele gerade Linien gibt, in deren jede zwei einander entsprechende gerade Linien der beiden Systeme zusammenfallen. Während in dem Falle ähnlicher und ähnlich liegender Systeme, wo es ebenfalls unendlich viele solcher Linien gibt, diese in demselben Puncte sich schneiden, sind dieselben im vorliegenden Falle parallel.

Wenn wir das eine von zwei projectiven Systemen parallel mit sich selbst nach der Richtung der Projectivitäts-Axe verschieben, so ist offenbar, dafs nicht irgend zwei sich entsprechende Puncte der beiden Systeme in endlicher Entfernung noch zusammenfallen können. Verschieben wir aber das System parallel mit sich selbst nach der Richtung der

geraden Linie: $q = 0$, so gibt es im Allgemeinen eine neue, der ursprünglichen parallele, Projectivitäts-Axe, in deren jedem Puncte zwei einander entsprechende Puncte zusammenfallen. Während nemlich, um in der neuen gegenseitigen Lage die Beziehung der beiden Systeme zu einander auszudrücken, die ersten der letzten Gleichungen (4) identisch dieselbe bleibt, geht die andere derselben in eine Gleichung von der Form:

$$\pi(p) = [\pi'\{(p) + \varkappa\}],$$

über, wenn wir durch $\varkappa$ irgend eine unbestimmte Constante bezeichnen. Wenn wir in dieser Gleichung der linearen Function p auf beiden Seiten gleiche Werthe beilegen und als veränderlich betrachten, so stellt dieselbe die neue Projectivitäts-Axe dar. Für dieselbe ergibt sich also:

$$(p) = -\frac{\pi'\varkappa}{\pi' - \pi}.$$

Also nur in dem Ausnahmsfalle, dafs $\pi' = \pi$, wo alsdann die Verwandtschaft der Projectivität in Congruenz übergeht, wird der Werth von (p) unendlich, und folglich rückt alsdann die Projectivitäts-Axe unendlich weit.

Wir ziehen aus dem Vorstehenden den Schlufs, dafs zwei projective Systeme, die eine projective Lage haben, eine solche Lage behalten, wenn wir sie nach einer vollkommen bestimmten Richtung parallel mit sich selbst verschieben, und dafs nach jeder andern parallelen Verschiebung es, aufser dem Situationspuncte, der unendlich weit liegt, nicht mehr irgend zwei einander entsprechende und zugleich zusammenfallende Puncte der beiden Systeme gibt. In dem Falle zweier congruenten Systeme, ist wenn dieselben so liegen, dafs sie sich decken, jeder Punct als ein Situationspunct, jede gerade Linie als eine Projectivitäts-Axe anzusehen; bei irgend einer parallelen Verschiebung gibt es nur noch in unendlicher Entfernung eine Projectivitäts-Axe.

92. Wenn zwei sich entsprechende Figuren in irgend zwei affinen Systemen gegeben sind, so ist es jedesmal leicht, den Situationspunct durch Construction zu finden. Wenn wir von den Gleichungen

$$q = [q'], \qquad p = [p'], \tag{1}$$

als Fundamental-Gleichungen der Affinität, ausgehen, so erhalten wir, wie schon früher bemerkt worden ist, indem wir die verschiedenen linearen Functionen auf dieselben Puncte beziehen, die Gleichungen:

$$q = q', \qquad p = p', \tag{2}$$

welche zwei solche gerade Linien ausdrücken, die sich in dem gesuchten Situationspuncte schneiden.

Stellen wir ferner, bei beliebiger Annahme von A und B, irgend zwei sich entsprechende gerade Linien der beiden Systeme durch die nachstehenden Gleichungen dar:

$$\begin{aligned} q + Ap + B &= 0, \\ q' + Ap' + B &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

so kommt, wenn wir, um B zu eliminiren, diese beiden Gleichungen von einander abziehen:

$$(q - q') + A(p - p') = 0. \tag{4}$$

Diese neue Gleichung stellt eine solche gerade Linie dar, auf welcher die beiden einander entsprechenden geraden Linien (3), so wie je zwei andere solche Linien, welche durch einen andern Werth von B, aber denselben Werth von A, bestimmt werden, sich schneiden. Betrachten wir hiernach eine Reihe von Parallel-Linien des ersten Systems, so erhalten wir in dem zweiten Systeme eine Reihe entsprechender gerader Linien, die eben-

falls unter einander parallel sind, und je zwei einander entsprechende gerade Linien der beiden Reihen schneiden sich auf der geraden Linie (4). Die Form der Gleichung dieser geraden Linie zeigt, dafs diese durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien (2), also durch den Situationspunct geht. Nehmen wir für A irgend einen andern Werth, so ändern wir dadurch die Richtung der Parallelen des ersten Systems zugleich mit der Richtung der Parallelen des zweiten Systems, die bezügliche gerade Linie (4) geht aber immer noch durch den Situationspunct, der also durch zwei solche Linien vollkommen bestimmt ist.

Die einfachste Art, die Affinität zweier Systeme geometrisch zu bestimmen, besteht darin, dafs wir drei gegebene Puncte des einen Systems als dreien gegebenen Puncten des zweiten Systems entsprechend ansehen. In den von diesen drei Puncten-Paaren gebildeten beiden Dreiecken entsprechen einander die Seiten ebenfalls, und wenn wir zweien entsprechenden Seiten parallel durch die gegenüberliegenden Winkelpuncte zwei gerade Linien legen, so entsprechen einander auch diese. Wenn wir hiernach den Durchschnittspunct zweier solchen Seiten mit dem Durchschnittspuncte der beiden ihnen bezüglich parallelen geraden Linien durch eine neue gerade Linie verbinden, so geht diese durch den Situationspunct der beiden Systeme. Auf diese Weise ergeben sich also drei gerade Linien, welche durch diesen Punct gehen.

Da auch derjenige Winkel, welcher von den beiden einander entsprechenden geraden Linien (3) gebildet wird, von der Constanten B unabhängig ist, so folgt, „dafs der geometrische Ort für die Durchschnittspuncte solcher zwei sich entsprechenden geraden Linien, die sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, eine, durch den Situationspunct gehende, gerade Linie ist.“ Jede der beiden Situations-Axen, wenn überhaupt solche reelle Axen existiren, entspricht der Annahme, dafs der gegebene Winkel gleich Null oder gleich zwei rechten Winkeln gesetzt wird. —

Es liegt uns hier die Frage nach dem geometrischen Orte für die Durchschnittspuncte solcher einander entsprechenden Linien nahe, die, statt eine gegebene Richtung zu haben, durch zwei feste (einander entsprechende) Puncte gehen. Wir können überhaupt irgend zwei solche Linien durch die beiden Gleichungen:

$$q+Ap = 0, \qquad q'+Ap' = 0,$$

darstellen, und wenn wir dann A eliminiren, so kommt für die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$qp' - q'p = 0.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade und stellt also einen Kegelschnitt dar. Sie wird befriedigt, wenn wir zugleich:

$$q = q', \qquad p = p',$$

setzen; der bezügliche Kegelschnitt geht also durch den Situationspunct. Er geht überdiefs durch die beiden festen, einander entsprechenden Puncte, in welchen sich die fraglichen geraden Linien jedes der beiden Systeme schneiden. — Ich kann diesen Gegenstand, der eine gröfsere Ausführung zuläfst, hier nur berühren. —

93. Wir wollen schliefslich nur noch mit ein paar Worten auf die metrischen Relationen zurückkommen. Da sich die Verwandtschaft zweier affinen Systeme bei einer beliebigen gegenseitigen Lage derselben durch die Gleichungen:

$$x(q) = x'(q), \qquad ax(p) = a'x'(p),$$

ausdrücken läfst, so gibt es immer zwei feste gerade Linien, die Situations-Axen, von welchen jede die Eigenschaft hat, dafs das Verhältnifs der Abstände je zweier sich entspre-

chenden Puncte von derselben ein constantes ist. Für die eine dieser geraden Linien ist dieses Verhältnifs $\frac{\varkappa'}{\varkappa}$, für die andere $\frac{\mathfrak{a}'\varkappa'}{\mathfrak{a}\varkappa}$. Für den Fall der Aehnlichkeit und einer ähnlichen Lage gibt es solcher geraden Linien unendlich viele, und für alle ist jenes constante Verhältnifs dasselbe, woraus denn unmittelbar folgt, dafs auch das Verhältnifs der Abstände irgend zweier sich entsprechenden Puncte von dem Aehnlichkeitspuncte, in welchem alle jene geraden Linien zusammenlaufen, ein constantes ist. Da durch eine Drehung der Systeme um diesen Punct, so wenig wie durch eine Umwendung eines der Systeme um eine feste, durch diesen Punct gehende, gerade Linie in diesen Beziehungen sich irgend etwas ändert, und von der andern Seite durch solche Lagen-Veränderung der Systeme der jedesmalige vollkommen bestimmte und einzige Situationspunct zweier ähnlichen Systeme zum Aehnlichkeitspuncte werden kann, so folgt, dafs der Situationspunct die merkwürdige Eigenschaft hat, dafs, wenn man von demselben nach einem beliebigen Puncte des einen Systems und nach dem entsprechenden Puncte des andern zwei gerade Linien zieht, das Verhältnifs dieser beiden geraden Linien ein constantes ist. Und ferner ist klar, dafs, wenn zwei congruente Systeme eine beliebige gegenseitige Lage haben, es im Allgemeinen einen solchen Punct, den Situationspunct, gibt, der die Eigenschaft hat, dafs je zwei gerade Linien, die von demselben aus nach irgend zwei sich entsprechenden Puncten der beiden Systeme gezogen werden, einander gleich sind. Nur liegt, wenn eines der beiden Systeme eine umgewendete Lage hat, dieser Punct immer unendlich weit (86). Wenn zwei Systeme in der Verwandtschaft der Gleichheit der Flächenräume (87) stehen, so gibt es, im Allgemeinen, zwei feste gerade Linien, die Situations-Axen, welche mit irgend zwei einander entsprechenden geraden Linien zwei Dreiecke von gleichem Inhalte bestimmen. —

94. Wir haben in den vorstehenden Erörterungen die Discussion der Collineations-Verwandtschaft und ihrer besondern Fälle an die Betrachtung von Punct-Coordinaten angeknüpft. Es ergeben sich aber auch alle Resultate, zu denen wir über diese Verwandtschaft überhaupt gelangt sind, auf ganz analogem Wege, wenn wir, um dieselbe analytisch auszudrücken, uns der allgemeinen Linien-Coordinaten bedienen. Bezeichnen wir zu diesem Ende, der 44. Nummer gemäfs, durch ϑ und ζ die allgemeinen Linien-Coordinaten irgend einer beliebigen, und durch ϑ' und ζ' die Coordinaten irgend einer andern Bestimmung, so können wir die Collineation durch die beiden Gleichungen:

$$\vartheta = [\vartheta'], \qquad \zeta = [\zeta'], \tag{1}$$

an deren Stelle wir auch die folgenden setzen können:

$$v \cdot \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{t}} = \left[v' \cdot \frac{\mathfrak{u}'}{\mathfrak{t}'}\right], \qquad \varphi \cdot \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{t}} = \left[\varphi' \cdot \frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{t}'}\right], \tag{2}$$

ausdrücken. Alsdann bedeuten (45), bei gehöriger Bestimmung der unbestimmten Coefficienten v, v', φ und φ', in dem ersten System $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die kürzesten Abstände der drei gegebenen festen Puncte:

$$\mathfrak{t} = 0, \qquad \mathfrak{u} = 0, \qquad \mathfrak{v} = 0,$$

von der bezüglichen geraden Linie, und in dem andern Systeme bedeuten $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$ die kürzesten Abstände der drei andern gegebenen festen Puncte:

$$\mathfrak{t}' = 0, \qquad \mathfrak{u}' = 0, \qquad \mathfrak{v}' = 0,$$

von der entsprechenden geraden Linie.

Hat man hiernach für irgend zwei gerade Linien des ersten Systems zum Beispiel:

$$\zeta = \varphi \cdot \frac{\mathfrak{v}_1}{\mathfrak{t}_1} = \mathfrak{a}_1, \qquad \zeta = \varphi \cdot \frac{\mathfrak{v}_2}{\mathfrak{t}_2} = \mathfrak{a}_2,$$

so erhalten wir für die beiden entsprechenden des zweiten Systems:

$$\zeta' = \varphi' \cdot \frac{v'_1}{t'_1} = a_1, \qquad \zeta' = \varphi' \cdot \frac{v'_2}{t'_2} = a_2.$$

Wir bezeichnen durch a_1 und a_2 irgend zwei constante Gröfsen, und unterscheiden durch unten angehängte Marken diejenigen besondern Werthe, welche die linearen Functionen erhalten, wenn sie auf die verschiedenen geraden Linien bezogen werden. Aus den letzten beiden Gleichungen-Paaren erhält man hiernach sogleich:

$$\frac{v_1}{t_1} : \frac{v_2}{t_2} = \frac{v'_1}{t'_1} : \frac{v'_2}{t'_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

worin wir unmittelbar die metrische Fundamental-Relation der Collineations-Verwandtschaft wiedererkennen (75).

95. Der Definition der Collineation zufolge (73), müssen nothwendig die allgemeinen Beziehungen zweier collinear verwandten Figuren, bei gehöriger Auffassung, gerade Linien und Puncte gleichmäfsig betreffen. So bezieht sich die eben entwickelte metrische Relation auf zwei Puncte und zwei gerade Linien. So gibt es in zwei collinearen Systemen, im Allgemeinen, drei Situationspuncte und drei Situations-Axen; von jenen sowohl, als von diesen können zwei imaginär sein (80), und so gibt es neben einander ein Collineations-Centrum und eine Collineations-Axe (79). Aber, sobald wir irgend eine nähere Voraussetzung über die Art der Collineation machen, wobei die unendliche Entfernung von Puncten und geraden Linien als eine ausgezeichnete Particularisation hervortritt, so hört die fragliche Analogie auf, und wir erhalten, um dieselbe Verwandtschaft auszudrücken, Gleichungen von verschiedenen Formen, wenn wir uns einerseits der Punct-Coordinaten und andrerseits der Linien-Coordinaten bedienen. Während wir hiernach, zum Beispiel, zwei collineare und collinear liegende Systeme durch die Gleichungen:

$$\frac{u}{t} = \left[\frac{u}{t'}\right], \qquad \frac{v}{t} = \left[\frac{v}{t'}\right],$$

welche ganz dieselbe Form haben, als die Gleichungen (2) der 79. Nummer, characterisiren können, so können wir keinesweges, um die Affinität zweier Systeme auszudrücken, die Form der frühern Gleichungen auf die neue Bezeichnung übertragen. Den Grund für die Nothwendigkeit hiervon erkennen wir sogleich darin, dafs bei einem Puncte, der unendlich weit liegt, die Richtung, nach welcher er unendlich weit liegt, noch in Betracht gezogen werden mufs, so dafs nach jeder gegebenen Richtung ein Punct unendlich weit liegt, während gerade Linien, die unendlich weit liegen, sich nicht mehr von einander unterscheiden lassen und als eine einzige gerade Linie zu betrachten sind.

96. So wie wir früher die Discussion engerer Grade der Collineations-Verwandtschaft an die Particularisirung der allgemeinen Bestimmung der Punct-Coordinaten geknüpft haben, so werden wir auch hier aufgefordert, auf analoge Weise engere Grade der Verwandtschaft zu bestimmen. Ein solcher wird zum Beispiel durch die nachstehenden Gleichungen ausgedrückt:

$$vu = [v'u'], \qquad \varphi v = [\varphi' v']. \tag{3}$$

Betrachten wir diese Gleichungen als aus den allgemeinen Gleichungen (2) hervorgegangen, so müssen wir annehmen, dafs die beiden Puncte: $t = 0$ und $t' = 0$, nach bestimmter Richtung, unendlich weit gerückt sind. Wir wollen annehmen, dafs diese beiden Puncte nach derselben Richtung unendlich weit liegen, was immer, wenn es nicht der Fall ist, durch eine schickliche Drehung eines der beiden Systeme bewirkt werden kann. Um die

Situationspuncte der beiden Systeme zu erhalten, brauchen wir blofs die beiden Gleichungen:

$$vu + A\varphi v + B = 0, \qquad (4)$$
$$v'u' + A\varphi' v + B = 0,$$

zu bilden und dann ähnlich wie in der 83. Nummer, die beiden unbestimmten Constanten A und B so zu bestimmen, dafs diese Gleichungen identisch werden, was im Allgemeinen auf doppelte Weise geschehen kann. Es gibt, im Allgemeinen, zwei Situationspuncte der beiden Systeme; diese können aber reell oder imaginär sein, oder auch zusammenfallen. Die gerade Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, ist immer reell; denn es werden die letzten beiden Gleichungen immer befriedigt, wenn wir zugleich:

$$vu = v'u', \qquad \varphi v = \varphi' v', \qquad (5)$$

setzen. Diese Gleichungen, welche keine anderen sind, als die Gleichungen (3), wenn wir u und u', v und v' auf dieselbe gerade Linie beziehen, stellen zwei reelle Puncte dar, welche die fragliche gerade Linie verbindet. Diese gerade Linie ist eine Situations-Axe der beiden Systeme; aufser derselben gibt es aber auch noch zwei parallele Situations-Axen, welche durch die beiden Situationspuncte gehen. Von diesen Puncten kann einer auch noch unendlich weit auf der erstgenannten Axe liegen, alsdann rückt zugleich auch eine der beiden parallelen Axen unendlich weit, und die fragliche Verwandtschaft geht in Affinität über. In allen diesen Fällen können wir die Verwandtschaft der beiden Systeme durch Gleichungen von folgender Form characterisiren:

$$vu = [v'u], \qquad \varphi v = [\varphi' v],$$

wobei alsdann:

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

die Gleichungen der beiden Situationspuncte sind. Wir bemerken ferner, dafs es dann unendlich viele Situationspuncte gibt, wenn insbesondere

$$\frac{v}{v'} = \frac{\varphi}{\varphi'}.$$

In diesem Falle verwandelt sich die fragliche Verwandtschaft in Projectivität. —

Endlich ist auch noch derjenige Fall möglich, dafs die Gleichungen (5) nicht zugleich bestehen können, ohne dafs u und v unendlich werden. Dann aber ist es hinreichend, das eine System parallel mit sich selbst schicklich zu verschieben, um hervorzubringen, dafs die genannten beiden Gleichungen identisch werden. Es fallen in den durch jede dieser beiden Gleichungen dargestellten Punct die beiden Situationspuncte zusammen, und jede durch denselben gehende gerade Linie ist eine Situations-Axe: die beiden Systeme sind ähnliche.

97. Es bliebe uns jetzt nur noch übrig, so wie wir früher auch imaginäre Coordinaten betrachtet haben, den Begriff des Imaginären in die Verwandtschaft der Collineation ebenfalls einzuführen. Aber da die bisherigen Erörterungen über diese Verwandtschaft schon eine solche Ausdehnung erhalten haben, die, bei dem Zwecke der vorliegenden Schrift, nur mit Bezugnahme auf die Wichtigkeit des Gegenstandes sich rechtfertigen läfst, so begnüge ich mich damit, hier auf die Betrachtung des Imaginären als etwas Wesentliches hinzuweisen, das, wenn es blofs in Beziehung auf Puncte und gerade Linien auch entbehrlich scheinen sollte (was es aber, um gewisse Beziehungen zu erklären, keinesweges ist), seine ganze Bedeutung in der Verwandtschaft der Curven erhält. Zwei solche collinear verwandte Curven werden überhaupt, wenn wir die Bezeichnung der 78. Num-

Nummer beibehalten, und durch das Symbol F beide Male dieselbe Function anzeigen, durch die Gleichungen:

$$F(\eta, \vartheta) = 0, \qquad F(\eta', \vartheta') = 0,$$

dargestellt, und beide Curven können auch dann reell sein, wenn η' und ϑ' zum Beispiel imaginär sind. Ich schliefse mit der Bemerkung, dafs bei der collinearen Verwandtschaft der Curven ganz neue Beziehungen zur Sprache kommen. —

98. Ehe wir diesen Paragraph abbrechen, wollen wir auch noch die dritte Art des sich Entsprechens zweier Figuren (71) in dem einfachsten und wichtigsten Falle betrachten. Wir wollen nemlich sogleich die Voraussetzung machen, dafs jedem Puncte der ersten Figur eine einzige gerade Linie der zweiten, und also, umgekehrt, auch jeder geraden Linie von dieser nur ein einziger Punct der ersten entspricht. Hieraus folgt noch keineswegs, dafs auch jeder geraden Linie der ersten Figur nur ein einziger Punct der zweiten, und, umgekehrt, einem einzigen Puncte der zweiten eine einzige gerade Linie der ersten entspricht. Wenn auch dieser letzten Bestimmung Genüge geschehen soll, so drücken die folgenden Gleichungen:

$$\eta = \vartheta', \qquad \xi = \zeta', \tag{1}$$

die Beziehung der beiden Figuren zu einander aus. η und ξ bedeuten wie bisher Punct-Coordinaten und ϑ' und ζ' Linien-Coordinaten irgend einer beliebigen Bestimmung: indem die Werthe von diesen den Werthen von jenen gleich gesetzt werden, bestimmen sich ein Punct des ersten und eine gerade Linie des zweiten Systems gegenseitig auf lineare Weise. Irgend eine gegebene gerade Linie des ersten Systems können wir, bei gehöriger Bestimmung von A und B, durch die Gleichung:

$$\eta + A\xi + B = 0, \tag{2}$$

darstellen, der entsprechende Punct in dem zweiten Systeme wird alsdann durch die nachstehende Gleichung:

$$\vartheta' + A\zeta' + B = 0, \tag{3}$$

dargestellt, indem die beiden unbestimmten Constanten dieselben Werthe behalten.

Wir wollen denjenigen Punct eines der beiden Systeme, der irgend einer geraden Linie des andern Systems entspricht, den Pol dieser Linie, und diejenige gerade Linie eines der beiden Systeme, die irgend einem Puncte des andern Systemes entspricht, die Polare dieses Punctes nennen. Nach dem vorstehenden Algorithmus bestimmen sich die Pole in dem ersten und die Polaren in dem zweiten Systeme unmittelbar durch ihre Coordinaten, die Polaren in dem ersten und die Pole in dem zweiten Systeme aber durch lineare Gleichungen.

Wenn die Coordinaten mehrerer Puncte des ersten Systems die Gleichung (2) befriedigen, so liegen sie auf der durch diese Gleichung dargestellten geraden Linie: die Coordinaten der Polaren dieser Puncte in dem zweiten Systeme befriedigen alsdann die Gleichung (3), und gehen also alle durch denjenigen Punct, welcher durch diese Gleichung dargestellt wird und in dem zweiten System der Pol der geraden Linie (2) ist. Umgekehrt liegen in dem ersten Systeme die Pole solcher geraden Linien des zweiten Systems, welche in demselben Puncte (3) sich schneiden, alle auf der geraden Linie (2) der Polaren dieses Punctes im ersten Systeme. Von der andern Seite können wir die beiden unbestimmten Constanten in der Gleichung (2) so bestimmen, dafs diese Gleichung nach einander mehrere gerade Linien darstellt, welche alle durch einen gegebenen Punct (η_1, ξ_1) gehen, alsdann liegen die jedesmaligen durch die Gleichung (3) dargestellten Pole dieser geraden Linie auf derselben geraden Linie, für welche $\vartheta' = \eta_1$ und $\zeta' = \xi_1$, und die

also die Polare des festen Punctes (η_1, ξ_1) in dem zweiten Systeme ist. Umgekehrt gehen in dem ersten Systeme die Polaren aller solchen Puncte des zweiten, die in gerader Linie liegen, durch denselben Punct, den Pol dieser Linie in dem zweiten Systeme. Wir sehen hieraus, wie die Beziehung der beiden Systeme zu einander eine durchaus gegenseitige ist. Wir nennen dieselben zwei reciprok verwandte, oder reciproke, und das aus dieser Art der Verwandtschaft fliefsende Princip, nach welchem die Relationen des einen zweier reciproken Systeme sich auf das andere übertragen lassen: Princip der Reciprocität.

Es ist offenbar, dafs wir die Fundamental-Gleichungen (1) mit andern:

$$\vartheta = \eta', \qquad \zeta = \xi', \tag{4}$$

welche, bei näherer Functionen-Bestimmung, aus ihnen sich ableiten lassen, und nach welchen die Coordinaten ϑ und ζ einer geraden Linie des ersten Systems bezüglich den Coordinaten η' und ξ' eines Punctes des zweiten Systems gleich sind, vertauschen können.

99. Die Verwandtschaft der Reciprocität hat grofse Analogie mit der Verwandtschaft der Collineation. So wie diese, hängt auch sie von acht Constanten ab. So wie die Collineation zweier Systeme auf lineare Weise bestimmt ist, wenn entweder vier Paare sich entsprechender Puncte oder vier Paare sich entsprechender geraden Linien gegeben sind, so ist die Reciprocität zweier Systeme auf lineare Weise bestimmt, wenn in irgend einem der beiden Systeme vier Puncte, und in dem andern Systeme die ihnen, als Polaren, entsprechenden geraden Linien gegeben sind.

Wenn irgend drei Systeme vorliegen, von denen das erste (η, ξ) mit jedem der beiden andern, (ϑ', ζ') und (ϑ'', ζ'') in der Verwandtschaft der Reciprocität steht, so sind diese letztern Systeme collinear verwandt. Denn aus den beiden Gleichungen-Paaren:

$$\eta = \vartheta', \qquad \xi = \zeta',$$
$$\eta = \vartheta'', \qquad \xi = \zeta'',$$

welche wir als die Aussage der gemachten Voraussetzung betrachten können, folgt das Gleichungen-Paar:

$$\vartheta' = \vartheta'', \qquad \zeta' = \zeta'',$$

welches ausdrückt, dafs die beiden letzten Systeme collinear verwandt sind. Umgekehrt steht, wenn eines von zwei collinearen Systemen mit einem dritten reciprok verwandt ist, auch das andere derselben mit diesem in der Verwandtschaft der Reciprocität. —

Wir können die Collineations-Verwandtschaft derselben beiden Systeme auf gleiche Weise durch jedes Paar der folgenden Gleichungen ausdrücken (78, 94):

$$\eta = \eta', \qquad \xi = \xi'; \tag{5}$$
$$\vartheta = \vartheta', \qquad \zeta = \zeta';$$

indem wir die nicht accentuirten Buchstaben auf das erste und die accentuirten auf das zweite System beziehen. Zugleich können wir hierbei etwa η und ξ und zugleich ϑ' und ζ' als Coordinaten einer von vorne herein willkührlich angenommenen Bestimmung ansehen, ohne dadurch die Allgemeinheit der Collineations-Verwandtschaft zu beschränken. Durch die nachstehenden beiden Gleichungen können wir die allgemeine Verwandtschaft der Reciprocität ausdrücken:

$$\eta' = \vartheta', \qquad \xi = \zeta'. \tag{1}$$

Dann ist aber auch, nach den Gleichungen (5):

$$\vartheta = \eta', \qquad \zeta = \xi'. \tag{4}$$

Wenn also irgend zwei collineare Systeme gegeben sind, und wir dann die Puncte des einen Systems als die Pole der geraden Linien des andern betrachten, so sind auch die,

jenen Puncten collinear entsprechenden, Puncte des zweiten Systems die Pole der, diesen geraden Linien collinear entsprechenden, geraden Linien des ersten Systems. Und, andrerseits, wenn irgend zwei reciproke Systeme gegeben sind, und wir dann die Puncte der beiden Systeme so zusammennehmen, dafs sie einander collinear entsprechen, so entsprechen auch die Polaren dieser Puncte einander auf collineare Weise.

100. Wenn wir irgend einen gegebenen Punct nach einander als jedem von zwei reciproken Systemen angehörig betrachten, so erhalten wir für die Polare in dem jedesmaligen andern Systeme, im Allgemeinen, nicht dieselbe gerade Linie. Es gibt indefs, bei jeder beliebigen Lage der beiden Systeme, im Allgemeinen drei Puncte, welche die Eigenschaft haben, dafs, gleichviel welchem der Systeme wir sie als angehörig betrachten, die beiden Polaren jedes derselben sich decken; so dafs es also auch, umgekehrt, drei solche gerade Linien gibt, deren jeder zwei solche Pole entsprechen, die zusammenfallen. Auf die gegenseitige Beziehung jener drei Puncte und dieser drei geraden Linien, welche nothwendig ein und dasselbe Dreieck bestimmen, werden wir in der 103. Nummer zurückkommen. Um die obige Behauptung hier schon nachzuweisen, können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, in den beiden Paaren von Gleichungen (1) und (4), von denen wir voraussetzen, dafs jedes die Reciprocität derselben beiden Systeme ausdrückt, ϑ und ϑ', so wie ζ und ζ', als identisch dieselben Functionen zweier beliebigen Linien-Coordinaten betrachten; soll alsdann derselben geraden Linie in beiden Systemen derselbe Punct als Pol entsprechen, so müssen für diesen Punct die beiden Gleichungen:

$$\eta = \eta', \qquad \xi = \xi',$$

welche die nachstehende mit sich bringen:

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\eta'}{\xi'},$$

befriedigt werden. Führen wir statt η und ξ, η' und ξ', der frühern Bezeichnung gemäfs, p, q, r und p', q', r' ein, so gehen die vorstehenden Gleichungen in die folgenden über:

$$qr' = q'r, \qquad pr' = p'r, \qquad qp' = p'q,$$

in denen wir die accentuirten Buchstaben als homogene ganze und lineare Functionen der nicht accentuirten ansehen können. Durch diese drei Gleichungen sind, umgekehrt, die fraglichen Puncte bestimmt. Zu dieser Bestimmung sind irgend zwei dieser drei Gleichungen hinreichend, geben aber einen fremden vierten Punct, den wir auch, ohne die jedesmalige dritte Gleichung zu Rathe ziehen, sogleich ausschliefsen können.

101. Wenn sich, indem wir von den Fundamental-Gleichungen (1) ausgehen und die frühere Bezeichnung beibehalten, für zwei willkührlich angenommene Puncte des ersten Systems,

$$\xi = \pi \cdot \frac{p_1}{r_1} = a_1, \qquad \xi = \pi \cdot \frac{p_2}{r_2} = a_2$$

ergibt, so kommt für die Polare dieser Puncte in dem zweiten Systeme

$$\zeta' = \varphi \cdot \frac{v_1}{t_1} = a_1, \qquad \zeta' = \varphi \cdot \frac{v_2}{t_2} = a_2.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{p_1}{r_1} : \frac{p_2}{r_2} = \frac{v_1}{t_1} : \frac{v_2}{t_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

und wenn wir auf dieselbe Weise, wie früher, geometrisch deuten, gelangen wir zu einer metrischen Relation, etwa zwischen den kürzesten Abständen zweier gegebenen Puncte von zwei gegebenen geraden Linien des erstens Systems, welche constant bleibt, wenn

wir, nach der reciproken Umgestaltung des Systems, an die Stelle der beiden gegebenen Puncte die Pole der beiden gegebenen geraden Linien, und an die Stelle dieser beiden geraden Linien die Polaren der beiden gegebenen Puncte setzen.

Wenn wir, im ersten Systeme, durch irgend zwei willkührlich angenommene Puncte M und N eine gerade Linie legen, welche zwei beliebigen geraden Linien dieses Systems p und r in den beiden Puncten P und R begegnet, und dann, in dem zweiten Systeme, durch P′ und R′, den Polen von p und r, ebenfalls eine gerade Linie legen, welche m′ und n′ den Polaren von M und N, in den Puncten M′ und N′ schneidet, so gibt die Deutung der letzten Gleichung unmittelbar auch:

$$\frac{MP}{MR}:\frac{NP}{NR}=\frac{P'M'}{P'N'}:\frac{R'M'}{R'N'}=\frac{P'M'}{R'M'}:\frac{P'N'}{R'N'}.$$

Zugleich ist ersichtlich, dafs, bei der reciproken Umgestaltung, an die Stelle von vier harmonischen Theilungspuncten vier Harmonicalen, und umgekehrt, treten, so wie auch, dafs an die Stelle einer Involution von Puncten eine Involution von geraden Linien, und umgekehrt, tritt. Denn hierbei verwandeln sich zum Beispiel die Gleichungen:

$$\eta+\alpha\xi=0, \qquad \alpha\eta-\xi=0,$$

in die folgenden:

$$\vartheta'+\alpha\zeta'=0, \qquad \alpha\vartheta'-\zeta'=0.$$

und während, bei beliebiger Bestimmung von α, jene nach einander jedes Paar einer Involution von geraden Linien ausdrücken, drücken diese, nach einander, jedes Paar einer Involution von Puncten aus (32, 56).

102. Wenn irgend zwei reciproke Systeme gegeben sind, so gibt es in jedem derselben einen merkwürdigen Punct, dessen Construction von der gegenseitigen Lage der beiden Systeme, und insbesondere also auch von der gegenseitigen Lage irgend zweier reciproken Figuren derselben, durchaus unabhängig ist. Er behält bei einer beliebigen Fortrückung des Systems, in Beziehung auf irgend eine Figur desselben, unverrückt dieselbe Lage. Betrachtet man nemlich nach einander eine unendlich weit entfernte gerade Linie, als jedem der beiden Systeme angehörig, so kann man, in dem jedesmaligen andern Systeme den Pol derselben bestimmen, und erhält alsdann, im Allgemeinen, zwei solche Puncte der beiden Systeme, die nicht zusammenfallen. Diese beiden Puncte nennt Herr Magnus die Mittelpuncte der beiden Systeme.

Wir können den Mittelpunct jedes der beiden Systeme leicht construiren. Denn, der Definition nach, ist der Mittelpunct eines Systems, das wir als das erste unterscheiden wollen, der Pol einer geraden Linie, die in dem zweiten Systeme unendlich weit liegt, so dafs, wenn wir, in dem zweiten Systeme, nach beliebiger Richtung parallele gerade Linien ziehen, die Pole dieser Parallelen auf einer solchen geraden Linin, die durch den Mittelpunct des ersten Systems geht, auf einem Durchmesser dieses Systems, liegen. Durch zwei solche Durchmesser ist der Mittelpunct des ersten Systems bestimmt. Wenn wir, andrerseits, in dem zweiten Systeme die Pole solcher geraden Linien des ersten Systems, die dem eben bestimmten Durchmesser desselben parallel sind, construiren, so liegen alle diese Pole auf einem Durchmesser des zweiten Systems, den wir, nach Herrn Magnus, den zugeordneten des eben bestimmten nennen wollen. Zwei zugeordnete Durchmesser der beiden Systeme stehen also in der gegenseitigen Beziehung zu einander, dafs jeder die Polare desjenigen Punctes ist, der auf dem andern unendlich weit liegt.

Es gibt nach dem Vorstehenden, im Allgemeinen, eine einzige Richtung, nach der ein Punct unendlich weit liegen mufs, wenn seine Polare in dem andern Systeme ein Durch-

messer von gegebener Richtung sein soll. Sind hiernach A und A′ irgend zwei zugeordnete Durchmesser, und nehmen wir, nach der Richtung des Durchmessers A des ersten Systems, in dem zweiten Systeme einen Punct unendlich weit, so ist die Polare dieses Punctes im ersten Systeme ein solcher Durchmesser, B, der, im Allgemeinen, nicht dem Durchmesser A′ des zweiten Systems parallel ist. Aber, wenn wir das erste System um seinen Mittelpunct schicklich drehen, so können wir dadurch dem Durchmesser A eine solche Richtung geben, dafs die beiden Durchmesser B und A′ parallel werden. Nach der gemachten Voraussetzung ist A dem zugeordneten Durchmesser von B im zweiten Systeme, den wir B′ nennen wollen, parallel. Wir können also zwei reciproke Systeme, durch blofse Drehung eines derselben um seinen Mittelpunct, in eine solche gegenseitige Lage bringen, dafs von zwei Paaren zugeordneter Durchmesser A und A′, B und B′, von welchen wir das eine Paar willkührlich wählen können, A mit B′ und B mit A′ parallel wird.

Endlich wollen wir nun noch die beiden Systeme durch eine parallele Verschiebung in eine solche Lage bringen, dafs ihre beiden Mittelpuncte einander decken, wonach dann auch die Durchmesser A und B′, so wie B und A′ in dieselbe gerade Linie zusammenfallen. Jede der beiden auf diese Weise bestimmten geraden Linien können wir als einen Durchmesser jedes der beiden Systeme betrachten, und erhalten alsdann für den zugeordneten Durchmesser des andern Systems die jedesmalige andere derselben; so dafs also die Polare jedes beliebigen Punctes einer dieser beiden geraden Linien in jedem der beiden Systeme der andern parallel ist.

In der 100. Nummer haben wir bewiesen, dafs es, im Allgemeinen, bei einer beliebigen Lage zweier reciproken Systeme drei Puncte gibt, deren beidesmalige Polaren zusammenfallen. Bei einer concentrischen Lage der beiden Systeme ist der gemeinschaftliche Mittelpunct derselben offenbar ein solcher Punct. Es zeichnet sich derselbe indefs dadurch wesentlich aus, dafs, bei einer beliebigen Drehung der Systeme um diesen Punct, derselbe immer diese Eigenschaft behält; während wenn man überhaupt, bei einer beliebigen Lage der beiden Systeme, eines derselben um einen solchen Punct, dessen beidesmalige Polaren (nicht in unendlicher Entfernung) zusammenfallen, beliebig dreht, nach der Drehung, die beiden Polaren desselben einander nicht mehr decken. Hierin ist der Erklärungsgrund zu suchen, dafs es, abweichend von dem allgemeinen Falle, bei einer concentrischen Lage der beiden Systeme, aufser dem Mittelpuncte, sonst keinen Punct, weder in endlicher noch unendlicher Entfernung, gibt, dessen beide Polaren zusammenfallen; dafs wir aber, durch eine schickliche Drehung eines der beiden Systeme um den gemeinschaftlichen Mittelpunct, diesen eine solche gegenseitige Lage geben können, dafs die beiden Polaren jedes Punctes, und also auch die beiden Pole jeder geraden Linie, einander decken. Diese Lage ist diejenige, die wir oben schon bezeichnet haben, was wir unter andern auch auf die nachstehende Weise zeigen können.

Die metrische Relation der vorigen Nummer vereinfacht sich, wenn sich in dem einen System unter den beiden Puncten der Mittelpunct und unter den beiden geraden Linien eine unendlich weit entfernte befindet; ein Gleiches findet alsdann in dem zweiten Systeme Statt. Nennen wir C und C′ die Mittelpuncte der beiden Systeme und lassen dieselben an die Stelle der beiden Puncte treten, die wir früher durch M und P′ bezeichnet haben, so müssen wir p und m′ für die beiden unendlich weit entfernten geraden Linien der beiden Systeme nehmen. Dann reducirt sich aber die letzte Gleichung der vorigen Nummer auf:

$$\frac{NR}{CR} = \frac{R'N'}{C'N'}.$$

In der oben bezeichneten Lage der beiden Systeme fallen zuvörderst die beiden Mittelpuncte C und C' zusammen. Dann wollen wir den Punct N auf einem der beiden zugeordneten Durchmesser A und B', die mit den zugeordneten Durchmessern B und A' zusammenfallen, beliebig annehmen; die Polare desselben, n', in dem zweiten Systeme ist alsdann dem andern zugeordneten Durchmesser parallel, und schneidet den ersten Durchmesser in dem Puncte N', dessen Polare in dem ersten Systeme dem zugeordneten Durchmesser ebenfalls parallel ist und durch ihren Pol, den Punct N, geht. Die gerade Linie n' wollen wir zugleich für die willkührliche Linie r des ersten Systems nehmen, dann liegt der Punct R', der Pol dieser geraden Linie, in dem zweiten Systeme ebenfalls auf dem ersten Durchmesser. Der Punct R, in welchem der erste Durchmesser von der Linie r geschnitten wird, und dessen Polare durch R' geht und mit dem zugeordneten Durchmesser parallel ist, fällt folglich mit dem Puncte N' zusammen. Hiernach zeigt die letzte Gleichung, dafs auch die Puncte R' und N zusammenfallen. Es decken sich also die beiden Puncte R und N', so wie ihre beiden Polaren in den beiden Systemen, weil sie durch die beiden zusammenfallenden Puncte R' und N gehen und dem zugeordneten Durchmesser parallel sind.

Hieraus ziehen wir zunächst den Schlufs, dafs die beiden Polaren jedes Punctes jedes der beiden in Rede stehenden zugeordneten Durchmessers zusammenfallen, und dann, was unmittelbar hieraus hervorgeht, dafs ein Gleiches für jeden beliebigen Punct Statt findet. Insbesondere folgt dann auch, dafs wir, in der besagten Lage, den einen von zwei zugeordneten Durchmessern nach einander als jedem der beiden Systeme angehörig betrachten können. —

103. Ich habe im zweiten Bande der „Entwickelungen“ die Theorie der Reciprocität aus einem andern Gesichtspuncte entwickelt und dieselbe auf die Variation der Constanten gegründet. (Unter demselben Gesichtspuncte läfst sich auch die Theorie der Collineation darstellen.) Wenn η und ξ beliebige Punct-Coordinaten in zwei Systemen bedeuten, so stellt die Gleichung:

$$\eta\eta' + \xi\xi' = 1, \qquad (1)$$

wenn wir η' und ξ' als constant betrachten, eine gerade Linie des ersten Systems dar, als deren Pol wir denjenigen Punct des zweiten Systems bezeichnen können, der durch die beiden constanten Werthe von η' und ξ' bestimmt ist. Wenn wir η und ξ constante Werthe beilegen, so stellt dieselbe Gleichung (1) eine gerade Linie des zweiten Systems dar, als deren Pol wir gegenseitig denjenigen Punct des ersten, der durch die beiden constanten Werthe von η und ξ bestimmt ist, bezeichnen können.

Wenn wir in der vorstehenden Gleichung η und ξ einerseits, und η' und ξ' andrerseits, auf einen und denselben Punct beziehen, so drückt diese Gleichung diejenige Relation aus, die Statt finden mufs, wenn dieser Punct in seine Polare fallen soll, und zugleich sehen wir, dafs diese Relation dieselbe bleibt, gleichviel in welchem der beiden reciproken Systeme wir die Polar-Bestimmung machen. Denken wir uns die beiden Coordinaten η' und ξ', vermittelst acht unbestimmter Constanten, durch η und ξ oder, umgekehrt, diese Coordinaten durch jene ausgedrückt, so erkennen wir sogleich, dafs der geometrische Ort für solche Puncte, die in ihre Polaren fallen, ein Kegelschnitt ist. Diese Polaren selbst umhüllen ihrerseits einen zweiten Kegelschnitt, was unmittelbar sich

ergibt, wenn wir die Reciprocität der beiden Systeme, statt durch Punct-Coordinaten wie in der Gleichung (1), durch Linien-Coordinaten ausdrücken.

Wenn wir irgend einen Punct beliebig annehmen, so erhalten wir zwei gerade Linien, als Polaren dieses Punctes in den beiden Systemen. Liegt der Punct insbesondere auf dem Umfange des ersten der eben bestimmten beiden Kegelschnitte, so sind die beiden Polaren desselben diejenigen beiden Tangenten des zweiten Kegelschnittes, welche in dem angenommenen Puncte sich schneiden. Wenn dieser Punct den Umfang des ersten Kegelschnittes durchläuft, so berühren die beiden Polaren dieses Punctes fortwährend den zweiten Kegelschnitt, in der Art, dafs dieser auf doppelte Weise von einer geraden Linie, die in zwiefachem Sinne sich fortbewegt, umhüllt wird. Wenn wir andrerseits eine gerade Linie beliebig annehmen, so erhalten wir zwei Puncte als Pole dieser geraden Linie in den beiden Systemen. Berührt diese gerade Linie insbesondere den zweiten Kegelschnitt, so liegen ihre beiden Pole auf ihr selbst und sind also die beiden Durchschnittspuncte dieser geraden Linie mit dem ersten Kegelschnitte. Während also die gerade Linie, den zweiten Kegelschnitt umhüllend, sich fortbewegt, beschreiben ihre Pole beide, jedoch nach entgegengesetzter Richtung fortrückend, den ersten Kegelschnitt.

Da die allgemeinste Bestimmung der Verwandtschaft der Reciprocität nur von acht Constanten abhängt, so ist das System der fraglichen beiden Kegelschnitte durch eine gleiche Anzahl von Constanten vollständig bestimmt, und da zu der Bestimmung eines Kegelschnittes überhaupt fünf Constante gehören, so sind jene beiden Kegelschnitte nicht irgend zwei beliebige, die wir, unabhängig von einander, von vorne herein willkührlich annehmen können. Es ist leicht, auch ohne auf analytische Entwickelungen uns zu stützen, die Beziehung der beiden Kegelschnitte zu einander aufzufinden.

Wenn nemlich der erste und zweite Kegelschnitt einen Punct M gemein haben, so fallen die beiden Polaren dieses Punctes in die Tangente des zweiten Kegelschnittes im Puncte M zusammen. Hiernach fallen nothwendig auch die beiden Pole dieser Tangente zusammen, so dafs diese Tangente des zweiten Kegelschnittes zugleich auch eine Tangente des ersten Kegelschnittes ist, und diese beiden Kegelschnitte also im Puncte M sich berühren. Die vier, reellen oder imaginären Puncte, welche überhaupt zwei Kegelschnitte mit einander gemein haben, fallen hier also paarweise zusammen: die beiden Kegelschnitte haben einen doppelten Contact. Das System zweier solchen Kegelschnitte hängt, wie die Verwandtschaft der Reciprocität, nur von acht Constanten ab.

Wir bemerken zugleich, dafs, weil die beiden Berührungspuncte zwei solche Puncte sind, deren Polaren in den beiden Systemen bezüglich in den beiden gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallen, der Durchschnittspunct dieser Tangenten der dritte Punct ist, dessen beide Polaren ebenfalls zusammenfallen, was in der Berührungs-Chorde der beiden Kegelschnitte geschieht. Die beiden Berührungspuncte und die beiden gemeinschaftlichen Tangenten können bei einer doppelten Contacte imaginär werden: die Berührungs-Chorde und der Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten bleiben aber immer reell. Zwei ähnliche ähnlich liegende und concentrische Kegelschnitte sind als zwei, auf einer unendlich weit entfernten geraden Linie sich doppelt berührende anzusehen, und der doppelte Contact ist, je nachdem die beiden Kegelschnitte Hyperbeln oder Ellipsen sind, ein reeller oder imaginärer.

Wir erhalten durch die Vermittelung der beiden fraglichen Kegelschnitte sogleich die allgemeinste Construction der Pole und Polaren. (In den, der Anschaulichkeit wegen, beigefügten Figuren sind irgend zwei concentrische Kreise für die beiden sich doppelt be-

rührenden Kegelschnitte genommen und zwar der stärker ausgedrückte Kreis für den zweiten Kegelschnitt.) Es sei in der 15. Figur AA eine gerade Linie, deren Pole in den beiden Systemen construirt werden sollen. Wenn diese gerade Linie den ersten Kegelschnitt in reellen Puncten schneidet, so können wir von jedem der beiden Durchschnittspuncte, im Allgemeinen, zwei Tangenten an den zweiten Kegelschnitt legen. Von diesen Tangenten GG und G'G', HH und H'H' correspondiren einander die erste und dritte und die zweite und vierte in der Art, dafs, wenn man sich den ersten Durchschnittspunct auf dem Umfange des ersten Kegelschnittes, bis er in den zweiten Duchschnittspunct fällt, fortgerückt denkt, die correspondirenden Tangenten zusammenfallen würden. Der Punct P, in welchem GG und HH sich schneiden, ist der Pol von AA in dem einen Systeme, und der Punct P', in welchem die beiden andern einander correspondirenden Tangenten sich schneiden, ist der Pol derselben geraden Linie in dem zweiten Systeme. Fig. 15.

Es sei ferner (Fig. 16.) A ein gegebener Punct, dessen Polaren construirt werden sollen. Legt man zu diesem Ende, von A aus zwei Tangenten an den zweiten Kegelschnitt, welche den ersten in den Puncten G und G', H und H' schneiden, so sind, wenn einerseits G und H und andrerseits G' und H' durch zwei gerade Linien PP und P'P' verbunden werden, diese geraden Linien die Polaren des gegebenen Punctes A in den beiden Systemen, vorausgesetzt, dafs die obigen vier Durchschnittspuncte so bezeichnet sind, dafs, wenn man die Tangente GG' sich fortgerückt denkt, bis sie mit HH' zusammenfällt, die Puncte G und H einerseits und die Puncte G' und H' andrerseits zusammenfallen. Fig. 16.

Wenn die vorstehenden Pol- und Polar-Bestimmungen, dadurch dafs die angezeigten Constructionen imaginär oder unbestimmt werden, ihre Anwendbarkeit verlieren, so können wir immer den Pol einer geraden Linie finden, indem wir für irgend zwei ihrer Puncte, wie oben, die Polaren suchen, welche sich alsdann in dem verlangten Pole schneiden; und umgekehrt können wir immer, wenn ein Punct gegeben ist, die Pole irgend zweier in diesem Puncte sich schneidenden geraden Linien suchen, wonach alsdann diejenige gerade Linie, welche die beiden Pole verbindet, die verlangte Polare ist. In der 17. Figur sind P'P' und P''P'' die Polaren der beiden Puncte π' und π'' (in einem der beiden Systeme), es ist alsdann π, der Durchschnitt von P'P' und P''P'' der Pol der geraden Linie PP, welche die beiden Puncte π' und π'' verbindet und diese Verbindungs-Linie also die Polare jenes Durchschnittes. Fig. 17.

Wenn in der vorigen Construction die gerade Linie PP dem zweiten Kegelschnitte begegnet und wir die beiden Durchschnittspuncte für die Puncte π' und π'' nehmen, so erhalten wir folgende Construction des Poles der geraden Linie. Man lege (Fig. 18.) in π' und π'' Tangenten an den zweiten Kegelschnitt, und in den bezüglichen Durchschnitten dieser Tangenten mit dem ersten Kegelschnitte wiederum zwei Tangenten an diesen. Die letztgenannten beiden Tangenten P'P' und P''P'' schneiden sich alsdann in dem verlangten Pole π. Die Umkehrung dieser Construction liefert die Construction der Polaren eines gegebenen Punctes. Ist dieser Punct π, und legt man von diesem Puncte aus zwei Tangenten P'P' und P''P'' an den ersten Kegeltchnitt und von den Berührungspuncten auf diesen Tangenten aus zwei bezügliche neue Tangenten an den zweiten Kegelschnitt, so ist diejenige gerade Linie PP, welche die beiden Berührungspuncte auf diesen neuen Tangenten, die Puncte π' und π'', verbindet, die verlangte Polare. Fig. 18.

Es ist leicht, nach dem Vorstehenden die beiden Mittelpuncte in den beiden reciproken Systemen zu finden. Wir brauchen zu diesem Ende blofs in jedem Systeme die Polaren irgend zweier Puncte, die nach beliebig angenommenen Richtungen unendlich weit lie-

liegen, zu bestimmen. Der Durchschnitt der beiden Polaren ist alsdann der Mittelpunct des jedesmaligen Systems. Wenn die beiden zur Bestimmung der Reciprocität dienenden Kegelschnitte insbesondere concentrisch, ähnlich und ähnlich liegend sind, so sind die beiden reciproken Systeme ebenfalls concentrisch, und, umgekehrt, wenn diese concentrisch sind, muſs die Berührungs-Chorde jener beiden Kegelschnitte unendlich weit liegen (102), und diese also in der eben bezeichneten Beziehung zu einander stehen. Die Mittelpuncte der beiden Systeme fallen alsdann mit den Mittelpuncten der beiden Kegelschnitte zusammen. Die Bestimmung des Systems dieser Kegelschnitte hängt, wie die Reciprocität im vorliegenden Falle, bloſs noch von sechs Constanten ab.

Wir haben schon in der vorigen Nummer bemerkt, daſs wir zweien concentrischen reciproken Systemen, indem der Mittelpunct derselbe bleibt, immer eine solche gegenseitige Lage geben können, daſs in den beiden Systemen die beiden Pole jeder gegebenen geraden Linie, so wie die beiden Polaren jedes gegebenen Punctes, zusammenfallen. Dieſs setzt voraus, daſs alsdann an die Stelle der beiden zur Vermittelung der Construction dienenden Kegelschnitte ein einziger tritt, damit die Pole der Tangenten dieses einzigen Kegelschnittes beide in den Berührungspuncten auf denselben zusammenfallen. Hiernach tritt uns die doppelte Aufgabe entgegen: wenn die Reciprocität zweier Systeme durch zwei concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte geometrisch bestimmt ist, die beiden Systeme durch die Drehung des einen um den gemeinschaftlichen Mittelpunct in die, eben näher bezeichnete, gegenseitige Lage zu bringen, und dann den einzigen Kegelschnitt zu construiren, der allein, in dieser Lage der Systeme, zur Bestimmung der Reciprocität hinreicht.

In der beigefügten 19. Figur sind für die beiden gegebenen Kegelschnitte zwei con- Fig. 19.
centrische Kreise genommen. Wenn wir alsdann einen dritten (den in der Figur am stärksten ausgedrückten) Kreis beschreiben, dessen Radius mittlere Proportionale zwischen den Radien der beiden gegebenen Kreise ist, so überzeugt man sich mit leichter Mühe, daſs die beiden Polaren jedes Punctes dieses dritten Kreises eben diesen Kreis berühren. In dem ersten Systeme sind zum Beispiel die Polaren der Puncte Q, M″, N, M′, bezüglich die Tangenten in M″, N, M′, P; im zweiten Systeme sind die Polaren der Puncte P, M′, N, M″ bezüglich die Tangenten in M′, N, M″, Q. Drehen wir hiernach das erste System um den gemeinschaftlichen Mittelpunct so, daſs der Punct M′ nach N rückt, so fällt die Polare von N im ersten Systeme in die Tangente in N, die gerade Linie MM. Drehen wir ferner das zweite System nach entgegengesetzter Richtung so, daſs der Punct M″ nach N rückt, so fällt auch die Polare von N im zweiten System in die gerade Linie MM. Nach dieser zwiefachen Drehung fallen also die beiden Polaren des Punctes N zusammen, und zwar in eine solche gerade Linie, welche durch diesen Punct geht. Es ist klar, daſs in der neuen Lage der beiden Systeme gegen einander die Polare jedes Punctes des dritten Kreises die Tangente desselben in diesem Puncte und der Kreis selbst also der zu bestimmende Kegelschnitt ist.

Statt die Systeme beide, nach entgegengesetzter Richtung, zu drehen, brauchen wir bloſs eines derselben um einen Winkel, der durch den Bogen M′M″ des dritten Kreises gemessen wird, zu drehen, und zwar, entweder das erste nach der Richtung von M′ zu M″, oder das zweite nach der entgegengesetzten Richtung von M″ zu M′. Dieser Winkel wird offenbar auch durch denjenigen Bogen des ersten gegebenen Kreises gemessen, welcher durch eine beliebige Tangente an den zweiten Kreis bestimmt wird.

Wenn wir den ersten und zweiten gegebenen Kreis gegenseitig mit einander vertau-

tauschen, so dafs der zweite Kreis den gröfsern Durchmesser erhält, so wird der dritte Kreis imaginär, und wir erhalten also einen einzigen imaginären Kegelschnitt zur Polar-Bestimmung, die nichts desto weniger immer reell bleibt.

Da nach jeder affinen Umgestaltung zwei ursprünglich reciproke Systeme immer reciprok bleiben, und auch, wenn sie die in Rede stehende Lage ursprünglich haben, dieselbe beibehalten, so ist klar, dafs, wenn statt der beiden Kreise irgend zwei concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, zur Bestimmung der Reciprocität, gegeben sind, bei gehöriger Drehung der Systeme an die Stelle der beiden Ellipsen eine einzige diesen ähnliche Ellipse tritt, deren Durchmesser mittlere Proportionalen zwischen den jedesmaligen beiden entsprechenden Durchmessern der beiden gegebenen Ellipsen sind.

Fig. 20. Um noch mehr Licht über die Natur der Reciprocität zu verbreiten, wollen wir schliefslich noch den Fall betrachten, dafs der Contact der beiden zur Bestimmung derselben dienenden Kegelschnitte auf einem gemeinsamen Durchmesser derselben Statt findet, und zwar für den ersten Kegelschnitt einen Kreis, für den zweiten eine Ellipse nehmen. Zuvörderst müssen wir indefs eine allgemeine Bemerkung vorausschicken, die sich auf einen Unterschied in der Polar-Bestimmung, je nachdem die beiden Kegelschnitte einen imaginären oder reellen Contact haben, bezieht. Wenn nemlich, in dem Falle eines imaginären Contactes, auf welchen die bisher beigefügten Figuren Bezug haben, ein Punct den Umfang des ersten (äufsern) Kegelschnittes durchläuft, so umhüllt die Polare dieses Punctes in jedem der beiden Systeme den zweiten Kegelschnitt, indem sie immer in demselben Sinne sich fortbewegt, und der Sinn der Bewegung ändert sich blofs von dem einen Systeme zum andern. Wenn aber, in dem Falle eines reellen doppelten Contactes, ein Punct den ersten (äufsern) Kegelschnitt in demselben Sinne durchläuft, so umhüllt die Polare dieses Punctes in jedem der beiden Systeme den zweiten Kegelschnitt, indem sie von einem Berührungspuncte zum andern in demselben Sinne, von diesem Berührungspuncte zu jenem aber in entgegengesetztem Sinne sich fortbewegt. In der 20. Figur haben die geraden Linien $N_{,}N''$, $N'N_{,,}$, $P_{,}P''$, $P'P_{,,}$ zu Polen in einem Systeme, das wir als das erste bezeichnen wollen, die Puncte $N_{,}$, N', $P_{,}$, P' und im zweiten Systeme die Puncte N'', $N_{,,}$, P'', $P_{,,}$.

Die beiden gegebenen Kegelschnitte haben bekanntlich zwei zugeordnete Durchmesser gemeinschaftlich, von welchen der eine durch die beiden Berührungspuncte geht. In diesen Durchmesser fallen die beiden Polaren desjenigen Punctes, der nach der Richtung des andern Durchmessers unendlich weit liegt, zusammen, so dafs auf demselben die beiden Mittelpuncte der beiden Systeme liegen. Um diese Mittelpuncte vollständig zu bestimmen, können wir nach beliebiger Richtung an den zweiten Kegelschnitt zwei parallele Tangenten, etwa $N_{,}N''$ und $P_{,}P''$, ziehen und die vier Durchschnittspuncte dieser beiden Tangenten mit dem ersten Kegelschnitte durch die beiden geraden Linien $N_{,}P_{,}$ und $N''P''$ verbinden. Auf diesen geraden Linien liegen alsdann die beiden gesuchten Mittelpuncte $C_{,}$ und $C_{,,}$ im ersten und zweiten Systeme.

Wenn wir ferner von irgend einem Puncte Q desjenigen zugeordneten Durchmessers der beiden Kegelschnitte, der nicht durch die beiden Berührungspuncte geht, zwei Tangenten an den zweiten Kegelschnitt legen, und diese den ersten Kegelschnitt in den vier Puncten $N_{,}$ und N', N'' und $N_{,,}$ schneiden, so sind die beiden Polaren des Punctes Q in den beiden Systemen diejenigen beiden geraden Linien $N_{,}N'$ und $N''N_{,,}$, welche die, auf derselben Seite des letztgenannten Durchmessers liegenden, beidesmaligen Durchschnittspuncte verbinden. Wenn, wie in dem Falle der Figur, die beiden zugeordneten Durch-

messer auf einander senkrecht stehen, so können wir das erste System durch eine Drehung um den Durchmeser CQ, als um eine feste Axe, so umwenden, dafs, nach der Umwendung, während der Punct Q unverändert dieselbe Lage behalten hat, die beiden Polaren dieses Punctes in den beiden Systemen, N_iN' und $N''N_u$, zusammenfallen. Auf gleiche Weise fallen alsdann die beiden Polaren jedes Punctes des besagten Durchmessers zusammen, und hiernach die beiden Polaren jedes beliebigen Punctes. Nach der Umwendung fällt alsdann der Mittelpunct des ersten Systems C_i in den Mittelpunct des zweiten Systems C_u.

Derjenige Kegelschnitt, welcher, nach der Umwendung, allein zur Polar-Bestimmung hinreicht, hat offenbar den gemeinschaftlichen Mittelpunct der beiden reciproken Systeme auch zu dem seinigen, und zwei zugeordnete Durchmesser desselben haben mit denjenigen beiden, welche den beiden ursprünglich gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlich sind, dieselbe Richtung. Zur vollständigen Bestimmung dieses dritten Kegelschnittes reicht es hin, zwei gerade Linien zu kennen, die durch ihre Pole gehen. Offenbar aber ist eine solche gerade Linie diejenige Linie M'M'', welche mit C_iC_u parallel ist und den zweiten gegebenen Kegelschnitt berührt, und auf ihr M'' der Pol. Eine zweite solche gerade Linie ist ferner diejenige Tangente des zweiten Kegelschnittes, welche durch R, einen Durchschnitt des Durchmessers CQ mit dem ersten Kegelschnitt, geht, und auf ihr R der Pol. Der zu bestimmende Kegelschnitt berührt also die beiden geraden Linien M'M'' und RG bezüglich in M'' und R; er ist, im Falle der Figur, die stärker ausgedrückte Hyperbel.

Nach den letzten Entwicklungen müssen wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden: es können zwei reciproke Systeme entweder eine solche Lage haben, dafs eine blofse Verrückung eines der beiden Systeme hinreicht, damit die zwiefache Polar-Bestimmung identisch dieselbe werde; oder die Lage derselben kann von der Art sein, dafs überdiefs auch noch eine Umwendung eines der beiden Systeme hierzu erforderlich ist. Man sieht leicht ein, dafs, überhaupt, der Contact der beiden zur Construction der Pole und Polaren dienenden Kegelschnitte ein imaginärer im ersten und ein reeller im zweiten Falle ist. Zwischen diesen beiden Fällen bildet der Fall, dafs die beiden Kegelschnitte sich vierpunctig osculiren, den Uebergang, und bezeichnet somit eine eigenthümliche Art der Reciprocitäts-Verwandtschaft.

Wenn wir diejenige Polar-Bestimmung, die in den beiden Systemen identisch dieselbe ist, zu Grunde legen, so erhalten wir diejenigen Constructionen, auf welche die Herren Poncelet und Gergonne zuerst das Princip der Reciprocität gegründet haben. Die Reciprocität hängt alsdann nur von einem einzigen Kegelschnitte, nur von fünf Constanten ab, während dieselbe, wie ich sie zuerst, unbekannt mit den bezüglichen Arbeiten der beiden eben genannten Geometer und bald nachher aus der Variation der Constanten abgeleitet habe, von acht Constanten abhängt. Herr Magnus hat hierauf zuerst gezeigt, dafs sich, durch eine schickliche Lagen-Aenderung des einen Systems gegen das andere, der allgemeine Fall immer auf den besondern zurückführen läfst. In dem Vorstehenden habe ich neue Beziehungen angedeutet, die, weiter auszuführen, die Absicht dieser Schrift verbietet.

Zweiter Abschnitt.

Die Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe.

§. 1.

Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen.

104. Es sei:

$$\varphi^2 + 2\alpha\varphi\psi + \beta\psi^2 + 2\gamma\varphi + 2\delta\psi + \varepsilon = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen den beiden veränderlichen Gröfsen φ und ψ, denen wir vorerst durchaus keine geometrische Bedeutung unterlegen wollen. Wir haben dem ersten Gliede keinen Coefficienten gegeben, damit die Anzahl der unbestimmten Coefficienten sich auf die nothwendige reducire. Wollten wir diesem Gliede dennoch für besondere Zwecke irgend einen Coefficienten $\varkappa$ hinzufügen, so hiefse das, die ursprünglichen Werthe der Constanten durch $\varkappa$ dividiren. Hiernach können wir von der einen Annahme unmittelbar zur andern übergehen; eine homogene Bedingungs-Gleichung zwischen den ursprünglichen Coefficienten, zum Beispiel $\beta\gamma = \alpha\delta$, bleibt in der neuen Annahme unverändert dieselbe, eine nicht homogene mufs durch Hinzufügung von $\varkappa$ homogen gemacht, zum Beispiel die Gleichung: $\alpha^3 = \beta$, in folgende: $\alpha^3 = \varkappa\beta$, verwandelt werden.

An die Stelle der vorstehenden Gleichung kann man, im Allgemeinen, jede andere setzen, welche ebenfalls vom zweiten Grade ist und fünf unbestimmte, von einander unabhängige Constante enthält. Zugleich lassen sich, indem man die beiden Gleichungen als identische betrachtet, die neuen Coefficienten durch die ursprünglichen bestimmen. Für jede besondere Annahme bleibt dann die Untersuchung, ob die fünf Gleichungen, die man auf diesem Wege zur Bestimmung der fünf neuen Constanten erhält, von der Art sind, dafs diese Bestimmung überhaupt und insbesondere auf lineare Weise möglich ist, und dann ferner, in welchen Fällen die neuen Constanten reelle oder imaginäre Werthe erhalten, und ob es besondere Fälle gibt, in welchen sie unbestimmbar werden.

Wir wollen hier die Gleichung von folgender Form annehmen:

$$(\varphi + a\psi + b)(\varphi + a'\psi + b') + \mu = 0, \qquad (2)$$

deren erster Theil das Product zweier ganzen und linearen Functionen, jede mit zwei Constanten, ist, und die aufserdem noch eine unabhängige Constante enthält. Es ist diefs die einfachste Weise, eine Gleichung zweiten Grades zu bilden, in welcher, statt der ursprünglichen beiden veränderlichen Gröfsen φ und ψ, ganze und lineare Functionen derselben, und zugleich dieselbe Anzahl von Constanten vorkommen.

105. Wenn wir die vorstehende Gleichung entwickeln und die Coefficienten der entwickelten Gleichung den entsprechenden Coefficienten in der ursprünglichen gleich setzen, so kommt:

$$\begin{aligned} a+a' &= 2\alpha, \\ aa' &= \beta, \\ b+b' &= 2\gamma, \\ ab'+a'b &= 2\delta, \\ bb'+\mu &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Zuvörderst sehen wir, dafs wir aus diesen Gleichungen, im Allgemeinen, die fünf neuen Constanten durch die ursprünglichen ausdrücken können. Denn die beiden ersten dieser Gleichungen geben a und a', dann die beiden folgenden b und b' und endlich die letzte c.

Die beiden Gleichungen:

$$a+a' = 2\alpha, \qquad aa' = \beta, \tag{3}$$

zeigen, dafs (—a) und (—a') die beiden Wurzeln einer und derselben Gleichung zweiten Grades sind, nemlich der folgenden:

$$z^2+2\alpha z+\beta = 0,$$

und dafs also die Werthe der beiden ersten Constanten reell, einander gleich oder imaginär sind, je nachdem

$$\alpha^2-\beta>0, \qquad \alpha^2-\beta = 0, \qquad \alpha^2-\beta<0.$$

Sobald a und a' bekannt sind, geben die beiden Gleichungen:

$$b+b' = 2\gamma, \qquad ab'+a'b = 2\delta, \tag{4}$$

die Werthe der beiden Constanten b und b'. Und zwar ist diese Bestimmung durch endliche Werthe und auf einzige Weise immer möglich, mit Ausschlufs des Falles, dafs $a = a'$, oder, was dasselbe heifst, dafs

$$\alpha^2-\beta = 0. \tag{5}$$

In diesem Ausnahms-Falle ist:

$$ab'+a'b = a(b+b') = 2a\gamma = 2\alpha\gamma,$$

und mithin kommt:

$$\delta-\alpha\gamma = 0. \tag{6}$$

Wenn diese letzte Bedingungs-Gleichung zwischen den ursprünglichen Constanten nicht Statt findet, so können die beiden Gleichungen (4) nur durch unendliche Werthe von b und b' zugleich befriedigt werden; wenn sie Statt findet, so werden diese beiden Gleichungen identisch, so dafs wir erst eine der beiden Constanten b und b' willkührlich annehmen müssen, um die andere zu bestimmen. Wenn wir die Werthe dieser Constanten aus den Gleichungen (4) wirklich herleiten, so ergibt sich:

$$b = 2.\frac{\delta-a\gamma}{a'-a}, \qquad b' = 2.\frac{\delta-a'\gamma}{a-a'}.$$

Es sind diese Werthe also reell oder imaginär, je nachdem a und a' reell oder imaginär sind; sie werden unendlich, wenn $a = a'$, und demnach die Gleichung (5) Statt findet, und erscheinen unter der Form $\frac{\varrho}{0}$, wenn zugleich die Bedingungs-Gleichung (6) befriedigt wird. Aus den letzten beiden Gleichungen erhält man:

$$bb' = -4.\frac{\delta^2-(a+a')\delta\gamma+aa'\gamma^2}{(a'-a)^2},$$

und hieraus:

$$bb' = -\frac{\delta^2 - 2\alpha\delta\gamma + \beta\gamma^2}{\alpha^2 - \beta}.$$

Endlich bleibt uns nur noch die fünfte Constante μ zu bestimmen übrig. Es ist

$$\mu = \varepsilon - bb',$$

und wenn wir in diese Gleichung für bb' den vorstehenden Ausdruck substituiren, finden wir:

$$\mu = \frac{\delta^2 - 2\alpha\delta\gamma + \beta\gamma^2 + (\alpha^2 - \beta)\varepsilon}{\alpha^2 - \beta}. \tag{7}$$

Der Werth μ ist also immer reell, es mögen a und a', b und b' reell oder imaginär sein, und immer ein einziger, vollkommen bestimmter, wenn b und b' bestimmte Werthe haben. Wenn $\mu = 0$ ist, so zerfällt der erste Theil der Gleichung (2), und also auch der ihr identischen Gleichung (1), in zwei Factoren des ersten Grades. Dieſs findet also Statt, wenn

$$\delta^2 - 2\alpha\delta\gamma + \beta\gamma^2 + (\alpha^2 - \beta)\varepsilon = 0, \tag{8}$$

und insbesondere auch, wenn diese Bedingungs-Gleichung in die folgenden beiden sich auflöset:

$$\delta - \alpha\gamma = 0, \qquad \alpha^2 - \beta = 0. \tag{9}$$

In diesem letztern Falle stellt sich der Werth für μ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ dar, weil wir zur Bestimmung der beiden Constanten b und b', von welchen μ abhängt, nur eine einzige Gleichung haben. Wir können irgend eine zweite Gleichung zur Bestimmung dieser Constanten willkührlich hinzunehmen und insbesondere

$$bb' = \varepsilon$$

setzen. Bei dieser Annahme, wodurch $(-b)$ und $(-b')$ Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichung werden:

$$z^2 + 2\gamma z + \varepsilon = 0,$$

verschwindet die Constante μ.

106. Wir sehen aus den vorstehenden Entwicklungen, dafs die gegebene Gleichung (1) sich immer auf die Form der Gleichung (2) bringen läfst, sowohl wenn $\alpha^2 - \beta > 0$, als auch wenn $\alpha^2 - \beta < 0$, nur dafs die beiden linearen Functionen

$$(\varphi + a\psi + b), \qquad (\varphi + a'\psi + b')$$

im ersten Falle reell, im zweiten imaginär sind. In dem zweiten Falle, wo die beiden linearen Functionen imaginär sind, ist ihr Product, das immer der reellen Gröfse $(-\mu)$ gleich ist, nothwendig positiv, und wenn daher in diesem Falle μ einen positiven Werth erhält, das heifst, wenn

$$\delta^2 - 2\alpha\delta\gamma + \beta\gamma^2 + (\alpha^2 - \beta)\varepsilon < 0, \tag{10}$$

so ist es durchaus unmöglich, die gegebene Gleichung (1) durch irgend zwei reelle Werthe von φ und ψ zu befriedigen.

In dem Falle der Gleichung (5), der als ein Gränz-Fall zwischen den beiden Fällen, dafs $\alpha^2 - \beta > 0$ und $\alpha^2 - \beta < 0$, sich darstellt, behält die umgeformte Gleichung (2) ihre Bedeutung nur in so fern, dafs auch sie als eine Gränze, als ein Uebergang zwischen zwei entgegengesetzten Fällen betrachtet wird. Diesen Gesichtspunct wollen wir festhalten, zugleich aber, da die Form der Gleichung (2) ihre absolute Bedeutung verliert, sie durch die folgende Form ersetzen:

$$(y + ax + b)^2 + \lambda(y + cx + d) = 0. \tag{11}$$

Diese neue Form ist der Bedingungs-Gleichung (5) entsprechend gewählt, und man erhält

sogleich $a = \alpha$. Durch diese Bedingungs-Gleichung reducirt sich aber die Anzahl der Constanten in der ursprünglichen Gleichung auf vier, so dafs die vorstehende Form eine Constante mehr enthält, als Constante bestimmt werden können. Man erhält nemlich zwischen den vier Constanten b, c, d und λ blofs die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2b+\lambda &= 2\gamma, \\ 2ab+\lambda c &= 2\delta, \\ b^2+\lambda d &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Wenn wir die Constante b willkührlich annehmen, so geben diese drei Gleichungen der Reihe nach λ, c und d auf linearem Wege. Die allgemeine Gleichung (1) kann also in dem vorliegendem Falle auf unendlichmalige Weise auf die Form (11) gebracht werden. Diese Umformung wird eine vollkommen bestimmte und lineare, nachdem wir b, oder auch, wie man leicht sieht, statt dieser Constante, λ oder c willkührlich angenommen haben.

§. 2.

Theorie der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe.

107. Wenn wir in der im vorigen Paragraphen discutirten Gleichung:

$$\varphi^2+2\alpha\varphi\psi+\beta\psi^2+2\gamma\varphi+2\delta\psi+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$

die fünf Constanten als unbestimmte ansehen, so stellt dieselbe, mit vollkommen gleicher Allgemeinheit, einerseits alle möglichen Oerter zweiter Ordnung, was für lineare Punct-Coordinaten, und andrerseits alle möglichen Oerter zweiter Classe dar, was für lineare Linien-Coordinaten die beiden veränderlichen Gröfsen φ und ψ auch bedeuten mögen. Bei jeder willkührlichen Coordinaten-Bestimmung lassen sich diejenigen Fälle, in welchen, einerseits, die Oerter zweiter Ordnung Systeme von zwei geraden Linien, und, andrerseits, die Oerter zweiter Classe Systeme von zwei Puncten sind, von vorne herein absondern, und zwar vermittelst der Bedingungs-Gleichung:

$$\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon = 0,$$

welche ausdrückt, dafs alsdann der erste Theil der gegebenen Gleichung in zwei Factoren des ersten Grades zerfällt. Mit Ausschlufs dieser Fälle sind alle fraglichen Oerter Curven im engern Verstande, und eine Curve zweiter Ordnung ist zugleich immer auch eine Curve zweiter Classe, und umgekehrt (103). Deshalb wollen wir diese Curven zugleich aus dem doppelten Gesichtspuncte betrachten, indem wir uns dieselben einmal als von einem Puncte beschrieben, das andere Mal als von einer geraden Linie umhüllt denken. Die Curve ist imaginär, wenn die Coordinaten des beschreibenden Punctes, oder auch wenn die Coordinaten der umhüllenden geraden Linie niemals reell werden. Wir erhalten also für diesen Fall, bei jeder beliebigen Coordinaten-Bestimmung, die Bedingungen:

$$\alpha^2-\beta<0, \qquad \delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon<0.$$

Alle übrigen Bedingungen, welche uns bei der Discussion der allgemeinen Gleichung entgegengetreten sind, erhalten nach verschiedenartiger Coordinaten-Bestimmung eine verschiedenartige geometrische Deutung.

108. Die allgemeine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Gröfsen φ und ψ kön-

nen wir nach den vorhergehenden Entwicklungen, im Allgemeinen, auf die nachstehende Form bringen:

$$\eta\xi + \mu = 0, \qquad (2)$$

indem wir

$$\varphi + a\psi + b \equiv \eta, \qquad \varphi + a'\psi + b' \equiv \xi,$$

setzen. Statt φ und ψ enthält diese neue Gleichung blofs zwei ganze und lineare Functionen dieser Gröfsen, deren Construction von der geometrischen Bedeutung, die wir jenen ursprünglichen beiden veränderlichen Gröfsen beilegen, abhängt. Da aber die Gleichung (1), für jede beliebige ursprüngliche Coordinaten-Bestimmung, dieselbe Allgemeinheit behält, so können wir auch den beiden linearen Functionen η und ξ irgend eine beliebige Coordinaten-Bedeutung beilegen, und umgekehrt alsdann von dieser die Construction der ursprünglichen Coordinaten uns abhängig denken. Diese Abhängigkeit selbst kommt nur in so fern in Betracht, als vorausgesetzt werden mufs, dafs die Bestimmung von φ und ψ durch η und ξ möglich und von der Art ist, dafs ein Punct, oder bezüglich eine gerade Linie, durch φ und ψ bestimmt werden kann. Jede neue Coordinaten-Annahme, die wir alsdann über η und ξ machen, gibt der Gleichung (2) eine neue, durch die jedesmalige Coordinaten-Bestimmung vermittelte, geometrische Bedeutung, so dafs dieselbe jedesmal die Aussage einer neuen characteristischen und allgemeinen Eigenschaft der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe enthält. Die ganze Discussion dieser Curven liegt darin, dafs wir einer einzigen einfachen Gleichung eine verschiedenfache Deutung geben, während man, nach der gewöhnlichen Art zu verfahren, die Form der Gleichung ändert, indem man entweder dieselben Coordinaten beibehält, oder dieselben nach ganz speciellen Voraussetzungen in andere verwandelt, und dann jede neue Form, zu welcher man auf dem Wege der Rechnung gelangt ist, geometrisch interpretirt.

109. Die oben gemachten Beschränkungen müssen wir noch näher ins Auge fassen; dabei wollen wir aber von denjenigen Fällen, wo der erste Theil der allgemeinen Gleichung in zwei Factoren des ersten Grades sich auflöset, ganz abstrahiren. Die beiden veränderlichen Gröfsen φ und ψ lassen sich hiernach durch η und ξ offenbar nur dann nicht bestimmen, wenn sie beide unendlich werden, und dieſs geschieht, wenn nach der bisherigen Bezeichnung a und a' einander gleich sind, oder wenn zwischen den Constanten der ursprünglichen Gleichung die Bedingung:

$$\alpha^2 - \beta = 0$$

Statt findet. Bei jeder veränderten Coordinaten-Bestimmung erhalten die Coefficienten der Gleichung (1) andere Werthe, wenn diese Gleichung dieselbe Curve als früher darstellen soll, und dann wird im Allgemeinen auch die vorstehende Bedingungs-Gleichung nicht mehr befriedigt, wenn sie es ursprünglich wurde, und überhaupt die Veränderung der Coordinaten-Bestimmung auf die beiden Coefficienten α und β Einfluſs hat. Wir brauchen also in dem Falle, dafs für eine besondere Coordinaten-Bestimmung, für eine besondere Curve oder eine besondere Art von Curven die letzte Bedingungs-Gleichung Statt findet, blofs die Bedeutung von φ und ψ zu ändern, damit die fragliche Umformung möglich werde. Wir können insbesondere, während wir η und ξ in ihrer frühern geometrischen Bedeutung beibehalten, φ und ψ rückwärts durch die Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi + a\psi + b} = \eta, \qquad \frac{\varphi + a'\psi + b'}{\varphi + a\psi + b} = \xi$$

bestimmen. Diese Gleichungen geben

$$\varphi+a\psi+b=\frac{1}{\eta}, \qquad \varphi+a'\psi+b'=\frac{\xi}{\eta},$$

und folglich erhält man folgende Form, auf welche die gegebene Gleichung sich reducirt·

$$\frac{\xi}{\eta^2}+\mu=0,$$

oder, statt derselben, indem man zugleich $\frac{1}{\mu}=\lambda$ setzt:

$$\eta^2+\lambda\xi=0. \tag{3}$$

Diese Gleichung stellt also, in Uebereinstimmung mit den directen Entwicklungen des ersten Paragraphen, alle diejenigen Curven dar, deren Gleichung sich bei einer bestimmten Coordinaten-Annahme, nicht auf die Form (2) bringen läfst.

110. Wenn man die Gleichung (2) mit irgend einer linearen Gleichung zwischen η und ξ:

$$A\eta+B\xi+C=0, \tag{4}$$

zusammenstellt, so gibt es immer zwei Paare von Werthen für diese Gröfsen, welche zugleich beide Gleichungen befriedigen. Die beiden Werthe für jede dieser veränderlichen Gröfsen stellen sich als die Wurzeln einer Gleichung des zweiten Grades dar. Wenn diese Gleichung durch eine besondere Constanten-Bestimmung in der letzten Gleichung (4) sich auf den ersten Grad reducirt, so geschieht diefs blofs deshalb, weil die Spur der einen Wurzel, dadurch, dafs sie unendlich wird, aus der algebraischen Bezeichnung verschwunden ist, und wenn dieselbe Gleichnung sich auf eine blofse Constante reducirt, so geschieht diefs blofs deshalb, weil beide Wurzeln unendlich sind. Der erste Fall tritt, in Beziehung auf die Werthe von η zum Beispiel, dann ein, wenn wir $A=0$ nehmen, der zweite Fall, wenn wir zugleich auch $C=0$ setzen. Das Characteristische der Form der Gleichung (2) besteht hiernach darin, dafs, wenn wir nach einander

$$\eta=0, \qquad \xi=0, \tag{5}$$

setzen, die resultirenden Werthe der jedesmaligen andern dieser beiden veränderlichen Gröfsen beide unendlich werden.

Während also, indem η und ξ Punct-Coordinaten bedeuten, jede durch die Gleichung (4) dargestellte gerade Linie die vorgelegte Curve (2) in zwei Puncten schneidet, wird die Curve insbesondere von der geraden Linie $\eta=0$ in solchen zwei Puncten geschnitten, für welche die Werthe von ξ, und von der geraden Linie $\xi=0$ in solchen zwei Puncten, für welche die Werthe von η beide unendlich sind. Wenn η und ξ Coordinaten der allgemeinsten Bestimmungsweise, die wir in der 7. Nummer durch $\frac{q}{r}$ und $\frac{p}{r}$ dargestellt haben, bedeuten, so geht die Gleichung (2) in die folgende über:

$$pq+\mu r^2=0, \tag{6}$$

und die Gleichung (3) in:

$$pr+\mu q^2=0.$$

Diese beiden neuen Gleichungen haben ganz dieselbe Form und enthalten daher die Aussage einer und derselben allgemeinen Eigenschaft der fraglichen Curven. Es ist blofs die eine der beiden linearen Functionen, q und r, an die Stelle der andern getreten. Wir können also durch jede der beiden vorstehenden Gleichungen, ohne Ausnahme, alle Curven der zweiten Ordnung darstellen.

Wenn η und ξ solche Coordinaten bedeuten, die wir als ganze und lineare Functio-

nen der gewöhnlichen Parallel-Coordinaten betrachten können, und die wir durch q und p dargestellt haben, so stellen die beiden Gleichungen:

$$q = 0, \qquad p = 0, \tag{7}$$

welche alsdann an die Stelle der Gleichungen (5) treten, zwei solche gerade Linien dar, deren Durchschnitte mit der Curve unendlich weit liegen; denn die Werthe von q und p können nur dann unendlich werden, wenn die bezüglichen Puncte unendlich weit entfernt sind. Solcher geraden Linien gibt es nach dem vorigen Paragraphen nur zwei: sie heifsen die Asymptoten der Curve. Diese Curve selbst heifst Hyperbel, wenn die Asymptoten reell, und Ellipse, wenn die Asymptoten imaginär sind. Dem in Rede stehenden Falle entspricht die Gleichung:

$$pq + \mu = 0.$$

Aufser dieser Gleichung müssen wir aber auch noch die folgende betrachten:

$$q^2 + \lambda p = 0,$$

um keine Art von Curven zweiter Ordnung aufser Acht zu lassen. Es folgt aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen, dafs die beiden Asymptoten, in diesem Ausnahms- und Uebergangs-Falle, unter sich und mit der geraden Linie: $q = 0$, parallel sind, aber unendlich weit liegen. Die Curve heifst alsdann Parabel. Man kann eine Parabel auf unendlichfache Weise durch eine Gleichung der vorstehenden Form ausdrücken. Hierbei rückt die Linie: $q = 0$, die ein Durchmesser der Parabel heifst, parallel mit sich selbst, fort.

111. Die Gleichung

$$pq + \mu = 0 \tag{8}$$

hat ganz dieselbe Allgemeinheit, als die Gleichung (1), obgleich in ihr nur eine einzige Constante vorkommt, während die eben bezeichnete Gleichung fünf Constante enthält. Die vier auf diese Weise aus der Gleichung der Curve verschwundenen Constanten finden sich indefs in der neuen Coordinaten-Bestimmung wieder. Denn, wenn wir die ursprünglichen Constanten als unbestimmte ansehen, müssen wir die beiden geraden Linien: $q = 0$ und $p = 0$, ebenfalls als zwei beliebige betrachten, und die geometrische Bestimmung jeder geraden Linie fordert zwei gegebene Constanten. Indem wir also die Curve durch die Gleichung (8) darstellen, bestimmen wir dieselbe, statt durch fünf Constante, durch zwei gerade Linien und eine einzige Constante. Diese beiden geraden Linien stehen aber in einer bestimmten, und im vorliegenden Falle ausschliefslichen, Beziehung zu der darzustellenden Curve, während die ursprüngliche Coordinaten-Bestimmung ohne alle Rücksicht auf diese angenommen worden ist.

Diejenigen Curven, welche durch die Gleichung:

$$q^2 + \lambda p = 0,$$

dargestellt werden, werden ebenfalls durch zwei gerade Linien und eine Constante bestimmt. Da aber in diesem Falle dadurch, dafs zwischen zwei Constanten der ursprünglichen Gleichung eine Bedingungs-Gleichung Statt findet, die Zahl der Constanten auf vier sich reducirt, so enthält die neue Gleichung implicite eine Constante mehr als nothwendig ist, so dafs eine derselben willkührlich angenommen werden kann. Es stehen also noch die beiden geraden Linien: $q = 0$ und $p = 0$, nicht in einer ausschliefslichen Beziehung zur Curve, wir können, im Allgemeinen, eine dieser Linien irgend einer Bestimmung unterwerfen, etwa die Richtung der zweiten derselben willkührlich annehmen, und dann noch immer eine gegebene hierher gehörige Curve durch die vorstehende Gleichung darstellen.

112. Die beiden Functionen q und p sind dadurch, dafs die beiden geraden Linien (7) gegeben sind, noch nicht vollkommen bestimmt. Wenn wir wie früher, indem wir gewöhnliche Parallel-Coordinaten eines beliebigen Systems zur Vermittelung gebrauchen,

$$q = \varkappa(y + a'x + b'), \qquad p = \pi(y + ax + b)$$

setzen, so bleiben alsdann noch die beiden Coefficienten $\varkappa$ und π unbestimmt. Je nach den verschiedenen Voraussetzungen über diese Coefficienten ist die Gleichung:

$$pq + \mu = 0, \tag{8}$$

der analytische Ausdruck verschiedener Modificationen desselben geometrischen Satzes. Wenn $\varkappa$ und π insbesondere so angenommen werden, dafs q und p kürzeste Abstände bedeuten, so sagt die vorstehende Gleichung aus, „dafs das Product der beiden Abstände irgend eines beliebigen Punctes einer gegebenen Hyperbel von ihren beiden Asymptoten eine constante Gröfse ist.“ Nehmen wir jeden der beiden Coefficienten $\varkappa$ und π der Einheit gleich, und berücksichtigen zugleich, dafs jede beliebige gerade Linie als die Axe $x = 0$ ursprünglich angenommen werden kann, so ergibt sich, „dafs, wenn eine Hyperbel und eine dieselbe schneidende gerade Linie gegeben ist, das Product derjenigen beiden Segmente, die zwischen einem der Durchschnittspuncte der geraden Linie mit der Curve und den beiden Durchschnittspuncten mit den beiden Asymptoten liegen, constant ist, wie man auch die schneidende gerade Linie parallel mit sich selbst fortrücken mag.“ Aus jedem der beiden vorstehenden Sätze und jedem einer andern Coefficienten-Bestimmung entsprechenden analogen Satze folgt, dafs die durch (8) dargestellte Curve sich den beiden geraden Linien (7) immer mehr annähert. Ueberdiefs folgt aus dem letzten Satze unmittelbar, indem man erwägt, dafs eine Curve zweiter Ordnung von einer geraden Linie, im Allgemeinen, in zwei Puncten geschnitten wird, „dafs diejenigen beiden Segmente, welche auf irgend einer beliebigen geraden Linie zwischen ihren Durchschnitten mit einer gegebenen Hyperbel und deren Asymptoten liegen, einander gleich sind, und dafs insbesondere also eine, von den beiden Asymptoten begränzte, Tangente der Hyperbel, in ihrem Berührungspuncte, halbirt wird.“ Dieser neue Satz liefert eine möglichst einfache Construction einer Hyperbel, wenn ihre beiden Asymptoten und irgend ein Punct derselben gegeben ist. Wir erhalten nemlich sogleich auf jeder geraden Linie, welche durch den gegebenen oder irgend einen durch Construction schon gefundenen Punct der Hyperbel geht, einen zweiten Punct derselben. Statt des Punctes kann auch eine Tangente der Hyperbel gegeben sein, weil wir den Berührungspunct alsdann sogleich finden können. Ebenso können wir in jedem Puncte der Curve, indem wir blofs die beiden Asymptoten als gegeben betrachten, die Tangente construiren.

Bei jeder beliebigen Annahme der beiden Coefficienten $\varkappa$ und π zeigt die Gleichung (8), dafs jede gerade Linie, welche durch den Durchschnitt der beiden Asymptoten (7), der immer reell ist, wenn die Asymptoten selbst auch imaginär sind, geht, die Curve in solchen zwei reellen oder imaginären Puncten schneidet, deren Mitte jener Durchschnitt ist. Es heifst dieser der Mittelpunct der Curve. Jede durch den Mittelpunct gehende gerade Linie heifst ein Durchmesser der Curve. Wenn von der Gröfse eines Durchmessers die Rede ist, denkt man sich denselben in seinen beiden Durchschnittspuncten mit der Curve begränzt; es ist derselbe reell oder imaginär, je nachdem diese Durchschnittspuncte reell oder imaginär sind.

113. Wir wollen als letztes Beispiel die vorliegende Gleichung (8) auch noch in der am Ende der 24. Nummer berührten Coordinaten-Bestimmung geometrisch deuten; nach dieser Bestimmung bedeuten q und p diejenigen beiden Segmente, welche auf einer

beliebigen, durch den Durchschnitt der beiden Asymptoten (7) gehenden, geraden Linie, zwischen diesem Durchschnitte und denjenigen beiden geraden Linien liegen, welche durch den bezüglichen Punct, parallel mit den beiden Asymptoten, gelegt werden. Hiernach enthält die obige Gleichung den Satz, „dafs, wenn man durch einen beliebigen Punct einer gegebenen Hyperbel zwei gerade Linien den Asymptoten derselben parallel zieht, diese Linien auf irgend einem festen Durchmesser, vom Mittelpuncte an gerechnet, zwei solche Segmente bestimmen, deren Product constant und zwar dem Quadrate der Hälfte dieses Durchmessers gleich ist.“ Der letzte Theil dieses Satzes ergibt sich sogleich, wenn man für den beliebigen Punct der Hyperbel insbesondere den Scheitel jenes Durchmessers nimmt. Es knüpfen sich an diesen Satz wiederum mehrere Constructionen an; namentlich kann man, wenn die beiden Asymptoten und irgend ein Punct der Hyperbel gegeben sind, sogleich die Gröfse eines der Richtung nach gegebenen Durchmessers bestimmen.

Der letzte Satz läfst sich offenbar leicht aus einem beliebigen der Sätze der vorhergehenden Nummer geometrisch herleiten. Dieselbe geometrische Umwandlung liegt bei uns in der Coordinaten-Bestimmung und ist hier ein für alle Mal gemacht. Wir vermeiden auf diese Weise einen, in Beziehung auf Methode, grofsen Uebelstand; wir knüpfen nemlich nicht unmittelbar an die Curve Constructionen, die mit der Curve selbst durchaus in keiner Verbindung stehen. Ich mache gleich schon bei der ersten sich darbietenden Gelegenheit diese Bemerkung, welche in der Folge öfter noch, namentlich auch bei Gelegenheit der Lehre von den zugeordneten Durchmessern, welche zunächst uns entgegentreten wird, ihre Anwendbarkeit findet.

114. Wenn wir durch eine algebraische Transformation, statt der beiden linearen Functionen p und q, zwei andere lineare Functionen in der Gleichung der Curven zweiter Ordnung zur Evidenz bringen, so wird die eigenthümliche Natur dieser Curven zunächst durch die Vermittelung derjenigen beiden geraden Linien, welche den neuen Functionen entsprechen, statt durch die Vermittelung der beiden Asymptoten ausgedrückt. Wir können statt p und q, auch wenn diese Functionen imaginär sind, immer zwei solche einführen, die reell sind, und die Form der Gleichung der fraglichen Curven reell lassen. Alsdann wird also die unmittelbare geometrische Deutung sich nicht auf den Fall der Hyperbel beschränken, sondern sich gleichmäfsig auch auf den Fall der Ellipse ausdehnen.

Wir wollen, den in der 28. und den folgenden Nummern discutirten Umformungsweisen gemäfs,

$$p = t + w\sqrt{-1}, \qquad q = t - w\sqrt{-1},$$
$$t = u + \alpha v, \qquad w = v - \alpha u,$$

setzen, und erhalten alsdann durch bloſse Substitutionen (29) statt der obigen Gleichung:

$$pq + \mu = 0,$$

zunächst die folgende:

$$t^2 + w^2 + \mu = 0, \tag{1}$$

und dann ferner:

$$(1+\alpha^2)\{u^2 + v^2\} + \mu = 0. \tag{2}$$

Die Functionen t und w sind unmittelbar gegeben, sobald die geometrische Bedeutung der veränderlichen Gröfsen φ und ψ, von denen p und q abhängen, bestimmt ist. α ist eine unbestimmte Constante, von der die Bestimmung der Functionen u und v abhängig ist. Wir können jeder gegebenen Curve zweiter Ordnung auf unendlichmalige Weise die Form der Gleichung (2) geben.

Die vorstehende Umformung bezieht sich zunächst auf den Fall der Ellipse, wo p und q imaginär sind. Für den Fall der Hyperbel müssen wir α, w und v bezüglich mit $\alpha\sqrt{-1}$, $w\sqrt{-1}$ und $v\sqrt{-1}$ vertauschen, wenn fortwährend noch α eine reelle Constante und w und v reelle lineare Functionen bedeuten sollen. Wir erhalten alsdann:

$$p = t-w, \qquad q = t+w,$$
$$t = u-\alpha v, \qquad w = v-\alpha u;$$

und hiernach für die Gleichungen der Hyperbel:

$$t^2-w^2+\mu = 0, \tag{3}$$
$$(1-\alpha^2)\{u^2-v^2\}+\mu = 0, \tag{4}$$

115. Das Characteristische der Form der beiden Gleichungen (2) und (4) besteht darin, dafs jede dieser Gleichungen blofs die Quadrate der beiden Functionen u und v enthält, wonach, wenn wir nach einander jede dieser Functionen irgend einer Constanten gleichsetzen, für die jedesmalige andere Function zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe sich ergeben. Hieraus ziehen wir unmittelbar das Resultat, dafs jede der beiden geraden Linien, welche durch die folgenden beiden Gleichungen:

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

dargestellt werden, alle solche Chorden der Curve, welche der andern parallel sind, halbirt. Diese beiden geraden Linien sind Durchmesser der Curve; wir geben ihnen überdiefs den Namen zwei zugeordnete Durchmesser. Wenn die Curve eine Ellipse ist, begegnen beide zugeordnete Durchmesser der Curve (wenn μ positiv ist, stellt die die Gleichung (2) keine reelle Curve dar); wenn die Curve eine Hyperbel ist, begegnet ihr nur einer derselben. Es gibt unendlich viele Paare zugeordneter Durchmesser, die, bei schicklicher Annahme der unbestimmten Constanten α, alle durch die vorstehenden beiden Gleichungen dargestellt werden. Jeder Durchmesser hat seinen zugeordneten. Eine Reihe von Paaren zugeordneter Durchmesser einer Hyperbel bildet eine Involution der ersten Art, eine Reihe von zugeordneten Durchmessern einer Ellipse bildet eine Involution der zweiten Art (32). Es gibt unter den unendlich vielen Paaren zugeordneter Durchmesser, einer Ellipse sowol, als einer Hyperbel, immer ein Paar, dessen Durchmesser auf einander senkrecht stehen und die zur Unterscheidung die Axen der Curve genannt werden. Es gibt aber, im Allgemeinen, zwei Paare zugeordneter Durchmesser einer Curve zweiter Ordnung, die sich unter denselben gegebenen (nicht rechten) Winkeln schneiden. Diese Winkel können bei der Hyperbel, wo je zwei zugeordnete Durchmesser mit den beiden Asymptoten ein System von vier Harmonicalen bilden, durchaus beliebig angenommen werden; wenn die Gröfse derselben sich immer mehr von einem rechten Winkel entfernt, nähern sich die beiden, solche Winkel bildenden, zugeordneten Durchmesser einer der beiden Asymptoten immer mehr, mit der sie zusammenfallen. Wenn der Asymptoten-Winkel ein rechter ist, so heifst die Hyperbel eine gleichseitige, und dann werden die von irgend zwei zugeordneten Durchmessern gebildeten Winkel von den beiden Asymptoten halbirt. Für den Fall der Ellipse gibt es ein Maximum der Abweichung der Durchschnitts-Winkel zweier zugeordneten Durchmesser von einem rechten Winkel; diesem Maximum entsprechen zwei zusammenfallende Paare zugeordneter Durchmesser. Ein besonderer Fall ist derjenige, dafs zwei zugeordnete Durchmesser sich immer unter rechten Winkeln schneiden, in der Art, dafs je zwei auf einander senkrechte Durchmesser zugleich zugeordnete sind. Die Ellipse heifst alsdann Kreis, die allseitige Symmetrie des-

selben um seinen Mittelpunct stellt sich als eine unmittelbare Folge der eben erwähnten Eigenschaft derselben dar (35, 36).

116. Wenn wir die Voraussetzung machen, dafs u und v, so wie p und q lineare Functionen von der Form: $(\varphi + a\psi + b)$ bedeuten, und dieselben alsdann durch [u] und [v] unterscheiden, so kommt, zunächst für den Fall der Ellipse, nach der 40. Nummer:

$$[u]^2 \cos^2\chi + [v]^2 \sin^2\chi = C^2, \quad . \tag{5}$$

wenn wir zunächst $(-\mu)$ mit C^2 vertauschen. An die Stelle der unbestimmten Constanten α ist $tang\chi$ getreten; die Functionen [u] und [v] hängen also nun von dem Winkel χ ab; welchen Werth wir aber diesem Winkel auch beilegen mögen: es stellt die vorstehende Gleichung immer dieselbe Curve zweiter Ordnung dar, auf irgend ein beliebiges System zweier ihrer zugeordneten Durchmesser bezogen.

Wenn wir in der vorstehenden Gleichung nach einander jede der beiden Functionen [u] und [v] gleich Null setzen, und diejenigen besondern Werthe, welche sich für die jedesmalige andere Function ergeben, V und U nennen, so ergibt sich:

$$\cos^2\chi = \frac{C^2}{U^2}, \qquad \sin^2\chi = \frac{C^2}{V^2}; \tag{6}$$

und hieraus:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{U^2} + \frac{1}{V^2}. \tag{7}$$

Wir wollen diese Gleichung in der Voraussetzung, dafs φ und ψ beliebige gewöhnliche Parallel-Coordinaten y und x darstellen, geometrisch deuten. V und U bezeichnen alsdann diejenigen beiden geraden Linien, welche nach constanter Richtung, parallel mit der Ordinaten-Axe: $x = 0$, von einem Endpuncte des zweiten und ersten der durch die beiden Gleichungen:

$$[u] = 0, \qquad [v] = 0, \tag{8}$$

dargestellten zugeordneten Durchmesser bezüglich nach dem ersten und zweiten derselben gezogen werden können. Also:

„Wenn man nach constanter beliebiger Richtung von einem Endpuncte jedes von zwei zugeordneten Durchmessern einer Ellipse nach dem andern Durchmesser eine gerade Linie zieht, so ist die Quadrat-Summe der reciproken Werthe der beiden geraden Linien, welche man auf diese Weise erhält, constant und gleich dem reciproken Werthe von C^2, wie man auch die beiden zugeordneten Durchmesser mit irgend zwei andern vertauschen mag."

Die beiden Gleichungen (6) geben, wenn man χ, und mithin auch die frühere unbestimmte Constante α, gleich Null nimmt:

$$U = \pm C, \qquad V = \infty.$$

Wir sehen hieraus, dafs derjenige Durchmesser, dessen Lage durch die erste der beiden Gleichungen (8) dargestellt wird, alsdann der Ordinaten-Axe: $x = 0$, parallel ist, und dafs die Hälfte dieses Durchmessers gleich C ist. Die in diesem Falle durch die Gleichungen (8) dargestellten zugeordneten Durchmesser sind aber keine anderen als diejenigen, welche wir früher durch die beiden Gleichungen:

$$t = 0, \qquad w = 0,$$

dargestellt haben.

117. Wenn wir in die Gleichung (5) für $\cos^2\chi$ und $\sin^2\chi$, ihre durch die Gleichungen (6) gegebenen Werthe einsetzen, so wird diese Gleichung durch C^2 theilbar und wir erhalten alsdann:

$$\left\{\frac{[u]}{U}\right\}^2 + \left\{\frac{[v]}{V}\right\}^2 = 1.$$

Da ferner U und V besondere Werthe der bezüglichen Functionen [u] und [v] sind, und in der vorstehenden Gleichung nur die Quotienten von U in [u] und von V in [v] vorkommen, so können wir, ohne dafs die letzte Gleichung dadurch irgend eine Aenderung erleidet, statt durch [u] und [v] Functionen von der Form $(\varphi + a\psi + b)$ zu bezeichnen, diesen Functionen einen beliebigen constanten Coefficienten hinzufügen, und insbesondere also auch [u] und [v] als Parallel-Coordinaten construiren. In dieser letzten Voraussetzung bedeuten, wenn wir y und x bezüglich statt [u] und [v] einführen, U und V diejenigen beiden halben zugeordneten Durchmesser, welche in die jedesmalige Ordinaten- und Abscissen-Axe fallen. Nennen wir dieselben zur Unterscheidung B und A, so nimmt die letzte Gleichung, nach Fortschaffung der Nenner, die nachstehende Form an:

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

wo wir nach einander je zwei zugeordnete Durchmesser zu Coordinaten-Axen nehmen können.

118. Diejenige constante Gröfse, welche wir in der 33. Nummer a genannt haben, und die sich von einem Paare zugeordneter Durchmesser zu einem andern im Allgemeinen ändert, aber für dasselbe Paar bei allen Lagen der Ellipse unverändert bleibt, ist nach der eben eingeführten Bezeichnung gleich $\frac{B}{A}$. Es gibt also nach der eben angeführten Nummer für den Fall der Ellipse immer ein einziges System zweier gleicher zugeordneter Durchmesser, und diese schneiden sich unter solchen Winkeln, deren Abweichung von einem rechten ein Maximum ist. Beim Kreise sind alle Durchmesser einander gleich. Es erreicht a diejenigen Werthe, welche am meisten von der Einheit sich entfernen, wenn die bezüglichen beiden zugeordneten Durchmesser die beiden Axen sind (34).

Für den Fall der Hyperbel, wo $a(= a'\sqrt{-1})$ imaginär ist, ist also immer von je zwei zugeordneten Durchmessern einer imaginär. Die Gränze zwischen reellen und imaginären Durchmessern bilden die beiden Asymptoten. In jede derselben fällt ein Paar zugeordneter Durchmesser zusammen, und diese Durchmesser selbst werden an dieser Gränze unendlich. Nur für den Fall der gleichseitigen Hyperbel kann $a'^2(= -a^2)$ der Einheit gleich sein, und ist es alsdann für alle Paare zugeordneter Durchmesser. Im Allgemeinen gibt es für a' ein Maximum der Abweichung von der Einheit, und dieses findet für die beiden Axen der Hyperbel Statt. Es ist, wenn wir die Asymptoten-Winkel durch η bezeichnen, nach der 36. Nummer, durch die nachstehende Gleichung bestimmt:

$$a' = \frac{\cos\eta \pm 1}{\sin\eta}.$$

119. Wenn wir annehmen, dafs p und q Functionen von der Form $(y + ax + b)$ und dafs überdiefs einer der beiden gleichen zugeordneten Durchmesser parallel mit der ursprünglich angenommenen Axe: $x = 0$, sei, so erhalten wir nach der 48. Gleichung in der 40. Nummer für die Gleichung der bezüglichen Ellipse:

$$\frac{1+a^2}{2a^2}\{(u)^2 + a^2(v)^2\} = C^2,$$

wenn wir durch (u) und (v) Parallel-Coordinaten darstellen und a in der obigen Bedeutung nehmen. C bedeutet alsdann die Hälfte einer der beiden gleichen zugeordneten Durchmesser (116). Setzen wir nach einander (v) und (u) gleich Null, so sind B und A die bezüglichen Werthe von (u) und (v), und wir erhalten:

$$\frac{1+a^2}{2a^2}.B^2 = C^2, \qquad \frac{1+a^2}{2}.A^2 = C^2,$$

und hieraus:

$$A^2+B^2 = 2C^2.$$

Diese Gleichung, aus welcher a verschwunden ist, sagt aus: „dafs die Summe der Quadrate irgend zweier zugeordneten Durchmesser constant ist."

120. Die 49. Gleichung der oben angezogenen 40. Nummer gibt uns:

$$\frac{\sin\omega}{a\sin\vartheta}\{(u)^2+a^2(v)^2\} = C^2.$$

ω und $(\pi-\omega)$ bedeuten hierbei die Winkel, unter welchen zwei zugeordnete Durchmesser der Ellipse sich schneiden, und erhalten, wenn wir für diese die beiden gleichen nehmen, die besondern Werthe ϑ und $(\pi-\vartheta)$. Setzen wir eine der beiden linearen Functionen (v) und (u) gleich Null, so kommt beide Mal:

$$\frac{\sin\omega}{a\sin\vartheta}.B^2 = \frac{a\sin\omega}{\sin\vartheta}.A^2 = \frac{\sin\omega}{\sin\vartheta}.AB = C^2,$$

und hieraus:

$$AB\sin\omega = C^2\sin\vartheta.$$

Der erste Theil dieser Gleichung stellt den Inhalt eines Parallelogrammes dar, dessen zwei Seiten irgend zwei halbe zugeordnete Durchmesser der Ellipse sind. Das Vierfache dieses Inhaltes ist zugleich der Inhalt des der Ellipse umschriebenen Parallelogrammes, dessen Seiten denselben Durchmessern parallel sind. Also:

„Alle Parallelogramme, die einer gegebenen Ellipse umschrieben und deren Seiten irgend zweien zugeordneten Durchmessern derselben parallel sind, haben gleichen Inhalt."

121. Indem p und q immer noch lineare Functionen von der Form $(y+ax+b)$ bedeuten, wollen wir denjenigen halben Durchmesser irgend einer gegebenen Ellipse, welcher der Axe: $x = 0$, parallel ist, durch B', die Hälfte des ihm zugeordneten Durchmessers durch A', und den von B' und A' eingeschlossenen Winkel durch ω' bezeichnen; wir wollen ferner diejenigen beiden Winkel, welche irgend zwei andere halbe zugeordnete Durchmesser B und A mit dem Halb-Durchmesser B' bilden, δ' und δ nennen. Alsdann gibt endlich noch die 39. Nummer für die Gleichung der Ellipse, bezogen auf beliebige zugeordnete Durchmesser:

$$(u)^2\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\delta}\cos^2\chi+(v)^2\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\delta'}\sin^2\chi = B'^2.$$

Indem wir, nach einander, (v) und (u) gleich Null setzen, finden wir:

$$\cos^2\chi = \frac{B'^2\sin^2\delta}{B^2\sin^2\omega}, \qquad \sin^2\chi = \frac{B'^2\sin^2\delta'}{A^2\sin^2\omega},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{B'^2\{A^2\sin^2\delta+B^2\sin^2\delta'\}}{A^2B^2\sin^2\omega} = 1,$$

und wenn wir berücksichtigen, dafs nach der vorigen Nummer:

$$A^2B^2\sin^2\omega = A'^2B'^2\sin^2\omega',$$

gelangen wir endlich zu der nachstehenden Gleichung:

$$A^2\sin^2\delta+B^2\sin^2\delta' = A'^2\sin^2\omega'.$$

Die Ausdrücke $A\sin\delta$ und $B\sin\delta'$ bedeuten diejenigen beiden Perpendikel, welche von den Endpuncten der beiden Halb-Durchmesser A und B auf den Halb-Durchmesser

B'

B' oder dessen Verlängerung gefällt werden, oder, mit andern Worten, die Projectionen der erstgenannten beiden Halb-Durchmesser A und B auf irgend eine gerade Linie, welche senkrecht auf der Richtung des Halb-Durchmessers B' steht. Die letzte Gleichung enthält hiernach den folgenden bemerkenswerthen Satz:

„Die Quadrat-Summe der Projectionen irgend zweier beliebigen zugeordneten Durchmesser einer gegebenen Ellipse auf eine beliebige gerade Linie ist constant."

Diese constante Quadrat-Summe ist gleich dem Quadrate der Projection $(2A'\sin\omega')$ desjenigen Durchmessers, dessen zugeordneter senkrecht auf der beliebigen geraden Linie steht, und ist also ein Maximum, wenn diese Linie der gröfsern Axe der Ellipse parallel ist, ein Minimum, wenn diese Linie der kleinern Axe parallel ist. —

Ich kann mich hier mit der blofsen Andeutung begnügen, dafs die Resultate der letzten Nummern unter den gehörigen Modificationen auch für den Fall der Hyperbel bestehen. —

122. Wir wollen sogleich zu der Gleichung der Curven zweiter Ordnung, unter der allgemeinern Form:

$$pq+\mu r^2 = 0, \qquad (1)$$

wie wir sie in der 110. Nummer hingestellt haben, übergehen. Um diese Gleichung zu befriedigen, können wir, nach einander, jede der beiden Functionen p und q gleich Null setzen und erhalten alsdann beide Mal:

$$r = \pm 0;$$

woraus ersichtlich ist, dafs den beiden Functionen p und q zwei solche gerade Linien entsprechen, welche die durch (1) dargestellte Curve berühren, und dafs die der Function r entsprechende, gerade Linie die Berührungspuncte auf den beiden Tangenten verbindet.

Wenn die Function r auf eine Constante sich reducirt, so rückt die ihr entsprechende gerade Linie immer weiter. Alsdann aber kommen wir auf den Fall der früher discutirten Gleichung:

$$pq+\mu = 0,$$

zurück, wonach sich deutlich herausstellt, dafs die Asymptoten ganz den Character von Tangenten haben, auf denen die Berührungspuncte immer weiter gerückt sind.

Wenn in der allgemeinen Gleichung (1) eine der beiden Functionen p und q, etwa die erstere derselben, auf eine Constante sich reducirt, so rückt die bezügliche Tangente unendlich weit, die der Function r entsprechende Berührungs-Chorde geht immer noch durch den Berührungspunct auf der andern Tangente, begegnet der Curve aber aufserdem nicht mehr, weil ein Berührungspunct mit der Tangente unendlich weit liegt. Die Parabel, der diese Voraussetzung entspricht, ist hiernach dadurch characterisirt, dafs sie eine unendlich weit entfernt liegende gerade Linie berührt, oder, mit andern Worten, dafs die Curve unendlich weit sich erstreckt und ihre Tangenten, wenn der Berührungspunct immer weiter fortrückt, sich immer weiter entfernen, und nicht, wie in dem Falle der Hyperbel, einer Gränz-Lage sich immer mehr nähern. Das System jedes Durchmessers und der Tangente im Scheitel desselben steht in derselben, in der Gleichung:

$$q+\mu r^2 = 0,$$

in Evidenz tretenden, characteristischen Beziehung zur Curve. Diese kann also auf unendlichmalige Weise durch eine Gleichung von der vorstehenden Form ausgedrückt werden.

123. Wenn wir den Coefficienten μ als einen unbestimmten ansehen, so können wir in der allgemeinen Gleichung:

$$pq+\mu r^2 = 0, \qquad (1)$$

p, q und r als Functionen von der Form $x(y+ax+b)$ betrachten, indem wir x von vorne hinein beliebig annehmen, so dafs also jede dieser drei Functionen nur von zwei Constanten abhängt. Die vorstehende Gleichung enthält hiernach sieben von einander unabhängige Constanten, und diese sind als gegeben zu betrachten, sobald aufser dem Coefficienten μ auch noch die drei durch die Gleichungen

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \tag{2}$$

dargestellten geraden Linien gegeben sind. Wir können also eine gegebene Curve zweiter Ordnung, die durch fünf Constante vollkommen schon bestimmt ist, auf unendlichmalige Weise durch eine Gleichung von der vorstehenden Form ausdrücken, und zwar in der Art, dafs wir diese Form so oft erhalten, als wir irgend zwei Tangenten der gegebenen Curve und diejenige gerade Linie, welche die Berührungspuncte auf denselben verbindet, zusammenstellen, und die ihnen entsprechenden linearen Functionen bezüglich durch p, q und r bezeichnen. Bilden wir alsdann die Gleichung (1), so können wir μ jedesmal so bestimmen, dafs diese Gleichung die gegebene Curve darstellt.

Wir können folglich auch dann noch die Gleichung (1) als die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Ordnung betrachten, nachdem die Linie: $r = 0$, von vorne herein beliebig angenommen worden ist. Denn alsdann können wir die jedesmaligen Tangenten in den Durchschnittspuncten dieser Linie und irgend einer gegebenen solchen Curve construiren, und demnach die beiden Functionen p und q bestimmen. Aber zugleich sehen wir, dafs die Coordinaten-Bestimmung dann illusorisch wird (19), wenn die Linie: $r = 0$, von der gegebenen Curve berührt wird. Die Functionen p und q sind beide reell, wenn diese Linie der Curve wirklich begegnet, im entgegengesetzten Falle sind sie selbst zwar imaginär, ihr Product aber ist (was *a priori* aus der symmetrischen Beziehung der beiden bezüglichen Tangenten zur Curve und zur Berührungs-Chorde folgt) reell. So lange die Linie: $r = 0$, keine ausgezeichnete Lage hat — und die einzige absolut ausgezeichnete Lage ist, dafs dieselbe unendlich weit liegt — rührt die Unmöglichkeit, eine Curve zweiter Ordnung durch die Gleichung (1) auszudrücken, lediglich nur von ihrer besondern Lage gegen diese Linie und keinesweges von ihrer besondern Art her, was sich auch unmittelbar dadurch bestätigt, dafs die Curve dann, wenn wir r mit p oder q vertauschen, nothwendig nach dem Vorstehenden durch die obige Gleichung (1) dargestellt werden kann. Wenn aber die Linie: $r = 0$, unendlich weit liegend angenommen wird, so erhalten wir dadurch, dafs p und q entweder reell oder imaginär sind, zunächst die Unterscheidung, ob die gegebene Curve eine Hyperbel oder eine Ellipse ist; und ferner läfst sich dann die Parabel deshalb nicht mehr durch die bezügliche Gleichung:

$$pq + \mu = 0,$$

darstellen, weil sie die unendlich weit entfernte gerade Linie berührt.

Es ist aus den vorstehenden Betrachtungen ersichtlich, wie wir uns, in Bezug auf die Discussion der Curven zweiter Ordnung, ganz der algebraischen Entwicklungen des ersten Paragraphen dieses Abschnittes überheben können. Ich verweile gern schon bei der ersten sich darbietenden Gelegenheit bei solchen Betrachtungsweisen, die uns auch da nicht im Stiche lassen werden, wo alle Versuche algebraischer Entwicklung an der Klippe der Elimination scheitern. Das Eigenthümliche und Characteristische in ihrer Allgemeinheit hervorzuheben, würde hier noch nicht an seiner Stelle sein.

124. Nachdem die geraden Linien (2) gegeben sind, ist zur vollständigen Bestimmung der durch (1) dargestellten Curve nur noch nothwendig, dafs wir den Coefficienten μ oder, statt desselben, irgend einen Punct der Curve kennen. Denn auf diesen Punct bezogen

erhalten alsdann die drei Functionen p, q und r vollkommen bestimmte Werthe, wonach sich μ auf lineare Weise aus der Gleichung (1) ergibt.

Eine Curve zweiter Ordnung ist hiernach vollkommen und auf eine einzige Weise bestimmt, wenn zwei ihrer Tangenten, die beiden Berührungspuncte auf derselben und aufserdem noch irgend ein beliebiger Punct M der Curve gegeben sind. Es ist leicht alsdann, beliebig viele neue Puncte der Curve zu finden. Irgend ein solcher Punct sei M'. Die Willkührlichkeit bei der Bestimmung der Functionen p, q und r, welche die Form der Gleichung (1), indem wir μ unbestimmt lassen, gestattet, erlaubt uns insbesondere, diese Functionen als Segmente, welche auf einer mit MM' parallelen geraden Linie, zwischen dem bezüglichen Puncte einerseits, und den drei geraden Linien (2) andrerseits liegen, zu construiren. Bezeichnen wir hiernach die Durchschnittspuncte der Linie MM' mit den letztgenannten drei geraden Linien bezüglich durch P, Q und R, so gibt die Gleichung (1) in Beziehung auf die beiden Puncte M und M':

$$MP \,.\, MQ + \mu \,.\, \overline{MR}^2 = 0, \qquad M'P \,.\, M'Q + \mu \,.\, \overline{M'R}^2 = 0,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{M'P \,.\, M'Q}{MP \,.\, MQ} = \frac{\overline{M'R}^2}{\overline{MR}^2}. \tag{3}$$

Die Discussion dieser Gleichung zeigt, dafs der Punct M' sich auf lineare Weise ergibt, wenn die drei Linien (2) und der Punct M gegeben sind; und ganz auf dieselbe Weise können wir auf jeder andern, durch einen gegebenen Punct der Curve beliebig gezogenen, geraden Linie den zweiten Durchschnittspunct mit der Curve bestimmen. Geht die Linie MM' insbesondere durch den Durchschnitt der beiden Tangenten, so fallen die beiden Puncte P und Q zusammen, so dafs:

$$\frac{M'P}{MP} = \pm \frac{M'R}{MR},$$

wobei nur das untere Zeichen Bedeutung haben kann, und also M, M', P und R vier harmonische Theilungspuncte sind (56). „Jede gerade Linie also, welche durch den Durchschnittspunct irgend zweier Tangenten einer gegebenen Curve zweiter Ordnung geht, wird in diesem Puncte und in ihren Durchschnittspuncten mit der Berührungs-Chorde und mit der Curve harmonisch getheilt.“

Wir wollen dieselbe Gleichung (3) noch aus einem andern Gesichtspuncte betrachten, und zwar die beiden Puncte M und M', so wie die beiden Tangenten als gegeben, die Berührungs-Chorde aber als unbekannt ansehen. Der erste Theil der fraglichen Gleichung ist alsdann gegeben, so dafs wir durch dieselbe den Punct R, denjenigen Punct nemlich, in welchem die Linie MM' der, übrigens noch unbekannt bleibenden, Berührungs-Chorde begegnet, bestimmen können; zugleich aber sehen wir, dafs wir zwei Puncte erhalten, deren jeden wir für den Punct R nehmen können, und dafs dieselben mit den beiden gegebenen Puncten vier harmonische Theilungspuncte ausmachen. Hieraus folgt also, „dafs für alle Curven, welche zwei gegebene gerade Linien berühren, und zugleich durch zwei gegebene Puncte gehen, diejenige gerade Linie, welche die jedesmaligen beiden Berührungspuncte auf den gegebenen geraden Linien verbindet, immer durch einen von zwei festen Puncten, welche mit den beiden gegebenen vier harmonische Theilungspuncte bilden, geht;“ und nach dem Princip der Reciprocität können wir sogleich hinzufügen, „dafs der Durchschnittspunct der beiden jedesmaligen Tangenten der Curven in den beiden gegebenen

Puncten, immer auf einer von zwei geraden Linien, welche mit den beiden gegebenen vier Harmonicalen bilden, liegt."

An die Gleichung (3) knüpft sich eine elegante Construction des zwiefachen Punctes R. Wenn aufser den beiden gegebenen Puncten M und M' noch ein dritter Punct M, durch den die Curve gehen soll, gegeben ist, so führt die Wiederholung derselben Construction, indem wir diesen dritten gegebenen Punct beliebig mit einem der beiden ersten zusammenstellen, zur vollständigen Bestimmung der Berührungs-Chorde: $r = 0$, welche, da jede Construction eine zwiefache Punct-Bestimmung gibt, im Allgemeinen, eine vierfache ist. Es gibt also, im Allgemeinen, auch vier verschiedene Curven, welche zwei gegebene gerade Linien berühren und zugleich durch drei gegebene Puncte gehen. Das Vorstehende liefert uns die Construction dieser Curven, so wie auch die hiermit durch das Princip der Reciprocität verbundene Construction derjenigen Curven, welche durch zwei gegebene Puncte gehen, und zugleich drei gegebene gerade Linien berühren. Ich mufs indefs in Beziehung auf das Detail dieser verschiedenen Constructionen auf den ersten Band meiner Entwicklungen verweisen, indem ich zugleich als Citat noch nachtrage, dafs Herr Brianchon in einem, mir später erst zu Gesicht gekommenen, *Mémoire sur les lignes du second ordre* zuerst die Construction der Aufgabe, „einen Kegelschnitt zu beschreiben, der n gegebene gerade Linien berührt und zugleich durch $(5-n)$ gegebene Puncte geht," vollständig und so discutirt hat, dafs eigentlich schon nichts mehr zu wünschen übrig blieb.

125. Von der Gleichung:

$$pq + \mu r^2 = 0, \tag{1}$$

können wir, nach der Umformungsweise der 28. Nummer, dem analog, wie wir es schon bei Gelegenheit des besondern Falles, dafs die Function r auf eine blofse Constante sich reducirt, gethan haben, zu folgender Form:

$$u^2 + \lambda v^2 + \mu r^2 = 0, \tag{2}$$

übergehen, indem wir durch u und v zwei neue, immer reelle, lineare Functionen und durch λ eine neue Constante bezeichnen. Es stellen alsdann die beiden Gleichungen

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

zwei gerade Linien dar, welche durch den immer reellen Durchschnittspunct der beiden reellen oder imaginären Tangenten:

$$p = 0, \qquad q = 0, \tag{3}$$

gehen, und zu diesen ganz in derselben Beziehung stehen, als zwei zugeordnete Durchmesser zu den beiden Asymptoten. Je nachdem die beiden Tangenten reell oder imaginär sind, ist die neu eingeführte Constante λ entweder positiv oder negativ. Die Gleichung (2) enthält deshalb eine Constante mehr als die Gleichung (1), weil die beiden Functionen u und v keine vollständig bestimmten sind, sondern auf jedes beliebige Paar einer Involution bezogen werden können.

Die Gleichung (2), über deren Discussion wir einige Andeutungen geben wollen, zeigt zuvörderst, dafs diejenigen drei geraden Linien, welche durch die Gleichungen:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad r = 0, \tag{4}$$

dargestellt werden, ganz in derselben, durch die Curve (2) vermittelten, gegenseitigen Beziehung zu einander stehen; denn die beiden Coefficienten λ und μ haben auf die Bestimmung dieser Linien durchaus keinen Einflufs. Es heifst aber derjenige Punct, in welchem die beiden Tangenten in den Durchschnittspuncten eines gegebenen Kegelschnittes und einer geraden Linie sich schneiden, der Pol dieser geraden Linie und gegenseitig diese

gerade Linie die Polare jenes Punctes, in Beziehung auf den gegebenen Kegelschnitt. Der Pol einer geraden Linie bleibt also auch dann eine reeller Punct, wenn diese Linie dem Kegelschnitte nicht begegnet, und die Polare eines Punctes bleibt also auch dann eine reelle gerade Linie, wenn dieser Punct innerhalb des Kegelschnittes liegt. Die letzte der drei geraden Linien (4) ist hiernach die Polare des Durchschnittes der beiden ersten, weil dieser Durchschnitt kein anderer ist, als der Durchschnitt der beiden Tangenten (3). Es ist hiernach also überhaupt jede der drei geraden Linien (4) die Polare des Durchschnittes der jedesmaligen beiden übrigen, und der Durchschnitt je zweier der Pol der jedesmaligen dritten. Wir wollen die drei geraden Linien (4) drei zugeordnete Polaren und die drei Durchschnittspuncte je zweier derselben drei zugeordnete Pole, in Beziehung auf den Kegelschnitt (1), nennen.

Es ist offenbar, dafs die Gleichung (2) dann keinen reellen Kegelschnitt darstellen kann, wenn die Coefficienten λ und μ beide positiv sind. Einer derselben oder beide zugleich sind für den Fall einer reellen Curve nothwendig negativ. In beiden Fällen kann man nur ein Paar von Gliedern des ersten Theiles der vorstehenden Gleichung mit übereinstimmenden, aber zwei Paare von Gliedern mit entgegengesetzten Vorzeichen zusammenstellen; woraus folgt, dafs immer einer von drei zugeordneten Polen und nur einer innerhalb des Kegelschnittes liegt.

126. Indem wir nach einander für irgend zwei der drei zugeordneten Polaren (4), etwa für die beiden ersten, jedes Paar der bezüglichen Involution setzen, nehmen die gegenüberliegenden Pole auf der dritten festen Polaren ($r = 0$) alle möglichen Lagen ein, indem sie ihrerseits sich zu Paaren einer Involution von Puncten zusammenordnen. Da die Form der Gleichung (2) bei dieser Umformung unverändert dieselbe bleibt, und die dritte, feste Polare oder, was dasselbe heifst, der ihr gegenüberliegende Pol, von vorne herein beliebig angenommen werden kann, so tritt uns sogleich der nachstehende Satz entgegen:

„Die Polaren aller Puncte einer gegebenen geraden Linie gehen durch einen festen Punct, den Pol dieser Linie; und umgekehrt, die Pole aller geraden Linien, welche durch einen gegebenen Punct gehen, liegen in einer geraden Linie, der Polaren des Punctes."

Fragen wir uns nach dem eigentlichen Nerv des Beweises dieses Satzes, so finden wir ihn ganz allein darin, dafs die Gleichung (2) eine Constante mehr enthält als die Gleichung (1).

Ferner ergibt sich das folgende Resultat. „Die Puncte irgend einer geraden Linie ordnen sich, in Beziehung auf einen gegebenen Kegelschnitt, paarweise so zusammen, dafs die Polare eines Punctes jedes solchen Paares durch den jedesmaligen andern Punct desselben Paares geht; solche Puncten-Paare bilden eine Involution. Und, die geraden Linien, welche durch irgend einen Punct gehen, ordnen sich, in Beziehung auf den gegebenen Kegelschnitt, so zusammen, dafs der Pol einer Linie jedes solchen Paares auf der jedesmaligen andern Linie desselben Paares liegt: solche Linien-Paare bilden eine Involution."

127. Die Art, wie sich, nach dem ersten Theile des vorstehenden Satzes, die Puncte einer gegebenen geraden Linie, in Beziehung auf einen gegebenen Kegelschnitt, zu einer Involution zusammenordnen, hängt zunächst davon ab, ob die gerade Linie dem Kegelschnitte begegnet oder nicht. In dem ersten Falle ist die Involution von der zweiten, und im zweiten Falle von der ersten Art (56). In beiden Fällen gibt es einen Mittelpunct der Involution; man sieht sogleich ein, dafs dieser Mittelpunct derjenige Punct ist, in welchem die gegebene gerade Linie von demjenigen Durchmesser der Curve, dessen zugeord-

neter ihr parallel ist, geschnitten wird. Im ersten Falle liegen die beiden Puncte jedes Paares der Involution auf derselben, im zweiten Falle auf entgegengesetzter Seite des Mittelpunctes; das Product ihrer Abstände vom Mittelpuncte ist in beiden Fällen für alle Paare der Involution constant, und zwar im ersten Falle gleich dem Quadrate der Hälfte der auf der gegebenen geraden Linie von dem Kegelschnitte interceptirten Chorde. In dem zweiten Falle gibt es ein Minimum für den Abstand der beiden Puncte eines Paares, und dann ist jenes constante Product dem Quadrate der Hälfte des Minimums gleich (57). Wenn insbesondere die gegebene gerade Linie den Kegelschnitt nur in einem einzigen Puncte schneidet, weil der zweite Durchschnittspunct unendlich weit liegt, so ist der einzige Durchschnittspunct der Mittelpunct der Involution (60). „Legt man also von einem beliebigen Puncte aus zwei Tangenten an eine gegebene Hyperbel oder Parabel, verbindet die beiden Berührungspuncte auf denselben durch eine gerade Linie, und zieht dann durch denselben Punct eine gerade Linie, die bezüglich einer Asymptote der Hyperbel parallel oder ein Durchmesser der Parabel, so wird dasjenige Stück dieser geraden Linie, das zwischen dem beliebigen Puncte und der Berührungs-Chorde liegt, von der Curve halbirt."

Es entspricht ferner, nach dem zweiten Theile des letzten Satzes der vorstehenden Nummer, jedem Puncte, den wir ganz beliebig in der Ebene eines gegebenen Kegelschnittes annehmen, eine vollkommen bestimmte Involution von geraden Linien. Wir wollen zunächst nun ins Auge fassen, wie die Natur dieser Involution von der verschiedenen Lage des Punctes abhängt. Liegt dieser Punct aufserhalb des gegebenen Kegelschnittes, so ist die Natur der Involution durch die Gröfse desjenigen Winkels, welchen die, von dem fraglichen Puncte aus, an den Kegelschnitt gelegten Tangenten einschliefsen, und welchen wir früher η genannt haben, vollkommen bestimmt. Je zwei gerade Linien, welche mit diesen beiden Tangenten vier Harmonicalen bilden, machen ein Linien-Paar der Involution aus. Liegt der fragliche Punct innerhalb des gegebenen Kegelschnittes, so verliert diese Construction ihre Anwendbarkeit; wir erhalten alsdann aber nach dem ersten Theile des letzten Satzes der vorigen Nummer, wenn eine Linie irgend eines Paares der Involution gegeben ist, sogleich die zugehörige, wenn wir die Polare des Durchschnittspunctes der gegebenen geraden Linie und der Polaren des fraglichen Punctes, in Beziehung auf den gegebenen Kegelschnitt, construiren. In diesem Falle können wir die Natur der Involution durch die Gröfse desjenigen Winkels bestimmen, den wir früher ϑ genannt haben, und der ein Maximum der Abweichung der Durchschnitts-Winkel irgend eines Paares der Involution, von einem rechten Winkel ist.

128. Bei der vorliegenden Discussion tritt eine Frage vor allen andern ganz besonders hervor, die Frage nemlich, ob es in der Ebene eines gegebenen Kegelschnittes solche Puncte gibt oder geben kann, für welche der Winkel ϑ ein rechter ist. Denn für den Fall, dafs wir eine bejahende Antwort auf diese Frage erhielten, folgt aus den Bemerkungen der 37. Nummer das, in analytischer Rücksicht, höchst merkwürdige Resultat, dafs alsdann jede durch einen solchen Punct gehende imaginäre gerade Linie als eine Tangente der Curve anzusehen ist.

Um nachzuweisen, dafs es solche Puncte, denen wir den Namen Brennpuncte beilegen, wirklich gibt, brauchen wir blofs zu zeigen, dafs jede gegebene Curve zweiter Ordnung durch die Gleichung (2) sich auch noch unter den besondern Voraussetzungen, dafs u und v rechtwinklige Parallel-Coordinaten bedeuten und λ gleich Eins sei, darstellen lasse. Durch diese Voraussetzungen wird die Anzahl der Constanten in der eben genannten Gleichung von acht auf fünf reducirt. Und da fünf die zur Bestimmung eines Ke-

gelschnittes überhaupt nothwendige Anzahl von Constanten ist, so kann es für einen gegebenen Kegelschnitt nur eine beschränkte Anzahl von Puncten der fraglichen Art geben; während man, für eine andere Annahme von ϑ oder η, wobei die Gleichung (2) eine (auf die Lage des Winkels ϑ oder η sich beziehende) Constante mehr behält, unendlich viele Puncte, einen geometrischen Ort, findet. Von jedem Puncte eines solchen Ortes lassen sich zwei (reelle oder imaginäre) Tangenten an den Kegelschnitt legen, die sich unter dem constanten Winkel η schneiden. Diese Tangenten selbst aber, und mit ihnen die durch sie bestimmte Involution, drehen sich, indem der Punct den fraglichen Ort beschreibt, um diesen Punct so, dafs hierbei jede besondere Linie der Involution, im Allgemeinen, alle möglichen Richtungen annimmt. Die unendlich vielen Tangenten-Paare von allen möglichen Richtungen, die insbesondere der Annahme, dafs ϑ ein rechter Winkel sei, entsprechen, haben alle einen gemeinsamen Scheitel, oder schneiden sich wenigstens gruppenweise in denselben Puncten, die nur in begränzter Anzahl vorhanden sein können und die für den fraglichen besondern Fall an die Stelle der eben erwähnten geometrischen Oerter treten; in der Art, dafs jede durch einen solchen Punct gehende (imaginäre) gerade Linie eine Tangente des Kegelschnittes ist. Ueberdiefs kann man, wenn ϑ ein rechter Winkel ist, die verschiedenen Lagen der bezüglichen Involution, welche einer beliebigen Drehung derselben um ihren Scheitel entsprechen, unter einander auf keine Weise unterscheiden, weil man nach einander jedes Paar einer solchen Involution erhält, wenn man ein beliebiges derselben um seinen Scheitel dreht *).

---

*) Wir können uns die Ebene eines gegebenen Kegelschnittes als aus unendlich vielen, stetig in einander übergehenden Curven bestehend denken, so dafs jede dieser Curven einer beliebigen Annahme des Winkels η entspricht. So lange also dieser Winkel ein reeller ist, lassen sich, von jedem Puncte der entsprechenden Curve aus, an den gegebenen Kegelschnitt zwei reelle Tangenten legen, und diese schneiden sich unter dem constanten Winkel η. Unter diesem Gesichtspuncte aufgefafst, habe ich in der 343. Nummer des ersten Bandes der „analytisch-geometrischen Entwicklungen," indem ich folgende Gleichungen:

$$A^2y^2 \pm B^2x^2 = \pm A^2B^2, \qquad (a)$$

als die gewöhnlichen der Ellipse und Hyperbel, bezogen auf rechtwinklige Parallel-Coordinaten, zu Grunde gelegt, für die fragliche, irgend einem reellen Werthe von η entsprechende Curve, die folgende Gleichung entwickelt:

$$\frac{4(A^2y^2 \pm B^2x^2 \mp A^2B^2)}{(y^2+x^2-(A^2 \pm B^2))^2} = tang^2\eta. \qquad (b)$$

Wir können nach der 33. Nummer, neben diese Gleichung, mit Vermeidung des Imaginären, sogleich die folgende setzen:

$$\frac{4(A^2y^2 \pm B^2x^2 \mp A^2B^2)}{(y^2+x^2-(A^2 \pm B^2))^2} = -sin^2\vartheta, \qquad (c)$$

indem wir, wie eben für η, nun für ϑ nach einander alle möglichen reellen Werthe nehmen.

Wir wollen, da sich der Winkel η, absolut genommen, von seinem Nebenwinkel nicht unterscheiden läfst, hier überall denjenigen Winkel durch η bezeichnen, unter dem, von dem bezüglichen Puncte aus, der Kegelschnitt gesehen wird. Alsdann entspricht offenbar, indem wir zuerst den Fall der Ellipse discutiren, jedem für η beliebig angenommenen reellen Werthe eine geschlossene Curve, die gemeinschaftlich mit derjenigen, welche dem jedesmaligen Nebenwinkel von η entspricht, durch die Gleichung (b) dargestellt wird. Wenn wir $tang\eta = 0$ setzen, so reducirt sich, weil alsdann die eine der beiden in sich selbst geschlossenen Curven unendlich weit rückt, die Gleichung (b) auf den zweiten Grad, und stellt die gegebene Ellipse dar. Dieser entspricht offenbar $\eta = \pi$, während der unendlich weit gerückten Curve $\eta = 0$ entspricht. Diese letzgenannte Curve ist, da der Grad der Gleichung (b) sich um zwei Einheiten reducirt hat, in ihrer Gränz-Lage ebenfalls als eine Curve zweiter Ordnung zu betrachten (das heifst, indem wir umschreiben, wenn wir den Winkel η klein genug annehmen, so erhalten wir,

129. Die Gleichung:

$$u^2+v^2 = \mu^2 r^2, \qquad (1)$$

in der ich $(-\mu^2)$ an die Stelle des frühern Coefficienten μ gesetzt habe, stellt immer einen reellen Kegelschnitt dar. Wenn u und v insbesondere rechtwinklige Parallel-Coordina-

---

nach der Reduction des bezüglichen Ovals auf einen gehörig verkleinerten Maafsstab, eine Curve, welche von einer Ellipse um weniger als eine gegebene Gröfse abweicht), deren Axen, wie man leicht einsieht, in dem umgekehrten Verhältnifs der gleichliegenden Axen der gegebenen Ellipse stehen. Wenn η ein rechter Winkel und hiernach seinem Nebenwinkel gleich ist, so fallen die beiden, für alle andern Annahmen von η abgesonderten, in sich selbst geschlossenen Curven in eine einzige zusammen, und diese ist alsdann der durch die nachstehende Gleichung dargestellte Kreis:

$$y^2+x^2 = A^2+B^2.$$

Zugleich mit $tang\,\eta$ (indem $\eta = \pi$ wird) verschwindet auch $sin\,\vartheta$. Die bezügliche Curve tritt bei dieser Gränze ganz in das Innere der Ellipse hinein. Betrachten wir nun sogleich den ausgezeichneten Fall, dafs ϑ ein rechter Winkel ist, so geht, indem wir $sin\,\vartheta = 1$, und, unter der Voraussetzung, dafs $A>B$, der Kürze halber: $A^2-B^2 = E^2$ setzen, die Gleichung (c), nach einfachen Reductionen, in die folgende über:

$$\{y^2+(x-E)^2\}\,\{y^2+(x+E)^2\} = 0; \qquad (d)$$

und läfst sich hiernach in die nachstehenden beiden vom zweiten Grade auflösen:

$$y^2+(x-E)^2 = 0, \qquad y^2+(x+E)^2 = 0.$$

Es stellt also bei unserer Annahme die Gleichung (c) keine Curve mehr dar, sondern nur ein System von zwei Puncten — Brennpuncten —, welche auf der gröfsern Axe der Ellipse, in einem Abstande vom Mittelpuncte derselben, der gleich ist $\pm E$, liegen. Zugleich ist ersichtlich, dafs diese beiden Puncte, wenn wir Gränz-Betrachtungen festhalten, sich als Kreise mit verschwindenden Radien darstellen. Wenn wir $sin^2\vartheta > 1$ setzen, so wird die bezügliche Curve zugleich mit dem Winkel ϑ imaginär. Es liegt uns jetzt blofs noch ob, nachzuweisen, wie, indem der Winkel ϑ von Null oder π an einem rechten Winkel sich nähert, die entsprechende Curve (c) von der gegebenen Ellipse an sich allmählig umgestaltet, bis sie in zwei Puncte ausartet, und dann aufhört reell zu sein. Zu diesem Ende bemerken wir, dafs ein ausgezeichneter Werth für ϑ offenbar derjenige ist, welcher den gleichen zugeordneten Durchmessern der gegebenen Ellipse entspricht. Alsdann geht die bezügliche Curve nothwendig durch den Mittelpunct dieser Ellipse. Es ist aber, bei dieser Voraussetzung,

$$sin\,\vartheta = \frac{2AB}{A^2+B^2},$$

und dann geht, nach leichten Reductionen, die Gleichung (c) in die nachstehende über:

$$\{y^2+x^2\}^2+\frac{(A^2+B^2)E^2}{A^2B^2}\{A^2y^2-B^2x^2\} = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine solche Curve dar, welche eine, der Lemniscate (oder der Ziffer 8) ähnliche Form hat. Sie schlingt sich um die beiden Brennpuncte, und hat einen Doppelpunct, der in den Mittelpunct der gegebenen Ellipse fällt. Hiernach ist klar, dafs, wenn der Winkel ϑ von Null oder zwei Rechten sich entfernt, und, durch die Gröfse eines Durchschnitts-Winkels der gleichen zugeordneten Durchmesser hindurchgehend, zuletzt einem rechten Winkel gleich wird: die bezügliche Curve (c) sich von der gegebenen Ellipse immer weiter entfernt, indem sie, nach der Richtung der kleinern Axe derselben sich eindrückend, der Lemniscaten-förmigen Curve immer näher rückt, dann, durch diese hindurchgehend, in zwei abgesonderte Ovale sich auflöset, deren jedes um einen der beiden Brennpuncte sich zieht, und die immer kleiner werden, bis sie, der Kreisform sich nähernd, sich zuletzt auf die beiden Brennpuncte selbst reduciren.

Ohne neue analytische Entwicklungen erkennen wir bald diejenigen Modificationen, welche die vorstehenden Resultate erleiden, wenn eine Hyperbel an die Stelle der gegebenen Ellipse tritt. Wir beschränken uns indefs hier blofs auf die folgende Andeutung in Betreff des für uns wichtigern Falles, dafs der Winkel η imaginär und ϑ reell ist. Wenn wir ϑ gleich Null oder zweien rechten Winkeln nehmen, ist die entsprechende Curve die gegebene Hyperbel selbst; sobald indefs der Werth von ϑ sich um eine noch so kleine Gröfse einem rechten Winkel annähert, tritt an die Stelle jedes Hyperbel-Zweiges ein Oval, das ganz innerhalb dieses Zweiges sich erstreckt, und, wenn die Annäherung des Winkels ϑ

dinaten bedeuten, so können wir die vorstehende Gleichung, indem wir die bezüglichen Coordinaten-Axen um ihren Durchschnittspunct so drehen, dafs eine beliebige derselben, etwa die durch die Gleichung: $v = 0$ dargestellte, der Linie: $r = 0$, parallel wird, unbeschadet der Allgemeinheit, folgendergestalt particularisiren:

$$u^2+v^2 = \mu^2(v+\varkappa)^2. \tag{2}$$

Bei dieser Umformung bleibt, wenn wir, was erlaubt ist, voraussetzen, dafs r einen kürzesten Abstand von der bezüglichen geraden Linie bedeutet, die Constante μ immer dieselbe. Wir können die letzte Gleichung ferner auf die nachstehende Weise schreiben:

$$u^2+(1-\mu^2)v^2 = \mu^2\varkappa(2v+\varkappa),$$

und ihr dann, vorausgesetzt, dafs μ nicht der Einheit gleich ist, indem wir zugleich, der Kürze halber,

$$1-\mu^2 = \lambda^2, \qquad \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}.\varkappa = E, \tag{3}$$

setzen, die folgende Form geben:

$$u^2+\lambda^2(v-E)^2 = E\varkappa. \tag{4}$$

Wenn insbesondere $\mu = 1$, so ergibt sich unmittelbar:

$$u^2 = 2\varkappa(v+\tfrac{1}{2}\varkappa). \tag{5}$$

Wir sehen hieraus zunächst, dafs, je nachdem

$$\mu > 1, \qquad \mu < 1, \qquad \mu = 1,$$

die Curve eine Hyperbel, eine Ellipse oder eine Parabel ist.

Die beiden Axen der durch (5) dargestellten Hyperbel oder Ellipse fallen in diejenigen beiden geraden Linien, deren Gleichungen die folgenden sind:

$$u = 0, \qquad v-E = 0.$$

Nennen wir die Längen der bezüglichen halben Axen B und A, so ist:

$$E\varkappa = B^2, \qquad B^2 = \lambda^2A^2.$$

Der Werth von $\varkappa$ bestimmt sich also auf lineare Weise durch E; für E aber erhalten wir, mit Zuziehung der zweiten der beiden Gleichungen (3), einen zwiefachen Werth; es kommt nemlich:

$$E^2 = A^2-B^2.$$

---

an einen rechten zunimmt, sich immer enger um einen festen Punct herumzieht, und zuletzt, der Kreisform immer näher kommend, sich auf diesen Punct selbst reducirt. Die beiden festen Puncte, welche man hiernach innerhalb der beiden Hyperbel-Zweige erhält — die Brennpuncte — werden, indem wir in dem Ausdrucke von E das Zeichen von B^2 ändern, immer noch durch die Gleichung (d) dargestellt.

Wenn endlich eine Parabel gegeben ist, die, in der Voraussetzung rechtwinkliger Parallel-Coordinaten, durch die Gleichung:

$$y^2 = 2px$$

dargestellt wird, so erhalten wir, nach der oben angeführten Stelle, für die verlangten Curven die nachstehende Gleichung:

$$\frac{y^2-2px}{(x+\frac{1}{2}p)^2} = tang^2\eta = -sin^2\vartheta.$$

Ist η reell, so ist die Curve eine Hyperbel, deren einer Brennpunct mit demjenigen Punct, den wir gleich hier schon als den Brennpunct der Parabel bezeichnen wollen, zusammenfällt. Der eine Zweig dieser Hyperbel bezieht sich auf den angenommenen Winkel η, der andere auf dessen Supplementar-Winkel. Die beiden Hyperbel-Zweige fallen in eine einzige gerade Linie zusammen — in die Directrix der Parabel — wenn für η insbesondere ein rechter Winkel angenommen wird. Für reelle Werthe von ϑ ist die entsprechende Curve eine Ellipse, deren einer Brennpunct mit dem Brennpuncte der gegebenen Parabel zusammenfällt. Je mehr der Winkel ϑ sich einem rechten Winkel annähert, desto mehr entfernt sich die fragliche Ellipse von der gegebenen Parabel, und wird, der Kreisform näher kommend, immer kleiner, bis sie zuletzt auf den Brennpunct der Parabel sich reducirt. —

Wenn A bezüglich die gröfsere Axe der Ellipse oder die reelle Axe der Hyperbel ist, so sind die beiden Werthe von E reell, im andern Falle imaginär. Beide Fälle erhalten wir nach einander, wenn wir, mit Beibehaltung der Coordinaten-Bestimmung, eine und dieselbe Hyperbel oder Ellipse gehörig drehen. Es läfst sich also jeder gegebenen solchen Curve im Ganzen viermal, und zwar immer zweimal auf reelle und zweimal auf imaginäre Weise, die Form der Gleichung (1) geben, das heifst mit andern Worten, jede Ellipse und Hyperbel hat vier Brennpuncte. Von diesen sind immer zwei und nur zwei reell, und liegen, bezüglich auf der gröfsern Axe der erstgenannten und der reellen Axe der letztgenannten Curve, zu beiden Seiten des Mittelpunctes in gleichem, leicht zu construirendem, Abstande von demselben.

Aus der Gleichung (5) ist sogleich ersichtlich, dafs man für den Fall einer gegebenen Parabel das x der Gleichung (2) immer auf linearem Wege erhält; es ist dem vierten Theile des Parameters der Curve gleich. Eine Parabel kann man, da überdiefs die zweite Axe derselben unendlich weit liegt, also nur auf eine einzige Weise durch die Gleichung (2) ausdrücken: die Parabel hat nur einen einzigen Brennpunct, und dieser liegt auf ihrer Axe in einer Entfernung vom Scheitel, die dem vierten Theile des Parameters gleich ist.

130. Bei unsern Voraussetzungen bedeutet (u^2+v^2) das Quadrat des Abstandes desjenigen Punctes, auf welchen die beiden Functionen u und v bezogen werden, von dem Brennpuncte, der Curve. Bezeichnen wir diesen Abstand, als eine neue veränderliche Gröfse, durch D, so geht die Gleichung (1), indem sie immer noch die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte bleibt, nach Ausziehung der Quadrat-Wurzel in die folgende über:

$$D = \mu r,$$

und sagt alsdann, als characteristische Eigenschaft der Curven zweiter Ordnung, aus, „dafs das Verhältnifs des Abstandes jedes Punctes einer solchen Curve von einem festen Puncte zu dem Abstande desselben Punctes der Curve von einer festen geraden Linie ein constantes ist.“ Jener feste Punct ist ein Brennpunct der Curve, diese feste gerade Linie die Polare desselben: die Directrix.

131. Wenn an die Stelle eines gegebenen Kreises eine gegebene Ellipse tritt, so treten an die Stelle des Satzes, dafs die Durchmesser des ersten einander gleich sind, metrische Relationen in Beziehung auf zugeordnete Durchmesser der letztern. Auf ganz analoge Weise erhalten wir, statt des Satzes der vorigen Nummer, wenn wir an die Stelle des Brennpunctes und der Directrix irgend einen beliebigen Punct in der Ebene des Kegelschnittes und die Polare desselben in Beziehung auf diesen setzen, metrische Relationen, die wir unmittelbar, ohne dafs wir zu den Umformungsweisen der 28. Nummer zurückgehen, aus denjenigen hernehmen können, welche sich auf zugeordnete Durchmesser beziehen. Die gegenseitigen Richtungen von diesen stimmen mit den Richtungen von Chorden, die durch den beliebigen Punct, den Pol, gehen, überein; es ist also natürlich auch diese paarweise zugeordnete zu nennen. Alsdann tritt an die Stelle der Länge eines Halbdurchmessers in allen metrischen Relationen der 116.—121. Nummer blofs der Quotient des Abstandes eines Punctes des bezüglichen Kegelschnittes von der Polaren in den Abstand desselben Punctes von dem Pole; wobei zu berücksichtigen ist, dafs diese Quotienten für die beiden Durchschnitte einer beliebigen, durch den Pol gehenden, geraden Linie mit der Curve dieselben sind. Ich überhebe mich hier jedes Details. —

132. Nachdem wir die einfachen Formen, auf welche sich die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen jedesmal bringen läfst, in der

Annahme, dafs diese Gröfsen Punct-Coordinaten bedeuten, discutirt haben, liegt uns jetzt auch noch ob, dieselben Formen, indem wir die Bedeutung von Linien-Coordinaten zu Grunde legen, geometrisch zu interpretiren. So lange wir die Bestimmung der Linien-Coordinaten particularisiren, gibt diese Deutung keine andern Resultate, als diejenigen, die wir auch unmittelbar nach dem Principe der Reciprocität aus den frühern allgemeinen Resultaten herleiten können. So haben wir schon, vorgreifend, dieses Uebertragungs-Princip an einem Beispiele in der 124. Nummer zur Anwendung gebracht, und sind auf diesem Wege eben dahin gelangt, wohin uns auch die Discussion der folgenden Gleichung:

$$uv + \mu t^2 = 0, \qquad (1)$$

wenn wir die veränderlichen Gröfsen u, v und t in derjenigen Bedeutung nehmen, unter der wir sie in der 42. Nummer angeführt haben, unmittelbar leiten würden:

Die drei Gleichungen:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad t = 0, \qquad (2)$$

stellen solche drei Puncte dar, von welchen die beiden ersten auf der durch (1) dargestellten Curve liegen, und der dritte der Pol derjenigen geraden Linie ist, welche durch die beiden ersten geht. Denn, wenn wir, um die Gleichung der Curve zu bestimmen, $t = 0$ setzen, so erhalten wir zugleich, entweder $u = 0$ oder $v = 0$; das heifst, durch den dritten der drei fraglichen Puncte und jeden der beiden ersten geht eine Tangente der Curve. Setzen wir andrerseits, entweder $u = 0$ oder $v = 0$, so erhalten wir beide Male $t = \pm 0$; das heifst, die beiden durch jeden der beiden ersten dieser Puncte gehenden Tangenten der Curve (1) fallen zusammen, oder, was dasselbe ist, diese beiden Puncte liegen auf der Curve, und sind also die Berührungspuncte auf den beiden, in dem dritten Puncte sich schneidenden, Tangenten. Es können u und v sowol imaginär als reell sein, was einzig davon abhängt, ob der dritte Punct: $t = 0$, innerhalb oder aufserhalb der Curve (1) fällt. Nur auf der Curve selbst darf dieser Punct nicht liegen.

An die Stelle der Gleichung (1) können wir auch die nachstehende setzen:

$$p^2 + \lambda q^2 + \mu t^2 = 0, \qquad (3)$$

die wir nach den Umformungsweisen der 55. Nummer unmittelbar erhalten und in der λ einen positiven oder negativen Werth hat, je nachdem u und v in der ursprünglichen Gleichung imaginär oder reell sind. Die Gleichungen:

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad t = 0,$$

stellen drei zugeordnete Pole in Beziehung auf den bezüglichen Kegelschnitt dar, und folglich sind diejenigen drei geraden Linien, welche dieselben, paarweise, verbinden, drei zugeordnete Polaren (125).

133. Wenn wir die Bestimmung der Linien-Coordinaten particularisiren, so kann dieſs einerseits auf die Natur, und andrerseits auf die Lage des bei solchen Particularisationen durch die Gleichungen (1) und (3) dargestellten Kegelschnittes, Einfluſs haben. Wir wollen zuvörderst die Gleichung (1), von diesem Gesichtspuncte aus, particularisiren.

Wenn wir in der 53. Nummer für t eine bloſse Constante nehmen, so ist auch dann noch die particularisirte Gleichung:

$$uv + \mu = 0, \qquad (4)$$

die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Classe. Nur müssen wir alsdann für u und v einmal reelle, das andere Mal imaginäre lineare Functionen nehmen, und überdieſs einen Ausnahmefall berücksichtigen, in welchem die vorstehende Gleichung ihre Bedeutung

verliert. In diesem Falle können wir an die Stelle der vorstehenden Gleichung die folgende treten lassen:

$$v^2 + \lambda u = 0. \qquad (5)$$

Wir können, bei unserer Voraussetzung, die beiden linearen Functionen u und v, und zwar, indem wir μ als einen unbestimmten Coefficienten betrachten, unbeschadet der Allgemeinheit, als solche Segmente construiren, welche auf zwei festen, durch die beiden Puncte:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad (6)$$

nach gegebener Richtung gelegten geraden Linien, zwischen diesen Puncten und derjenigen geraden Linie liegen, welche durch die jedesmaligen Werthe von u und v bestimmt wird. Indem wir ferner in der Gleichung (1) statt t eine Constante nehmen, setzen wir dadurch fest, dafs derjenige Punct, dessen Polare durch die beiden Puncte (6) geht, nach der gegebenen Richtung unendlich weit liegt. Diese Polare ist also ein Durchmesser der Curve, und zwar derjenige, dessen zugeordneter die gegebene Richtung hat; die beiden Puncte (6) sind die Scheitel dieses Durchmessers. Um den Werth der Constanten μ in der Gleichung (4) zu bestimmen, können wir insbesondere eine solche Tangente der bezüglichen Curve betrachten, welche dem durch die beiden Puncte (6) gehenden Durchmesser parallel ist. Für diese Tangenten ist $u = v$, und mithin ist $(-\mu)$ gleich dem Quadrate desjenigen halben Durchmessers, der die gegebene Richtung ist. Als characteristische Eigenschaft der Curven zweiter Classe gibt hiernach die geometrische Deutung ihrer allgemeinen Gleichung (4) den nachstehenden Satz, den ich indefs, statt ihn unabhängig für sich hinzustellen, sogleich mit den frühern Resultaten in Verbindung bringe.

„Wenn man in den Scheiteln eines beliebigen Durchmessers eines Kegelschnittes zwei parallele Tangenten legt, so werden diese von irgend einer beliebigen dritten so geschnitten, dafs das Product derjenigen beiden Segmente, die auf jenen beiden Tangenten zwischen den Durchschnittspuncten und den Berührungspuncten liegen, constant ist und gleich dem Quadrate desjenigen Halbdurchmessers, der parallel ist mit den beiden parallelen Tangenten."

Aus der Gleichung (4) ergibt sich sogleich unmittelbar eine Art-Bestimmung der Curven zweiter Classe. Es können erstens die beiden Functionen u und v und also auch die ihnen entsprechenden Puncte (6) réell sein. Dann ist die Curve eine Ellipse, oder eine Hyperbel, welche von demjenigen Durchmesser, der die gegebene Richtung hat, nicht geschnitten wird. Jenem Falle entspricht, dafs μ negativ, diesem dafs μ positiv ist; in jenem Falle geht keine, in diesem Falle jede Tangente der Curve zwischen den beiden Puncten (6) hindurch. Es können zweitens die beiden Functionen u und v imaginär sein. Alsdann ist ihr Product immer positiv, und die Curve alsdann, wenn μ positiv ist, imaginär, weil es keine reelle gerade Linie geben kann, deren Coordinaten, unter dieser Voraussetzung, die Gleichung (4) befriedigen, und wenn μ negativ ist, eine Hyperbel, welche von demjenigen Durchmesser, der die gegebene Richtung hat, in reellen Puncten geschnitten wird.

134. Wir können überhaupt eine gegebene Curve zweiter Classe nur in dem Falle nicht durch die Gleichung (1) darstellen, dafs der Punct: $t = 0$, auf dem Umfange dieser Curve liegt (132). Dieselbe Beziehung besteht auch dann noch, wenn dieser Punct unendlich weit liegt. Eine Curve zweiter Classe kann nur dann nicht durch eine Gleichung von der Form (4) ausgedrückt werden, wenn die Curve von der Art ist, dafs ein nach der gegebenen Richtung unendlich weit liegender Punct auf derselben liegt. Durch

diese Bestimmung wird aber nicht, wie in dem analogen Falle bei Punct-Coordinaten, eine particuläre Art von Curven, sondern nur eine particuläre Lage der Curven gegen die gegebene, zur Coordinaten-Bestimmung dienende, Richtung, oder, was dasselbe heifst, wenn die Curve als gegeben betrachtet wird, eine besondere Annahme dieser Richtung bedingt. Indem wir, wie bisher überall, diese Richtung als eine reelle betrachten, ist die Curve eine Hyperbel mit einer Asymptote von eben dieser Richtung. Wir erkennen den geometrischen Grund davon, dafs in diesem Falle, um eine solche Hyperbel darzustellen, die Gleichung (4) ihren Dienst versagt, sogleich darin, dafs alsdann die beiden Puncte (6) auf jener Asymptote, in der überdiefs zwei zugeordnete Durchmesser zusammenfallen, unendlich weit liegen. Wenn wir die Curve nun durch die neue Gleichung:

$$v^2+\lambda u = 0, \qquad (5)$$

darstellen, so erhalten wir, indem wir geometrisch deuten, einen neuen Satz, der denjenigen der vorigen Nummer auf gewisse Weise ergänzt, indem er ihn da, wo derselbe seine Bedeutung verliert, vertritt und ersetzt.

Von den beiden Puncten, welche nun durch die Gleichungen:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad (6)$$

dargestellt werden, ist der erste ein beliebiger Punct der bezüglichen Hyperbel; der zweite aber liegt auf ihrer eben bezeichneten Asymptote; es ist derjenige Punct, in welchem dieselbe von der Tangente im ersten Puncte geschnitten wird. u und v haben also die Bedeutung solcher Segmente, die einerseits auf einer, durch den beliebigen Punct gehenden und der Asymptote parallelen, geraden Linie, und andrerseits auf der Asymptote selbst, zwischen den beiden Puncten (6) und der jedesmaligen Tangente liegen. Nehmen wir insbesondere $u = v$, so ist diese letztgenannte Tangente der Tangente im ersten der Puncte (6) parallel. Es gibt die Gleichung (5) für diese Tangente $u = v = -\lambda$, woraus man sieht, dafs die Constante λ der doppelten Entfernung des Punctes: $v = 0$, von dem Mittelpuncte der Hyperbel gleich ist.

135. Wenn in einer der beiden linearen Functionen u und v, welche überhaupt die Form $(Am+Bn+C)$ haben, die Constante A verschwindet, so läfst sich dieselbe nicht mehr, wie wir in den vorigen beiden Nummern vorausgesetzt haben, auf die Form $\varphi(m+an+b)$ bringen, und somit fällt denn auch die bisherige geometrische Deutung fort. Dann aber liegt der bezügliche der beiden Puncte (6) nach bestimmter Richtung unendlich weit. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir annehmen, dafs die Axe: $y = 0$, welche uns zur Vermittelung der Coordinaten-Bestimmung gedient hat, dieselbe Richtung habe; das kommt alsdann darauf hinaus, n an die Stelle der einen der beiden Functionen u und v zu setzen (53).

Diejenige Curve zweiter Classe, welche bei dieser Voraussetzung etwa durch die Gleichung:

$$un+\mu = 0, \qquad (7)$$

dargestellt wird, hat also die Eigenschaft, dafs, nach gegebener Richtung, an dieselbe sich nur eine einzige Tangente legen läfst, weil die zweite unendlich weit liegt. Die Curve ist also eine Parabel, und der Punct:

$$n = 0,$$

liegt nach der Richtung ihrer Durchmesser unendlich weit.

Wir wollen die characteristische Eigenschaft der Parabel, welche die vorstehende Gleichung (7) enthält, näher ins Auge fassen. Zu diesem Ende können wir für den durch die Gleichung (7) dargestellten Punct irgend einen Punct U auf dem Umfange der Para-

bel beliebig annehmen, und dann in diesem Puncte die Tangente und durch denselben einen Durchmesser der Curve legen. Bezeichnen wir ferner diejenigen beiden Puncte, in welchen jene Tangente und dieser Durchmesser, bezüglich, von irgend einer beweglichen Tangente der Parabel geschnitten werden, durch Q und P, so ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$u = UQ, \qquad n = \frac{\sin QPU}{\sin PQU} = \frac{UQ}{UP};$$

folglich ist, nach der Gleichung (7), welche Lage die bewegliche Tangente auch haben mag, immer

$$\frac{\overline{UQ}^2}{\overline{UP}} = \mu.$$

Wir wollen, um den vorstehenden Werth von μ bei einer beliebigen Lage der beweglichen Tangente zu bestimmen, das Dreieck PUQ betrachten, welches von dem Durchmesser UP, der festen Tangente UQ und der beliebigen Tangente PQ gebildet wird, und dann ein zweites Dreieck QUF construiren, das mit dem eben bezeichneten Dreiecke die Seite UQ gemein hat und demselben ähnlich ist, in der Art überdiefs, dafs die beiden Puncte P und F auf entgegengesetzter Seite von UQ liegen und die Winkel der beiden Dreiecke in folgender Ordnung einander gleich sind:

$$PUQ = QUF, \qquad UPQ = UQF, \qquad UQP = UFQ.$$

Man hat alsdann:

$$UF = \frac{\overline{UQ}^2}{\overline{UP}} = \mu.$$

Die Richtung der geraden Linien UF, und also auch die Lage des Punctes F auf derselben, ist von der Lage der beweglichen Tangente PQ ganz unabhängig. Noch mehr, der Punct F behält auch dann unverändert dieselbe Lage, wenn wir die feste Tangente der durch die Gleichung (7) dargestellten Parabel mit irgend einer andern vertauschen, was, nach der obigen Construction, mit sich bringt, „dafs, wenn man durch einen beliebig angenommenen Punct der Parabel einen Durchmesser und nach dem Brennpuncte eine gerade Linie zieht, diese beiden geraden Linien einen Winkel bilden, der von der Tangente in dem beliebig angenommenen Puncte halbirt wird.“ Um das eben Behauptete nachzuweisen, können wir für die feste Tangente der Parabel insbesondere diejenige nehmen, welche auf den Durchmesser derselben senkrecht steht. Wenn diese alsdann von einer beliebigen Tangente in irgend einem Puncte Q geschnitten wird, so sind nach der obigen Bezeichnung die Winkel PUQ und QUF beide rechte, so dafs also der Punct F auf der Axe der Parabel liegt, und auch der Winkel PQF ist ein rechter. Wir sehen hieraus zunächst, „dafs, wenn wir in den Durchschnittspuncten der Tangente im Scheitel der Axe einer gegebenen Parabel mit andern beliebigen Tangenten derselben, auf diesen letztern bezüglich, Perpendikel errichten, diese Perpendikel alle durch den festen Punct F gehen.“ Und dann ist es leicht zu zeigen, dafs, wenn wir irgend eine andere Tangente als die feste betrachten, und mit ihr die eben als die feste betrachtete zusammenstellen, der ihr entsprechende Punct F mit dem eben bestimmten zusammenfällt, und, um mich kurz zu fassen, kein anderer als der Brennpunct der Parabel ist. Wir erhalten hiernach als geometrische Deutung der Gleichung (7) die nachstehende Winkel-Relation.

„Dasjenige Segment UQ, das auf einer beliebigen festen Tangente einer gegebenen Parabel, zwischen dem Berührungspuncte U und dem Durchschnittspuncte Q mit irgend

einer zweiten Tangente der Parabel liegt, wird, vom Brennpuncte F aus, unter einem Winkel gesehen, der demjenigen Winkel gleich ist, den die beiden Tangenten mit einander bilden."

Betrachten wir nach einander jede der beiden Tangenten als die feste, so folgt unmittelbar:

„Wenn man, vom Brennpuncte der Parabel aus, nach zwei beliebigen Puncten U und V auf dem Umfange derselben zwei gerade Linien und eine dritte gerade Linie nach demjenigen Puncte zieht, in welchem die beiden Tangenten in den beiden Puncten U und V sich schneiden, so wird der von den beiden zuerst gezogenen geraden Linien, am Brennpuncte, gebildete Winkel von der dritten geraden Linie halbirt."

Stellen wir mit der festen Tangente irgend zwei andere zusammen, so gibt der erste Satz den folgenden:

„Der Winkel, unter welchem dasjenige Segment, das auf einer festen Tangente der Parabel von irgend zwei andern Tangenten derselben interceptirt wird, vom Brennpuncte aus gesehen wird, ist dem Durchschnitts-Winkel der beiden letztgenannten Tangenten gleich."

Denselben Satz können wir auch in folgende Aussage einkleiden:

„Wenn man um das von irgend drei Tangenten einer gegebenen Parabel gebildete Dreieck einen Kreis beschreibt, so geht dieser Kreis zugleich durch den Brennpunct der Parabel."

Durch vier Tangenten einer Parabel werden vier verschiedene Dreiecke und durch diese vier verschiedene Kreise bestimmt, welche alle vier durch den Brennpunct der Parabel gehen. Es ist aber eine Parabel durch die vier ihrer Tangenten auf lineare Weise bestimmt; weil von den fünf Tangenten, welche zur linearen Bestimmung eines Kegelschnittes überhaupt erforderlich sind, die eine, sobald wir die Forderung machen, dafs derselbe eine Parabel sein soll, als eine unendlich weit entfernte, immer schon als gegeben zu betrachten ist. Wir erhalten also, wenn vier gerade Linien gegeben sind, den Brennpunct derjenigen Parabel, welche diese vier geraden Linien berührt, als den gemeinsamen Durchschnitt von vier verschiedenen Kreisen.

Da in jedem, einem Kreise eingeschriebenen, Vierecke die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel zwei Rechte beträgt, so gibt der letzte Satz unmittelbar den nachstehenden:

„Wenn von zwei festen Tangenten eine beliebige dritte Tangente einer gegebenen Parabel geschnitten wird, so wird das auf dieser von jenen interceptirte Segment, vom Brennpuncte aus, unter einem Winkel gesehen, der den Durchschnitts-Winkel der beiden festen Tangenten zu zwei Rechten ergänzt."

Wenn man vom Brennpuncte aus unter demselben Winkel nach irgend zwei Tangenten der Parabel zwei gerade Linien zieht, so schliefsen diese beiden geraden Linien offenbar einen solchen Winkel ein, der dem von den beiden Tangenten gebildeten gleich ist. Hieran schliefst sich nach dem Vorstehenden die neue Folgerung an:

„Wenn man, vom Brennpuncte einer gegebenen Parabel aus, unter gegebenem constanten Winkel nach beliebigen Tangenten derselben gerade Linien zieht, so ist der geometrische Ort für die Fufspuncte aller dieser geraden Linien eine neue Tangente der Parabel, und zwar diejenige, welche die Durchmesser der Parabel unter dem gegebenen constanten Winkel schneidet."

Wenn also vier gerade Linien gegeben sind, und wir den Brennpunct derjenigen Pa-

rabel, welche diese geraden Linien berührt, bestimmt haben, so können wir von diesem Puncte aus, unter einem beliebig angenommenen Winkel, vier gerade Linien nach den vier gegebenen ziehen, und dann liegen die Fufspuncte der so gezogenen vier geraden Linien alle vier auf einer neuen Tangente der Parabel. Nehmen wir insbesondere für den beliebigen Winkel einen rechten, so erhalten wir auf diese Weise die Tangente im Scheitel der Axe, und also diese Axe selbst, wenn wir auf diese Tangente, vom Brennpuncte aus, ein Perpendikel fällen. Und so weiter.

136. Wenn wir, auf gleiche Weise, wie in der Gleichung (4), nun auch in der Gleichung (5), und zwar nach einander, jede der Coordinaten v und u mit n vertauschen, so erhalten wir einmal:

$$n^2 + \lambda u = 0:$$

eine Gleichung, welche wiederum, wie die Gleichung (7), eine Parabel darstellt. Das andere Mal kommt

$$v^2 + \lambda n = 0:$$

die Gleichung einer Hyperbel, welche den Punct $v = 0$ zum Mittelpuncte hat. Es bedeuten hierbei v und $\frac{v}{n}$ diejenigen beiden Segmente, welche durch die bezügliche Tangente von den beiden Asymptoten der Hyperbel abgeschnitten werden. Unmittelbar sagt also die letzte Gleichung aus, dafs das Product solcher zwei Segmente constant ist; woran sich denn ferner bekannte Resultate anknüpfen (112).

137. Wir wollen auch noch in einige Andeutungen über die Particularisirung der Form der Gleichung (3) eingehen. Setzen wir t constant, wie in der 133. Nummer, so liegt der eine der drei zugeordneten Pole nach der gegebenen Richtung unendlich weit, und die beiden andern:

$$p = 0, \qquad q = 0, \tag{8}$$

liegen auf demjenigen Durchmesser des bezüglichen Kegelschnittes, dessen zugeordneter eben diese Richtung hat. Die beiden Puncte (8) können wir auf unendlichmalige Weise so auf demselben Durchmesser annehmen, dafs die Curve immer durch eine Gleichung von der Form:

$$p^2 + \lambda q^2 + \mu = 0, \tag{9}$$

an deren Stelle wir auch die folgende setzen können:

$$M^2p^2 + N^2q^2 = M^2N^2, \tag{10}$$

dargestellt wird. Nehmen wir also auf einem Durchmesser eines Kegelschnittes irgend einen Punct: $p = 0$, beliebig an, so ist die Polare dieses Punctes dem zugeordneten Durchmesser parallel und schneidet den erstgenannten Durchmesser in einem Puncte: $q = 0$, dessen Polare dem zugeordneten Durchmesser ebenfalls parallel ist und gegenseitig durch den Punct: $p = 0$, geht. Hiernach können wir p und q in der Bedeutung derjenigen Segmente nehmen, welche auf den beiden, durch solche zwei Puncte gehenden, Polaren durch die bezüglichen Tangenten der Curve (10) abgeschnitten werden. Es folgt hieraus, dafs in der letzten Gleichung M und N diejenigen Segmente bezeichnen, welche von den durch jeden der beiden Puncte (8) gehenden Tangenten der Curve, auf der durch den jedesmaligen andern Punct gehenden Polaren, abgeschnitten werden, und also, indem wir diese Polaren von der Curve begränzt betrachten, den Hälften derselben bezüglich gleich sind. M und N sind nur dann beide reell, wenn die Curve eine Hyperbel ist und der Durchmesser, auf welchem die beiden Puncte (8) liegen, ihr nicht begegnet. Die Form der letzten Gleichung sagt aus, „dafs, wenn man von irgend einem Puncte einer der beiden

den Polaren, zwei Tangenten an die Curve legt, von diesen auf die andern Polare ein solches Segment interceptirt wird, dessen Mitte in den zuletzt genannten Durchmesser fällt."

Die unendlich vielen Puncten-Paare desselben Durchmessers, die wir, nach einander, alle durch die beiden Gleichungen (8) darstellen können, bilden eine Involution, deren Mittelpunct der Mittelpunct der Curve ist. Nach der 62. Nummer erhalten wir, indem wir p und q in der bisherigen Bedeutung überall beibehalten, und uns nach einander auf die verschiedenen Puncten-Paare (8) beziehen, die Gleichung:

$$p^2 \cos^2\chi + q^2 \sin^2\chi + \mu = 0, \qquad (11)$$

in welcher χ einen constanten, reellen oder imaginären, Winkel bedeutet. Wenn wir zuerst p und dann q gleich Null setzen, so kommt:

$$\sin^2\chi = -\frac{\mu}{M^2}, \qquad \cos^2\chi = -\frac{\mu}{N^2},$$

und hieraus ergibt sich die metrische Relation:

$$\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2} = \frac{1}{\mu}.$$

„Die Quadrat-Summe der reciproken Längen der beiden, durch irgend zwei Puncte (8), die auf einem beliebigen Durchmesser eines gegebenen Kegelschnittes liegen, gehenden, und dem zugeordneten Durchmesser parallelen, Chorden ist constant."

Wenn $N = \infty$, ist $\mu = M^2$. Alsdann aber bedeutet M die halbe Länge des zugeordneten Durchmessers.

138. In dem zuletzt angedeuteten Falle verliert die Form der Gleichung (11) ihre Bedeutung. Alsdann liegen, von den drei zugeordneten Polen, zwei, und zwar nach der Richtung zweier zugeordneten Durchmesser, unendlich weit, und der dritte derselben ist der Mittelpunct der Curve. Führen wir alsdann in derselben Bedeutung, als in der 135. Nummer, n statt q ein, und schreiben alsdann [u] und [v] an die Stelle von $\left(\frac{1}{p}\right)$ und $\left(\frac{n}{p}\right)$, so geht die Gleichung (9) in die folgende über:

$$1 + \lambda[v]^2 + \mu[u]^2 = 0,$$

die wir auch auf die nachstehende Form bringen können:

$$F^2[u]^2 + G^2[v]^2 = F^2G^2.$$

Es bedeuten [u] und [v] die reciproken Werthe derjenigen Segmente, welche, auf zwei zugeordneten Durchmessern der Curve, von der bezüglichen Tangente derselben abgeschnitten werden, und F und G die reciproken Werthe der halben Längen der beiden zugeordneten Durchmesser.

Wir können hiernach Alles, was auf zugeordnete Durchmesser Bezug hat (115—121), mit derselben Leichtigkeit an die Betrachtung von Linien-Coordinaten knüpfen, als an die Betrachtung von Punct-Coordinaten. Die Puncte, die sich auf einer unendlich weit entfernten geraden Linie zu Paaren einer Involution zusammenordnen, werden durch die Richtungen zugeordneter Durchmesser bestimmt (61).

139. Wir wollen uns nochmals zur Gleichung:

$$M^2p^2 + N^2q^2 = M^2N^2, \qquad (10)$$

zurückwenden, den Abstand der beiden Puncte (8) von einander durch D bezeichnen, und überdiefs die besondere Voraussetzung machen, dafs die Segmente p und q auf solchen zwei durch diese beiden Puncte gehenden geraden Linien liegen, welche auf der, dieselben verbindenden, geraden Linie senkrecht stehen. Die letztgenannte gerade Linie ist alsdann eine Axe der Curve, und nennen wir denjenigen Winkel, welchen eine belie-

bige Tangente derselben mit dieser Axe bildet, ξ, so ist, indem wir p und q auf diese Tangente beziehen:

$$\pm tang\,\xi = \frac{p-q}{D}.$$

Setzen wir q gleich Null, so wird $p = \pm N$ und es kommt:

$$tang\,\xi = \pm\frac{N}{D}.$$

Wenn insbesondere $N^2 = -D^2$, wonach die Gleichung (10) in die nachstehende übergeht:

$$M^2p^2 - D^2q^2 = -M^2D^2, \qquad (12)$$

so ist für jede, durch den Punct:

$$q = 0,$$

gehende, Tangente der Curve, $tang\,\xi = \pm\sqrt{-1}$, und dieser Punct also ein Brennpunct der Curve, (128). Nimmt man $p = q$, so erhält man eine reelle oder imaginäre Tangente der Curve, je nachdem $M^2 < D^2$ oder $M^2 > D^2$; offenbar ist in dem ersten Falle die Curve eine Ellipse und in dem zweiten eine Hyperbel. In dem Uebergangs-Falle, dafs $M^2 = D^2$, liegt die fragliche Tangente der Curve unendlich weit. Diese Curve ist alsdann eine Parabel und ihre Gleichung (12) particularisirt sich auf folgende Weise:

$$p^2 - q^2 = -D^2. \qquad (13)$$

140. Der Raum verbietet in irgend eine weitere Discussion der Gleichung (12) einzugehen. Im zweiten Bande meiner „Entwicklungen“ habe ich die Gleichung der Kegelschnitte unter einer andern Form, in der ein Brennpunct ebenfalls in Evidenz tritt, ausführlich discutirt. Wenn wir nemlich von irgend zwei auf einander senkrechten Axen beliebig ausgehen und [u] und [v] in derselben Bedeutung als in der 138. Nummer nehmen, so können wir, durch schickliche parallele Verschiebung der beiden Axen, die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen [u] und [v] immer auf die folgende Form bringen:

$$([u]-u')^2 + ([v]-v')^2 = k^2. \qquad (14)$$

Der Durchschnittspunct der beiden Axen ist alsdann ein Brennpunct der bezüglichen Curve, für dessen Polare man

$$[u] = u', \qquad [v] = v'$$

hat. k ist, der Benennungsweise der alten Geometer gemäfs, gleich dem reciproken Werthe des Parameters, das heifst derjenigen halben Chorde der Curve, die auf ihrer Axe im Brennpuncte senkrecht steht.

141. Wir können in der Gleichung der Ellipse und Hyperbel auch beide Brennpuncte zugleich zur Evidenz bringen. Indem wir zu diesem Ende, statt der Gleichung (9), zuvörderst die folgende nehmen:

$$p^2 + 2\varkappa pq + \lambda q^2 + \mu = 0, \qquad (15)$$

sind:

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad (16)$$

die Gleichungen irgend zweier Puncte eines Durchmessers der bezüglichen Curve, und dieser Durchmesser ist insbesondere die Axe derselben, wenn wir den veränderlichen Grösen p und q dieselbe Bedeutung lassen, die wir ihnen in der 139. Nummer beigelegt haben. Nennen wir den halben Abstand der beiden Puncte (16) von einander E, und denjenigen Winkel, welcher eine Tangente der Curve überhaupt mit ihrer Axe bildet, wie früher, ξ, so ist für diejenigen beiden Tangenten insbesondere, welche durch die beiden Puncte (16) gehen, bezüglich:

$$tang^2\xi = -\frac{\mu}{4\lambda E^2}, \qquad tang^2\xi = -\frac{\mu}{4E^2},$$

und wir erhalten beide Male: $tang^2\xi = \pm\sqrt{-1}$, wenn zugleich:

$$\mu = 4E^2, \qquad \lambda = 1.$$

Wenn also die beiden Puncte (16) insbesondere die beiden Brennpuncte der Curve sind, so kommt für die Gleichung dieser Curve:

$$p^2 + 2xpq + q^2 + 4E^2 = 0,$$

oder auch, da x einen unbestimmten Coefficienten bedeutet:

$$(p-q)^2 + 2xpq + 4E^2 = 0. \qquad (17)$$

Wenn wir, um die halbe zweite Axe der Curve, welche durch diese letzte Gleichung dargestellt wird, zu bestimmen, $q = p = B$ setzen, so kommt:

$$xB^2 + 4E^2 = 0.$$

Je nachdem x positiv oder negativ ist, ist also die Curve entweder eine Hyperbel oder eine Ellipse. Führen wir statt der Constanten x, als neue Constante, B ein, so geht die Gleichung (17) in die nachstehende über:

$$B^2(p-q)^2 - 4E^2(pq - B^2) = 0. \qquad (18)$$

Da überhaupt für irgend eine beliebige gerade Linie

$$\frac{4E^2}{(p-q)^2 + 4E^2} = cos^2\xi,$$

so können wir der letzten Gleichung endlich auch noch die folgende Form geben:

$$pq\,cos^2\xi = B^2,$$

oder auch, indem wir $p\,cos\xi = P$ und $q\,cos\xi = Q$ setzen, die nachstehende:

$$P.Q = B^2. \qquad (19)$$

Diese Gleichung sagt aus, „dafs das Product derjenigen beiden Perpendikel, welche von den beiden Brennpuncten einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel auf irgend eine beliebige Tangente derselben gefällt werden, constant und dem Quadrate der halben zweiten Axe der Curve gleich ist.“

Ohne in irgend ein Detail hier eingehen zu können, mufs ich mich auf die Bemerkung beschränken, dafs alle bekannten Eigenschaften eines Kegelschnittes, bei welchen seine Brennpuncte beide zugleich in Betracht kommen, und namentlich alle hierher gehörigen Winkel-Beziehungen, sich ohne Mühe aus der Gleichung (18), oder auch aus der Gleichung (19), herleiten lassen. —

142. Wenn wir auf die bisherigen Entwicklungen dieses Abschnittes unsere Blicke zurückwerfen, so tritt uns vor Allem eine gewichtige Bemerkung entgegen: dafs nemlich die verschiedenen Eigenschaften der Curven zweiter Ordnung und Classe alle unter einander in einer viel innigern Verbindung stehen, als man gewöhnlich anzunehmen geneigt ist, und dafs dieselben im Grunde anders nichts sind, als verschiedene, bei unserer Darstellungsweise, durch die verschiedenen Coordinaten-Bestimmungen vermittelte, Aussagen einer und derselben characteristischen Eigenschaft. Zu ähnlichen Resultaten würde uns auch die Betrachtung der Collineations-Verwandtschaft und der Reciprocität führen, wenn wir derselben ihre vollständige Entwicklung geben. Aber ich glaube der vorstehenden Darstellung nicht mit Unrecht den Vorzug eingeräumt zu haben, und zwar, auch wenn wir von der Form der Darstellung absehen, und über das vorliegende Feld der Untersuchung nicht hinausblicken, noch aus einem doppelten Grunde; erstlich weil wir an jede besondere Coordinaten-Bestimmung, welcher eine besondere Eigenschaft entspricht, unmittelbar numerische Entwicklungen anknüpfen, und jede, dem jedesmaligen

speciellen Falle angemessen, wählen können, und zweitens weil die Anwendung der auf Collineation und Reciprocität sich gründenden Uebertragungs-Principe mit sich bringt, dafs wir nothwendig, indem wir von coordinirten Fällen gewissen eine Auszeichnung geben, Willkührliches in die Methode einmischen.

143. Ich will diesen Paragraphen mit einigen skizzenartigen Betrachtungen beschliefsen, bei welchen ich blofs die Absicht habe, die Natur unserer Methode möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

Der leichtern Uebersichtlichkeit halber, bemerke ich von vorne herein, dafs wir, in den folgenden Nummern, durch die kleinen lateinischen Buchstaben p, q, g u. s. w. überall lineare und ganze Functionen (gewöhnlicher Parallel-Coordinaten etwa) von der allgemeinen Form $(Ay+Bx+C)$, und durch die bezüglichen Buchstaben des grofsen Alphabets P, Q, G u. s. w. die jenen Functionen entsprechenden geraden Linien bezeichnen wollen. Den griechischen Buchstaben geben wir, wie bisher, die Bedeutung unbestimmter Coefficienten. —

Dadurch, dafs ein Kegelschnitt im Allgemeinen von einer geraden Linie in zwei Puncten geschnitten wird, und die Tangente in einem dieser Durchschnittspuncte also auch der Curve in keinem andern Puncte mehr begegnen kann, wird bedingt, dafs die Gleichung jedes gegebenen Kegelschnittes unter der nachstehenden Form:

$$pq+g^2=0,$$

geschrieben werden kann (123). Und zwar können wir denselben Kegelschnitt nach einander durch unendlich viele Gleichungen von derselben Form darstellen; je zwei Tangenten desselben, die wir willkührlich annehmen können, entspricht eine solche Gleichung. Aber die ersten Theile aller dieser Gleichungen sind, weil sie eine und dieselbe Curve darstellen, identisch dieselben, oder werden es wenigstens durch Hinzufügung eines unbestimmten Coefficienten, sobald wir dieselben uns so entwickelt denken, dafs sie alle blofs die beiden ursprünglichen Coordinaten y und x oder dieselben beiden linearen Functionen dieser Coordinaten enthalten. Stellen wir also einen gegebenen Kegelschnitt nach einander durch jede der folgenden beiden Gleichungen dar:

$$pq+g^2=0, \qquad rs+k^2=0, \tag{1}$$

so ist:

$$pq+g^2 \equiv rs+k^2, \text{ *)}$$

und hieraus ergibt sich:

$$pq-rs \equiv k^2-g^2 \equiv (k+g)(k-g). \tag{2}$$

Die geraden Linien P und Q, R und S bestimmen irgend ein Viereck, das dem gegebenen Kegelschnitte umschrieben ist; die Berührungspuncte auf den beiden erstgenannten Seiten desselben liegen auf der Linie G, die Berührungspuncte auf den beiden letztgenannten auf der Linie K. Die beiden Gleichungen:

---

*) Ich füge mit Rücksicht darauf, dafs die linearen Functionen drei Constante enthalten, keinen unbestimmten Coefficienten hinzu, und nehme die Gleichung des Textes statt der nachstehenden:

$$pq+g^2 \equiv \mu(rs+k^2).$$

Da diese Gleichung eine identische ist, so mufs sie für jeden beliebigen Werth jeder der beiden veränderlichen Gröfsen, von welchen die verschiedenen Functionen abhängen, befriedigt werden. Geben wir diesen beiden Gröfsen insbesondere diejenigen Werthe, durch welche etwa p und r beide zugleich verschwinden, so ist, bei dieser Voraussetzung, $g^2 \equiv \mu k^2$. Mithin ist μ positiv und die Form der Gleichung des Textes nicht nur aus der geometrischen Deutung *a posteriori*, sondern auch unmittelbar gerechtfertigt.

$$k+g=0, \qquad k-g=0,$$

stellen, was ihre Form zeigt, solche zwei gerade Linien dar, welche beide durch den Durchschnitt von K und G gehen und mit diesen Linien vier Harmonicalen bilden. Die Gleichung (2) zeigt, dafs dieselben beiden geraden Linien die Diagonalen desjenigen Vierecks sind, das zu seinen beiden Paaren gegenüberliegender Seiten die geraden Linien P und Q, R und S hat. Wir gelangen hiernach zu dem schon von Newton gefundenen Satze:

„Wenn man um einen gegebenen Kegelschnitt irgend ein Viereck beschreibt, so schneiden sich die beiden Diagonalen desselben und diejenigen beiden geraden Linien, welche die Berührungspuncte auf den gegenüberliegenden Seiten verbinden, alle vier, in einem und demselben Puncte, und bilden überdiefs vier Harmonicalen."

144. Stellen wir einen gegebenen Kegelschnitt, nach einander, durch jede der nachstehenden drei Gleichungen dar:

$$pq+g^2=0, \qquad qr+h^2=0, \qquad rp+k^2=0,$$

so sind die geraden Linien P, Q und R die Seiten irgend eines dem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecks, und die Berührungspuncte auf je zweien derselben werden durch die drei geraden Linien G, H und K verbunden. Hier können wir, ähnlich wie in der vorigen Nummer,

$$pq+g^2 \equiv qr+h^2 \equiv rp+k^2$$

setzen, wonach auch folgende drei identische Gleichungen sich ergeben:

$$(p-r)q \equiv (h+g)(h-g),$$
$$(r-q)p \equiv (g+k)(g-k),$$
$$(q-p)r \equiv (k+h)(k-h).$$

Da jeder der beiden Theile der drei vorstehenden Gleichungen, gleich Null gesetzt, dieselben beiden geraden Linien darstellt, so ist klar, dafs die Gleichungen:

$$p-r=0, \qquad r-q=0, \qquad q-p=0,$$

diejenigen drei geraden Linien darstellen, welche von den Winkelpuncten des umschriebenen Dreiecks nach den Berührungspuncten auf den gegenüberliegenden Seiten gezogen werden können. Da eine dieser Gleichungen eine algebraische Folge aus den beiden übrigen ist, so folgt, „dafs in jedem einem gegebenen Kegelschnitte umschriebenen Dreiecke diejenigen drei geraden Linien, welche die Winkelpuncte desselben mit den Berührungspuncten auf den gegenüberliegenden Seiten verbinden, in einem und demselben Puncte sich schneiden." (65)

Nach den drei vorstehenden identischen Gleichungen können wir dieselben drei geraden Linien, bei schicklicher Wahl der Vorzeichen, auch durch folgende drei Gleichungen darstellen:

$$h\pm g=0, \qquad g\pm k=0, \qquad k\pm h=0.$$

Mit Rücksicht darauf, dafs einerseits die Vorzeichen der drei Functionen g, h und k unbestimmt bleiben, andrerseits aber die fraglichen drei geraden Linien durch denselben Punct gehen, können wir insbesondere in den letzten Gleichungen die untern Vorzeichen nehmen. Alsdann stellen dieselben Gleichungen mit den obern Zeichen:

$$h+g=0, \qquad g+k=0, \qquad k+h=0$$

die drei Dreiecks-Seiten Q, P und R dar. Aus der Form dieser Gleichungen ergibt sich der Satz, „dafs in jedem einem gegebenen Kegelschnitte umschriebenen Dreiecke jede der drei Seiten von derjenigen geraden Linie, welche die Berührungspuncte auf den jedesmaligen beiden übrigen verbindet, so geschnitten wird, dafs die drei Durchschnittspuncte in gerader Linie liegen." (65)

Die auf diese Weise bestimmte gerade Linie ist nach der in der 14. Nummer eingeführten Benennung die Polare des eben bestimmten Punctes in Beziehung auf das von den drei Berührungs-Chorden gebildete, oder auch, was dasselbe heifst, in Beziehung auf das umschriebene Dreieck.

145. Stellen wir einen gegebenen Kegelschnitt, nach einander, durch jede Gleichung der folgenden Reihe dar:

$$pq+g^2=0, \quad qr+h^2=0, \quad rs+k^2=0, \quad st+l^2=0, \quad tp+m^2=0,$$

so ergibt sich unmittelbar, wenn wir das Product der ersten und das Product der zweiten Theile dieser Gleichungen bilden und dann die Quadrat-Wurzel ausziehen:

$$pqrst = \pm ghklm. \tag{1}$$

Da wir dieses Resultat auf beliebig viele Gleichungen ausdehnen können, so erhalten wir sogleich allgemein die folgende metrische Relation:

„Wenn man in und um einen gegebenen Kegelschnitt irgend zwei Polygone so beschreibt, dafs die Winkelpuncte des einen die Berührungspuncte auf den Seiten des andern sind, so steht für jeden beliebigen Punct auf dem Umfange des gegebenen Kegelschnittes, das Product der Abstände dieses Punctes von allen Seiten des einen Polygons zu dem Producte der Abstände desselben Punctes von allen Seiten des andern Polygons in einem constanten Verhältnisse. Und ebenso steht auch, für irgend eine beliebige Tangente des gegebenen Kegelschnittes, das Product der auf diese Tangente von allen Winkelpuncten des einen Polygons zu dem Producte der auf diese Tangente von allen Winkelpuncten des andern Polygons gefällten Perpendikel in einem constanten Verhältnisse."

Der zweite Theil dieses Satzes ergibt sich nach dem Principe der Reciprocität, oder auch, wenn wir den oben gebrauchten Functionen die Bedeutung von Linien-Coordinaten geben (45).

146. Wenn P und Q, R und S die gegenüberliegenden Seiten irgend eines in einen gegebenen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks sind, so können wir diesen durch folgende Gleichung darstellen:

$$pq = rs. \tag{1}$$

An diese Form, welche, wenn wir eines der beiden Paare gegenüberliegender Seiten des eingeschriebenen Vierecks zusammenfallen lassen, in die den letzten Discussionen zu Grunde liegende Form übergeht, will ich, beispielsweise, hier blofs den Beweis eines Satzes knüpfen, der, wo eine neue Behandlungsweise der Geometrie hervortritt, nicht unbewiesen bleiben darf.

Die Gleichung (1) wird befriedigt, einmal wenn wir

$$p = r, \quad \text{und zugleich} \quad q = s, \tag{2}$$

das andere Mal, wenn wir

$$p = s, \text{*)} \quad \text{und zugleich} \quad q = r, \tag{3}$$

setzen. Es schneiden sich also die beiden geraden Linien (2), so wie auch die beiden geraden Linien (3) auf dem gegebenen Kegelschnitte. Nennen wir jene beiden geraden Linien L und M, diese beiden N und O, so ist ersichtlich, dafs P und Q, L und O, M und N die drei Paare gegenüberliegender Seiten eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen

*) Bei der allgemeinen Form mit drei Constanten, welche wir hier den linearen Functionen unterlegen, können wir der unbestimmten Coefficienten entbehren, und durch die Gleichung $p = r$ immer noch jede beliebige gerade Linie, welche durch den Durchschnitt von P und R, und durch die Gleichung $p = s$ jede beliebige gerade Linie, welche durch den Durchschnitt von P und S geht, uns dargestellt denken.

Sechsecks sind. Wenn wir die erste der beiden Gleichungen (2) von der zweiten der beiden Gleichungen (3), und dann die erste der beiden Gleichungen (3) von der zweiten der beiden Gleichungen (2) abziehen, so kommt beide Male:

$$q = p.$$

Wir sehen hieraus, „dafs, wenn man in einem gegebenen Kegelschnitt irgend ein Sechseck beschreibt, die gegenüberliegenden Seiten desselben sich paarweise in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen.“ (Pascal.)

Hieraus folgt also auch, nach dem Principe der Reciprocität, „dafs, wenn man um einen gegebenen Kegelschnitt irgend ein Seehseck beschreibt, die drei Diagonalen dieses Sechsecks in einem und demselben Puncte sich schneiden.“ (Brianchon.)

147. Ich habe schon an einem andern Orte die allgemeine analytische Tangenten-Theorie als die unmittelbare geometrische Interpretation des bekannten Theorems über die homogenen Functionen dargestellt. Wenn nemlich

$$\Pi = 0 \qquad (1)$$

irgend eine homogene Gleichung des m. Grades zwischen beliebig vielen linearen Functionen p, q, r, s .. ist, so hat man nach dem genannten Theorem:

$$\frac{d\Pi}{dp}\cdot p + \frac{d\Pi}{dq}\cdot q + \frac{d\Pi}{dr}\cdot r + \frac{d\Pi}{ds}\cdot s + .. \equiv m\Pi. \qquad (2)$$

Wir wollen nun die partiellen Differential-Coefficienten auf irgend einen gegebenen Punct derjenigen Curve, welche in der Voraussetzung, dafs die linearen Functionen Punct-Coordinaten bedeuten, durch die Gleichung (1) dargestellt wird, beziehen, diese Differential-Coefficienten alsdann zur Unterscheidung umklammern, und demnach folgende Gleichung bilden:

$$\left(\frac{d\Pi}{dp}\right)p + \left(\frac{d\Pi}{dq}\right)q + \left(\frac{d\Pi}{dr}\right)r + \left(\frac{d\Pi}{ds}\right)s + .. = 0. \qquad (3)$$

Diese Gleichung ist die Gleichung der Tangente an die gegebene Curve in dem gegebenen Puncte. Denn diese Gleichung ist vom ersten Grade und stellt also eine gerade Linie dar. Diese gerade Linie geht durch den gegebenen Punct; denn, wenn diesem Puncte die besondern Functionen-Werthe p', q', r', s' .. entsprechen, so befriedigen diese, weil der Punct auf der Curve liegt, die Gleichung (1), und folglich, der identischen Gleichung (2) zufolge, auch die Gleichung (3). Wenn wir einerseits auf der durch die Gleichung (1) gegebenen Curve, andrerseits auf der geraden Linie (3), von dem gegebenen, beiden gemeinschaftlichen, Puncte aus, zu einem consecutiven Puncte übergehen, und, dem entsprechend, einerseits die Gleichung (1), andrerseits die Gleichung (3) differentiiren, und nach der Differentiation für p, q, r, s .. ihre besondern Werthe p', q', r', s' .. einsetzen, so ergibt sich übereinstimmend beide Male:

$$\left(\frac{d\Pi}{dp}\right)dp + \left(\frac{d\Pi}{dq}\right)dq + \left(\frac{d\Pi}{dr}\right)dr + \left(\frac{d\Pi}{ds}\right)ds + .. = 0.$$

Es ist also die gerade Linie (3) die Tangente der Curve (1) in dem gegebenen Puncte.

Wenn die linearen Functionen statt Punct-Coordinaten Linien-Coordinaten bedeuten, so stellt die Gleichung (3) den Berührungspunct auf einer gegebenen Tangente der Curve (1) dar.

Die Uebertragung der allgemeinen Form der Gleichung (3) auf jeden vorliegenden Fall bietet durchaus keine Schwierigkeit dar. Wenn, zum Beispiel,

$$p^2 + \lambda q^2 + \mu r^2 = 0,$$

die gegebene Gleichung ist, so ist:

$$\frac{d\Pi}{dp} = 2p, \qquad \frac{d\Pi}{dq} = 2\lambda q, \qquad \frac{d\Pi}{dr} = 2\mu r,$$

wonach die Gleichung (3) in die nachstehende übergeht:

$$p'p + \lambda q'q + \mu r'r = 0.$$

Dieselbe Tangenten-Theorie findet auch dann noch ihre Anwendung, wenn die Curve durch eine nicht homogene Gleichung gegeben ist. Wir können eine solche Gleichung durch Einführung einer neuen Function homogen machen, dann wie oben verfahren und in der auf diese Weise sich ergebenden Gleichung (3), statt der neu eingeführten Function, wiederum Eins schreiben.

Ich kann in keine Anwendung der vorstehenden Tangenten-Bestimmung eingehen, und mufs auch die Theorie sich osculirender Kegelschnitte hier unberührt lassen.

148. Die Bestimmung eines Kegelschnittes hängt von fünf Constanten, die Bestimmung eines Systemes zweier Kegelschnitte also von zehn Constanten ab. Die nachstehenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} p^2 + \lambda q^2 + \mu r^2 &= 0, \\ p^2 + \lambda' q^2 + \mu' r^2 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

enthalten zusammen die Anzahl von zehn Constanten, von denen dreimal zwei auf die drei linearen Functionen p, q und r, welche gleichmäfsig in beiden Gleichungen sich vorfinden, kommen. Wir können also, im Allgemeinen, je zwei Kegelschnitte durch das System der vorstehenden beiden Gleichungen ausdrücken, oder, was dasselbe heifst (125), „wenn irgend zwei Kegelschnitte gegeben sind, so gibt es, im Allgemeinen, drei solche gerade Linien, welche, in Beziehung auf jeden derselben, drei zugeordnete Polaren sind, und also auch drei solche Puncte, welche, in Beziehung auf jeden derselben, drei zugeordnete Pole sind.“ Es bleibt hierbei aber zugleich noch die Frage zu erörtern übrig, erstens, ob zwei gegebene Kegelschnitte sich nur auf einzige oder auf mehrfache Weise durch das System zweier Gleichungen von der voranstehenden Form darstellen lassen, und zweitens, in welchen Fällen diefs auf reelle Weise geschehen kann, so nemlich, dafs einerseits die drei Functionen p, q und r, und also auch die drei zugeordneten Polaren:

$$p = 0; \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad (2)$$

und andrerseits die unbestimmten Coefficienten λ, μ, λ' und μ' reelle Werthe erhalten. Es würde wohl Niemand den Muth haben, auf dem Wege der unmittelbaren Elimination, die verschiedenen möglichen Fälle zu discutiren, und dann die geometrische Deutung der algebraischen Determinationen zu unternehmen. Aber alle Schwierigkeit verschwindet sogleich, und wir erhalten den vollständigsten Aufschlufs ohne alle Entwicklung, wenn wir die algebraische Form der Gleichungen (1) von ihrer geometrischen Bedeutung nicht trennen, und beide als sich gegenseitig bedingend ansehen.

Wenn wir die Gleichungen (1) paarweise zusammenstellen, so erhalten wir nach einander folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda')q^2 + (\mu - \mu')r^2 &= 0, \\ (\lambda - \lambda')p^2 + (\lambda\mu' - \lambda'\mu)r^2 &= 0, \\ (\mu - \mu')p^2 - (\lambda\mu' - \lambda'\mu)q^2 &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Jede dieser drei neuen Gleichungen stellt, was ihre Form zeigt, ein System von zwei geraden Linien dar, das mit zwei der drei zugeordneten Polaren vier Harmonicalen bildet, und weil jede dieser Gleichungen eine algebraische Folge aus den Gleichungen (1) ist, geht das besagte Linien-System durch alle vier Durchschnitte der beiden gegebenen Kegel-

gelschnitte. Als Normal-Fall wollen wir annehmen, dafs diese Durchschnitte alle vier reell sind und nicht irgend zwei derselben zusammenfallen. Wenn wir alsdann durch diese Puncte, zu zwei und zwei genommen, drei Paare von geraden Linien legen, so sind diese Linien-Paare diejenigen, welche durch die drei letzten Gleichungen dargestellt werden. Die Durchschnittspuncte der beiden Linien jedes Paares sind die drei zugeordneten Pole, in Beziehung auf jeden der beiden Kegelschnitte, und diejenigen geraden Linien also, welche diese Puncte paarweise verbinden, die drei, durch die Gleichungen (2) dargestellten, zugeordneten Polaren. Es bestimmt sich hiernach das System dieser drei Polaren, und mithin auch die Gruppe der drei ihnen entsprechenden Functionen p, q und r, auf einzige Weise. Die unbestimmten Coefficienten λ, μ, λ' und μ' sind im vorliegenden Normalfalle offenbar reell.

Wenn wir andrerseits durch p, q und r Punct-Coordinaten bezeichnen, so stellen die Gleichungen (3) die drei zugeordneten Pole, in Beziehung auf jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte (1) dar. Alsdann werden ferner durch die Gleichungen (3) die drei Paare gegenüberliegender Durchschnittspuncte der, von den vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Kegelschnitte gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur dargestellt. Die drei geraden Linien, welche diese drei Puncten-Paare verbinden, sind die drei zugeordneten Polaren, die drei Diagonalen der vierseitigen Figur, in Beziehung auf jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte, und die Durchschnitte je zweier derselben die drei zugeordneten Pole, welche, bei der untergelegten neuen Functionen-Bedeutung, durch die Gleichungen (3) dargestellt werden.

Fassen wir zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

„Verbindet man die vier Durchschnittspuncte zweier gegebenen Kegelschnitte durch sechs gerade Linien, so schneiden sich diese geraden Linien in drei neuen Puncten; in der von den vier gemeinschaftlichen Tangenten derselben beiden Kegelschnitte gebildeten vollständigen vierseitigen Figur können wir die drei Diagonalen ziehen. Jene drei Durchschnittspuncte sind die Winkelpuncte eines Dreiecks, dessen Seiten diese drei Diagonalen sind. In Beziehung auf jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte ist jeder Winkelpunct der Pol der gegenüberliegenden Seite."

Dieser Satz ist einer der fruchtbarsten; an die Discussion desselben knüpft sich die ganze Theorie der gegenseitigen Beziehung irgend zweier Kegelschnitte zu einander, wohin, unter Anderm, auch die Theorie ihrer Osculation gehört.

149. Den Nerv der Beweisführung in der vorigen Nummer will ich durch die folgenden Bemerkungen noch deutlicher an den Tag zu legen suchen. Obgleich diese Beweisführung sich nur auf ein einzelnes Beispiel bezieht, so möchte ich doch in derselben eine allgemeine Methode, die ich erst später characterisiren kann, schon jetzt durchblicken lassen.

Es können zwei Kegelschnitte dieselben drei Puncte zu zugeordneten Polen haben; die beiden Gleichungen (1) stellen zwei solche Kegelschnitte dar. Weil diese Gleichungen zusammen zehn Constante enthalten, so können wir, im Allgemeinen, je zwei gegebene Kegelschnitte durch zwei Gleichungen von dieser Form darstellen. Also haben je zwei Kegelschnitte drei gemeinschaftliche zugeordnete Pole. Sie haben nur eine einzige Gruppe solcher drei gemeinschaftlicher zugeordneter Pole, weil wir, aus der Form der Gleichungen (1), bei einer Annahme, die keine Particularisation einschliefst, und also auch keine Reduction der zur Bestimmung der beiden Kegelschnitte nothwendigen Anzahl

von Constanten mit sich bringt, die Gruppe solcher drei Pole auf einzige Weise construiren können.

Denken wir uns ferner nun die beiden gegebenen Kegelschnitte in irgend einer Coordinaten-Bestimmung ausgedrückt, so sind die Coordinaten-Werthe der fraglichen drei Pole algebraische Functionen von zehn Constanten, die, wenn die Art und die Lage der beiden gegebenen Kegelschnitte sich ändert, andere Werthe erhalten. Ueber die Form dieser Functionen erhalten wir durch die geometrische Construction der Pole Aufschluſs. Die beiden Coordinaten der drei Pole, die in derselben gegenseitigen Beziehung zur Curve stehen, sind durch zwei Gleichungen des dritten Grades gegeben. Aus der geometrischen Construction derselben in dem Normalfalle erkennen wir, unter welchen Bedingungen diese Pole nicht mehr alle drei reell sein können; aus der algebraischen Betrachtung folgt, daſs einer derselben, so wie die gerade Linie, welche die beiden übrigen verbindet, immer reell bleibt. Nachdem für die allgemeinen Fälle der Parallelismus zwischen den geometrischen Beziehungen und der algebraischen Bestimmung feststeht, ist es leicht, denselben auch für die verschiedenen Particularisationen, wo Puncte oder gerade Linien unendlich weit rücken oder zusammenfallen, durchzuführen, und insbesondere auch, diejenigen Modificationen, welche particulare Fälle in der analytischen Beziehung etwa erfordern, unmittelbar aus der geometrischen Betrachtung dieser Fälle herzunehmen.

Dritter Abschnitt.

Die Curven dritter Ordnung.

§. 1.

Discussion der allgemeinen Gleichung des dritten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen.

150. Es sei

$$\varphi^3+A\varphi^2\psi+B\varphi\psi^2+C\psi^3+D\varphi^2+E\varphi\psi+F\psi^2+G\varphi+H\psi+I=0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung des dritten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen φ und ψ. Im Allgemeinen können wir diese Gleichung auf jede andere Form bringen, unter welcher dieselbe eben so viele, von einander unabhängige, Constante behält, als sie ursprünglich hatte, nemlich neun. Wenn die Anzahl dieser Constanten geringer ist, so kann die fragliche Umformung nur in besondern Fällen, nur unter solchen Bedingungen, durch welche die Anzahl der Constanten der vorliegenden allgemeinen Gleichung reducirt wird, Statt finden. Wenn hingegen jene Anzahl gröfser ist, so enthält die Umformung etwas Willkührliches, das erst dann wegfällt, wenn wir solche Bedingungen hinzufügen, wodurch diese Anzahl wiederum auf neun sich reducirt.

Wenn in der Gleichung unter der neuen Form statt der ursprünglichen veränderlichen Gröfsen φ und ψ lineare und ganze Functionen derselben sich unmittelbar darstellen sollen, so mufs zuvörderst ein Product aus drei solchen Functionen vorkommen, damit die Gleichung nicht unter ihren frühern Grad hinuntersinke. Einem solchen Producte entsprechen, wenn wir lineare Functionen von der Form $(\varphi+a\psi+b)$ nehmen, sechs Constante, so dafs also aufserdem nur noch drei Constante, also, aufser einer neuen linearen Function von derselben Form, nur noch ein unbestimmter Coefficient sich vorfinden dürfen. Indem wir hiernach der Gleichung von der möglichst einfachen Form, welche die nothwendige und keine überflüssige Anzahl von Constanten enthält, bilden, gelangen wir zu der folgenden:

$$(\varphi+a\psi+b)(\varphi+a'\psi+b')(\varphi+a''\psi+b'')+\mu(\varphi+c\psi+d)=0. \qquad (2)$$

Wenn wir die vorstehende Gleichung entwickeln, so kommt:

$$\varphi^3+(a+a'+a'')\varphi^2\psi+(aa'+aa''+a'a'')\varphi\psi^2+aa'a''\psi^3$$
$$+(b+b'+b'')\varphi^2+((a+a')b''+(a+a'')b'+(a'+a'')b)\varphi\psi+(aa'b''+aa''b'+a'a''b)\psi^2$$
$$+(bb'+bb''+b'b''+\mu)\varphi+(ab'b''+a'bb''+a''bb'+\mu c)\psi+(bb'b''+\mu d)=0,$$

und aus der Zusammenstellung der Coefficienten dieser Gleichung mit den entsprechenden Coefficienten der Gleichung (1) erhalten wir, um die neuen Constanten durch die ursprünglichen zu bestimmen, die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a+a'+a'' &= A,\\ aa'+aa''+a'a'' &= B,\\ aa'a'' &= C; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} b+b'+b'' &= D,\\ (a+a')b''+(a+a'')b'+(a'+a'')b &= E,\\ aa'b''+aa''b'+a'a''b &= F; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} bb'+bb''+b'b''+\mu &= G,\\ ab'b''+a'bb''+a''bb'+\mu c &= H,\\ bb'b''+\mu d &= I. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese neun Gleichungen sind von der Art, dafs sie im Allgemeinen für die neun Constanten a, a', a'', b, b', b'' c, d und μ vollkommen bestimmte Werthe geben. Die angezeigte Umformung ist also im Allgemeinen möglich, und es fragt sich blofs, erstens, ob und in welchen Fällen die zu bestimmenden Constanten reell oder imaginär sind, und zweitens, ob in besondern Fällen (bei bestimmten Voraussetzungen über die ursprünglichen neun Constanten A, B, u. s. w.) nicht dennoch die vorstehenden neun Gleichungen Widersprüche enthalten, die nur dadurch gehoben werden können, dafs wir einer oder mehrern der neuen Constanten unendlich grofse Werthe beilegen, wonach denn mit diesen besondern Fällen die angenommene Form der neuen Gleichung unverträglich wäre.

151. Die drei Gleichungen (3) zeigen, dafs $(-a)$, $(-a')$ und $(-a'')$ die drei Wurzeln der nachstehenden Gleichung dritten Grades sind:

$$z^3+Az^2+Bz+C = 0. \quad (6)$$

Hier treten uns sogleich zwei Hauptfälle entgegen: entweder sind die Wurzeln dieser Gleichung alle drei reell, oder nur eine derselben ist reell und die beiden andern sind imaginär. Ein besonderer Fall, welcher den Uebergang von dem einen der beiden Hauptfälle zu dem andern bezeichnet, ist derjenige, dafs zwei Wurzeln der vorstehenden Gleichung (6) einander gleich sind. Endlich ist noch ein ganz besonderer Fall derjenige, dafs die Wurzeln dieser Gleichung alle drei einander gleich sind. Im Ganzen haben wir also vier verschiedene Fälle zu unterscheiden; nur müssen wir hierbei nicht aus den Augen verlieren, dafs nur die beiden ersten, in Beziehung auf ihre Ausdehnung, coordinirt sind, dafs diesen beiden der dritte und diesem wiederum der vierte sich unterordnet.

152. Nachdem a, a' und a'' bestimmt worden sind, geben die drei Gleichungen (4) auf lineare Weise die drei Constanten b, b' und b''. Diese Bestimmung ist immer und nur auf einzige Weise möglich, wenn nicht zwei der drei Constanten a, a' und a'' einander gleich sind.

Wenn die letztgenannten Gröfsen alle drei reell und verschieden sind, so sind b, b' und b'' immer reell. Wenn von jenen drei Gröfsen zwei imaginär sind, so sind es, unter diesen, die beiden entsprechenden ebenfalls. Wir wollen $(-a')$ und $(-a'')$ für die beiden imaginären Wurzeln der Gleichung (6) nehmen, und

$$a'+a'' = 2\alpha, \qquad a'a'' = \beta,$$

setzen. 2α und β sind alsdann reelle Gröfsen. Hiernach können wir die Gleichungen (4) unter der nachstehenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} b+(b'+b'') &= D,\\ (a'b''+a''b')+a(b'+b'')+2\alpha b &= E,\\ a(a'b''+a''b')+\beta b &= F. \end{aligned}$$

Wir erhalten aus diesen drei Gleichungen immer, und nur auf einzige Weise, reelle Werthe

für die drei Ausdrücke $(a'b''+a''b')$, $(b'+b'')$ und b. Da sich für die beiden zusammengehörigen imaginären Wurzeln $(-a')$ und $(-a'')$ Ausdrücke von der Form $(m+n\sqrt{-1})$ und $(m-n\sqrt{-1})$ ergeben, so kann der erste jener drei Ausdrücke $(a'b''+a''b')$ offenbar nur dann einen reellen Werth erhalten, wenn auch b' und b'' imaginär und zugleich Wurzeln derselben quadratischen Gleichung sind. Hiernach ist auch das Product b'b'' reell. In dem Falle, der uns hier beschäftigt, ist also die Function $(\varphi+a\psi+b)$ reell, die beiden andern Functionen hingegen $(\varphi+a'\psi+b')$ und $(\varphi+a''\psi+b'')$ sind imaginär, so jedoch, dafs ihr Product eine reelle Function des zweiten Grades bildet.

153. Wenn die Gleichung (6) zwei gleiche Wurzeln hat, wenn $a' = a''$, so verwandeln sich die Gleichungen (4) in drei Gleichungen zwischen zwei unbekannten Gröfsen b und $(b'+b'')$; es kommt nemlich:

$$b+(b'+b'') = D,$$
$$(a+a')(b'+b'')+2a'b = E,$$
$$aa'(b'+b'')+a'^2b = F.$$

In diesem Falle, auf den wir bald (158) zurückkommen werden, können wir also, im Allgemeinen, die gegebene Gleichung (1) nicht auf die Form (2) bringen.

Es können die letzten Gleichungen nur in dem Falle alle drei zugleich bestehen, dafs folgende Bedingungs-Gleichung Statt findet:

$$Da'^2-Ea'+F = 0. \qquad (7)$$

Alsdann aber ist nur b und die Summe von b' und b'' bestimmt, während diese beiden letzten Constanten selbst unbestimmt bleiben. Die Gleichung (1) kann in diesem besondern Falle die Form (2) auf unendlichfache Weise annehmen, und zwar können wir hierbei einer der beiden Constanten b' und b'' einen willkührlichen Werth von vorne herein beilegen.

154. Wenn endlich die Wurzeln der Gleichung (6) alle drei einander gleich sind, wenn $a = a' = a''$, so gehen die Gleichungen (4) in folgende drei über:

$$(b+b'+b'') = D,$$
$$2a(b+b'+b'') = E,$$
$$a^2(b+b'+b'') = F.$$

Wenn diese Gleichungen zugleich bestehen sollen, so müssen zwei verschiedene Bedingungs-Gleichungen, für welche wir zwei beliebige der folgenden drei nehmen können:

$$E = 2Da, \qquad F = Da^2, \qquad 2F = Ea, \qquad (8)$$

Statt finden. Wenn diese beiden Bedingungs-Gleichungen nicht befriedigt werden, so kann die Gleichung (1) die Form (2) nicht annehmen; werden dieselben hingegen befriedigt, so kann dieſs auf unendlichfache Weise geschehen, und zwar so, dafs zwei der drei Gröfsen b, b' und b'', deren Summe allein bestimmt ist, beliebig angenommen werden können.

155. Es bleibt uns jetzt nur noch die Bestimmung der drei letzten Constanten μ, c und d übrig. Diese erhalten wir aus den drei Gleichungen (5), die wir auf folgende Weise schreiben können:

$$b(b'+b'')+b'b''+\mu = G,$$
$$ab'b''+b(a'b''+a''b')+\mu c = H,$$
$$bb'b''+\mu d = I.$$

Jedesmal, dafs unter den drei Wurzeln der Gleichung (6) nicht zwei einander gleiche sich befinden, und wir demnach für b, b' und b'' vollkommen bestimmte Werthe erhalten, gibt

die erste der vorstehenden drei Gleichungen einen reellen und einzigen Werth für den Coefficienten μ, dann gibt die zweite c und die dritte d auf gleiche Weise. Wenn insbesondere sich $\mu = 0$ ergeben sollte, so würden c und d im Allgemeinen unendlich werden, μc und μd aber endliche, sich unmittelbar ergebende Werthe erhalten.

Es ist also vollständig nachgewiesen, dafs in den beiden Hauptfällen, in welchen die Gleichung (6) keine gleichen Wurzeln hat, die allgemeine Gleichung des dritten Grades zwischen den beiden veränderlichen Gröfsen φ und ψ immer die Form (2) annehmen kann; nur mit dem Unterschiede, dafs in dem Falle dreier reellen Wurzeln alle linearen Functionen in der umgeformten Gleichung reell sind, während, in dem Falle zweier imaginären Wurzeln, zwei dieser Functionen, welche Factoren des ersten Gliedes sind, imaginär werden, so jedoch, dafs ihr Product eine reelle Function des zweiten Grades bleibt.

156. Wenn in dem Falle zweier gleichen Wurzeln der Gleichung (6) die Bedingungs-Gleichung (7) befriedigt wird, so können wir b′ oder b″ beliebig annehmen, wodurch alsdann beide Constante vollkommen bestimmt sind, und dann, wie oben, die Werthe der drei letzten Constanten finden. Oder, wir können auch μ willkührlich annehmen; dann gibt die erste der letzten drei Gleichungen, welchen wir in dem vorliegenden Falle folgende Form geben können:

$$\begin{aligned} b(b'+b'')+b'b''+\mu &= G, \\ ab'b''+a'b(b'+b'')+\mu c &= H, \\ bb'b''+\mu d &= I, \end{aligned}$$

da b und $(b'+b'')$ schon bekannt sind, b′ und b″ als Wurzeln einer quadratischen Gleichung, Wurzeln, die, je nach der Annahme von μ, reell, imaginär oder einander gleich sein können. Oder, wir können auch Annahmen über c und d machen, und zum Beispiel — ein Fall, der besonders hervorgehoben zu werden verdient —:

$$c = a'$$

setzen. Alsdann erhalten wir, zur Bestimmung von b′b″, aus den beiden ersten der vorstehenden Gleichungen die folgende:

$$(a'-a)b'b'' = Ga'-H.$$

Hiernach ergeben sich wiederum b′ und b″ als Wurzeln einer quadratischen Gleichung, die entweder reell oder imaginär oder einander gleich sind.

157. Wenn die Gleichung (6) drei gleiche Wurzeln hat und zugleich, damit die allgemeine Gleichung des dritten Grades zwischen φ und ψ die Form (2) annehmen könne, die beiden Bedingungs-Gleichungen (8) befriedigt werden, so knüpfen sich an die Gleichungen (5), die wir unter folgender Form schreiben können:

$$\begin{aligned} (bb'+bb''+b'b')+\mu &= G, \\ a(bb'+bb''+b'b')+\mu c &= H, \\ bb'b''+\mu d &= I, \end{aligned}$$

ähnliche Betrachtungen an, als vorhin. Es ist in diesem Falle blofs die Summe von b, b′ und b″ gegeben. Wir können c und d beliebig annehmen. Alsdann geben die vorstehenden Gleichungen $(bb'+bb''+b'b')$ und bb′b″ auf lineare Weise, wonach sich die drei Constanten b, b′ und b″ als die drei Wurzeln einer Gleichung des dritten Grades darstellen. Wir können auch von vorne herein die Voraussetzung machen, dafs diese Wurzeln alle drei einander gleich seien, dafs $b = b' = b''$. Alsdann erhalten wir diese Wurzeln sogleich, da ihre Summe schon bekannt ist. Ferner gibt die erste der vorstehenden Gleichungen μ, dann die zweite c und die dritte d auf reelle und einzige Weise. In dem in Rede stehenden Falle dreier gleichen Wurzeln der Gleichung (6), können wir also

immer und nur auf einzige Weise der allgemeinen Gleichung die nachstehende Form geben:

$$(\varphi+a\psi+b)^3+\mu(\varphi+c\psi+d)=0. \qquad (9)$$

158. Wir wenden uns nun zu denjenigen Fällen zurück, in welchen die Gleichung (6) gleiche Wurzeln hat und die allgemeine Gleichung des dritten Grades die Form (2) nicht annehmen kann. Diese Fälle treten nur dann ein, wenn die Gleichungen (4) nicht zusammen bestehen können. Da dieſs aber nur bei einer Gränze, nur bei dem Uebergange von reellen zu imaginären Werthen der beiden Constanten a′ und a″ Statt findet, so ist augenfällig, daſs die Unmöglichkeit jener Umformung darin ihren Grund hat, daſs die beiden Constanten b′ und b″ solchen Gränz-Werthen entsprechen, die unsere analytische Bezeichnungsweise nicht geben kann. Wenn wir diese Gränz-Werthe, welche $\pm\infty$ sind, nicht ausschlieſsen, so enthalten die eben angeführten drei Gleichungen, wie auch a, a′ und a″ sich ändern mögen, niemals einen Widerspruch.

An die Stelle der Gleichung (2), auf deren Form wir die allgemeine Gleichung (1) nun nicht mehr bringen können, wollen wir eine andere setzen. Die nothwendige Anzahl der Constanten dieser Gleichung hat sich durch die Bedingung, daſs $a'=a''$, auf acht reducirt. Ich wähle, dieser Bedingung entsprechend, die folgende Form:

$$(\varphi+a\psi+b)\{(\varphi+a'\psi+b')^2+\lambda(\varphi+a\psi+b)\}+\mu(\varphi+c\psi+d)=0. \qquad (10)$$

Die erste Wurzel der Gleichung (6) ist hier wie oben $(-a)$, die beiden übrigen einander gleichen bleiben $(-a')$. Die Gleichungen (3) bleiben hiernach ebenfalls dieselben, an die Stelle der Gleichungen (4) und (5) treten nun aber die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} b+2b'+\lambda &= D,\\ 2\{(a+a')b'+a'b+\lambda a\} &= E,\\ a'^2b+2aa'b'+\lambda a^2 &= F; \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} b'^2+2bb'+\lambda b+\mu &= G,\\ ab'^2+2a'bb'+2\lambda ab+\mu c &= H,\\ bb'^2+\lambda b^2+\mu d &= I. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Die drei ersten dieser sechs Gleichungen geben immer, den einzigen Fall ausgenommen, daſs $a=a'$, bestimmte und einzige Werthe für b, b′ und λ; und dann sind durch die folgenden drei Gleichungen μ, c und d vollkommen bestimmt. Die angezeigte Umformung kann also, wenn die Gleichung (6) zwei und nur zwei gleiche Wurzeln hat, immer und nur auf einzige Weise Statt finden.

159. Wenn $a=a'$, das heifst, wenn die Gleichung (6) drei gleiche Wurzeln hat, so kann die vorstehende Umformung nur dann Statt finden, wenn die Bedingungs-Gleichungen (8) bestehen, ein besonderer Fall, auf den wir nicht mehr zurückkommen wollen. Aber auch die Form der allgemeinen Gleichung:

$$(\varphi+a\psi+b)\{(\varphi+a'\psi+b')^2+\lambda(\varphi+g\psi+h)\}+\mu(\varphi+c\psi+d)=0, \qquad (13)$$

die erst, wenn wir $g=a$ und $h=b$ setzen, in die Gleichung (10) übergeht, ist im Allgemeinen mit der Voraussetzung, daſs $a=a'$, unverträglich. Es treten nemlich in diesem allgemeinern Falle an die Stelle der drei Gleichungen (11) die folgenden drei:

$$\begin{aligned} b+2b'+\lambda &= D,\\ 2(a+a')b'+2a'b+\lambda(a+g) &= E,\\ a'^2b+2aa'b'+\lambda ag &= F, \end{aligned}$$

welche, wenn wir $a=a'$ setzen, in die nachstehenden übergehen:

$$(b+2b')+\lambda = D,$$
$$2a(b+2b')+\lambda(a+g) = E,$$
$$a^2(b+2b')+\lambda ag = F,$$

und alsdann nur in dem Falle zugleich bestehen können, dafs folgende Bedingungs-Gleichung:

$$Da^2-Ea+F = 0, \qquad (14)$$

welche mit der Gleichung (7) übereinstimmt, befriedigt wird. Durch die vorstehende Bedingungs-Gleichung, verbunden mit der Voraussetzung dreier gleichen Wurzeln der Gleichung (6), reducirt sich die Anzahl der nothwendigen Constanten in der umgeformten Gleichung von neun auf sechs. Hiermit in Uebereinstimmung wähle ich folgende Form:

$$(\varphi+a\psi+b)\{(\varphi+a\psi+b)^2+\lambda(\varphi+g\psi+h)\}+\mu = 0, \qquad (15)$$

die aus der allgemeinern (13) hervorgeht, indem wir $a = a'$, $b = b'$, und statt des letzten Gliedes eine blofse Constante nehmen. Hiernach erhalten wir statt der Gleichungen (4) und (5) nun die nachstehenden:

$$3b+\lambda = D, \qquad (16)$$
$$6ab+\lambda(a+g) = E, \qquad (17)$$
$$3a^2b+\lambda ag = F, \qquad (18)$$
$$3b^2+\lambda(b+h) = G, \qquad (19)$$
$$3ab^2+\lambda(gb+ah) = H, \qquad (20)$$
$$b^3+\lambda bh+\mu = I. \qquad (21)$$

Nach der Bedingungs-Gleichung (14) ist jede der drei ersten der vorstehenden Gleichungen eine algebraische Folge aus den beiden andern, so dafs diese drei Gleichungen nur für zwei verschiedene gelten können, und mithin die vorstehenden Gleichungen zusammen zur Bestimmung der fünf Constanten b, g, h, λ und μ gerade hinreichend sind. Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen (18) und (20) die Gröfse λg eliminiren, so ergibt sich unmittelbar:

$$b(F-3a^2b) = a\{H-a(3b^2+\lambda h)\}.$$

Aus den Gleichungen (19) und (16) folgt:

$$3b^2+\lambda h = G-\lambda b = G-b(D-3b),$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen, nach einer einfachen Reduction:

$$(F-Da^2)b = (H-Ga)a. \qquad (22)$$

Der Werth von b ist hiernach ein vollkommen bestimmter, endlicher und einziger. Denn wäre

$$F-Da^2 = 0,$$

so erhielten wir, mit Berücksichtigung der Gleichung (14) die beiden Bedingungs-Gleichungen (8), die sich auf den hier ausgeschlossenen Fall beziehen. Wenn $a = 0$, so wird die Gleichung (22) eine identische, dann erhalten wir aber, aus den beiden Gleichungen (17) und (20), unmittelbar:

$$Eb = H.$$

Nachdem auf diese Weise die Constante b gefunden worden ist, ergibt sich auf linearem Wege zuvörderst aus der Gleichung (16) die Constante λ, und auf gleiche Weise aus den folgenden Gleichungen g, h und μ. Es ist also vollständig nachgewiesen, dafs die angezeigte Umformung immer und nur auf einzige Weise Statt finden kann.

160. Es bleibt uns jetzt nur noch der letzte Fall zu betrachten übrig, in welchem die Gleichung (6) drei gleiche Wurzeln hat, und die Bedingungs-Gleichung (14) nicht Statt fin-

findet. Für die umgeformte Gleichung, die in diesem Falle nothwendig sieben unabhängige Constante enthalten mufs, wollen wir die folgende nehmen:

$$(\varphi+a\psi+b)^3+\lambda(\varphi+g\psi+h)^2+\mu(\varphi+c\psi+d)=0, \tag{23}$$

welche acht Constante enthält und später durch eine besondere Voraussetzung die Anzahl auf die nothwendige reduciren. Nachdem a bestimmt worden ist, erhalten wir zur Bestimmung der übrigen Constanten folgende sechs Gleichungen:

$$3b+\lambda = D, \tag{24}$$
$$6ab+2\lambda g = E, \tag{25}$$
$$3a^2b+\lambda g^2 = F, \tag{26}$$
$$3b^2+2\lambda h+\mu = G, \tag{27}$$
$$3ab^2+2\lambda gh+\mu c = H, \tag{28}$$
$$b^3+\lambda h^2+\mu d = I. \tag{29}$$

Wenn wir die Gleichung (25), nach einander, mit (26) und (24) zusammenstellen, ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\lambda(a-g)g &= Ea-2F, \\ 2\lambda(a-g) &= 3Da-E, \end{aligned} \tag{30}$$

und aus diesen folgt:

$$g=\frac{Ea-2F}{2Da-E}.$$

Dieser Werth von g kann unbestimmt, aber niemals unendlich werden. Denn aus den Gleichungen (30) folgt, dafs, wenn

$$E = 2Da,$$

die beiden Constanten a und g einander gleich und hernach auch

$$2F = Ea,$$

wonach der obige Ausdruck die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhält. Aber die letzten beiden Gleichungen stimmen mit den Gleichungen (8) überein, und beziehen sich also auch auf jenen besondern Fall, den wir hier ausgeschlossen haben. Nachdem g bestimmt worden ist, geben irgend zwei der drei Gleichungen (24), (25) und (26) auf lineare Weise die beiden Constanten b und λ, so dafs also durch die eben genannten drei Gleichungen drei Constante vollkommen bestimmt sind, und die drei folgenden Gleichungen Relationen zwischen den übrigen vier Constanten h, c, d und μ enthalten. Aus (27) und (28) ergibt sich, indem wir h eliminiren:

$$\mu(c-g) = H-Gg-3(a-g)b^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs wir c beliebig, nur, damit μ nicht unendlich werde, im Allgemeinen nicht gleich g annehmen dürfen. Vorzugsweise wollen wir c = a setzen. Der Werth von μ kann auch gleich Null werden, dann reducirt sich Function $\mu(\varphi+c\psi+d) \equiv \mu(\varphi+a\psi+d)$ auf eine Constante μd, die im Allgemeinen nicht gleich Null ist, es aber in besonderen Fällen sein kann. Die Gleichungen (27) und (29) geben endlich die beiden noch zu bestimmenden übrigen Constanten h und d. —

161. Indem wir die Resultate, zu welchen uns die vorstehenden analytischen Entwicklungen geführt haben, der Uebersicht wegen zusammenstellen, nehmen die verschiedenen Abstufungen derselben hauptsächlich unsere Aufmerksamkeit in Anspruch. Wir wollen in dem Folgenden durch die griechischen Buchstaben, wie bisher, unbestimmte Constante bezeichnen, zugleich aber durch die Symbole p, q, r und s lineare Functionen von der Form $(\varphi+a\psi+b)$ darstellen. Die Einführung solcher Symbole gewährt uns gleich hier schon den Vortheil einer leichtern Uebersicht.

Das Haupt-Resultat, zu dem wir gelangt sind, besteht darin, dafs die allgemeine Gleichung des dritten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen φ und ψ im Allgemeinen die Form:

$$pqr+\mu s=0 \qquad \text{I.}$$

annehmen kann, mit dem Unterschiede indefs, dafs entweder die linearen Factoren des ersten Gliedes alle drei reell, oder zwei derselben imaginär sind. In diesem letztern Falle bleibt das Product der beiden imaginären Factoren immer reell.

Wenn ich den Ausdruck gebrauche, es lasse sich der allgemeinen Gleichung des dritten Grades „im Allgemeinen" die Form I. geben, so heifst dieſs, dafs unter einer noch so grofsen, aber endlichen Anzahl von Fällen, wenn die Constanten-Bestimmung in der ursprünglichen allgemeinen Gleichung unbeschränkt dem Zufall überlassen bleibt, eine solche Wahrscheinlichkeit, die an Gewifsheit gränzt, vorhanden ist, dafs die fragliche Umformung immer Statt finden kann.

Zwischen unendlich vielen Fällen, wo jene linearen Factoren alle drei reell, und unendlich vielen Fällen, wo zwei derselben imaginär sind, liegt ein Uebergangs-Fall, wo jene Umformung nicht Statt finden kann. Für diesen Fall haben wir folgende Form:

$$p(q^2+\lambda r)+\mu s=0, \qquad (1)$$

die sich, indem wir $p \equiv r$ setzen, auf folgende Weise particularisiren läfst:

$$p(q^2+\lambda p)+\mu s=0. \qquad \text{II.}$$

Die gröfsere Beschränkung dieses Uebergangs-Falles spricht sich dadurch aus, dafs in der vorstehenden Gleichung die Anzahl der Constanten sich auf acht reducirt hat.

Ein noch beschränkterer Fall ist derjenige, dafs man der allgemeinen Gleichung nicht mehr die Form II., wohl aber, und zwar auf unendlichfache Art, die Form I. geben kann. Dadurch wird die letztbezeichnete Umformung eine unbestimmte. Diesem Falle entsprechend, können wir die Form der Gleichung I. auf nachstehende Weise particularisiren:

$$p(q+x)(q-x)+\mu(q+\sigma)=0, \qquad \text{III.}$$

wodurch die Zahl ihrer Constanten sich um zwei vermindert. Es kann hierbei x reell, imaginär oder auch gleich Null sein.

Ein vierter Fall ist derjenige, wo man der allgemeinen Gleichung weder die Form I. noch die Form (1) geben kann. Diesem Falle entspricht folgende Form:

$$p^3+\lambda q^2+\mu r=0, \qquad (2)$$

die wir aber auf nachstehende Weise noch particularisiren können:

$$p^3+\lambda q^2+\mu(p+\sigma)=0, \qquad \text{IV.}$$

wonach dieselbe, wie die vorige, nur sieben Constante enthält.

In einem fünften untergeordneten Falle kann die allgemeine Gleichung die letzte Form nicht mehr annehmen, wohl aber, und zwar auf unendlichfache Art, die Form II. Hiernach können wir diese Form wiederum particularisiren, indem wir die Zahl ihrer Constanten um zwei vermindern. Oder wir können auch nachstehende Form mit sechs Constanten wählen:

$$p(p^2+\lambda q)+\mu=0. \qquad \text{V.}$$

Der sechste und letzte Fall ist ein dem vorigen wiederum untergeordneter Fall, derjenige nemlich, wo die allgemeine Gleichung weder die Form (2) noch die Form (1) annehmen kann, wohl aber, und zwar auf unendlichfache (∞^2fache) Weise die Form I. Diese letzte Form particularisirt sich alsdann so, dafs die Anzahl der Constanten sich um zweimal zwei vermindert, mithin auf fünf reducirt; wir haben für diese Particularisation folgende erhalten:

$$p^3+\mu s=0. \qquad \text{VI.}$$

162. Die Unterscheidung der sechs in der vorigen Nummer aufgezählten Fälle können wir durch die folgende sehr einfache und übersichtliche analytische Betrachtungsweise an die ursprünglich gegebene allgemeine Gleichung anknüpfen. Indem wir in dieser Gleichung $\frac{\varphi}{\psi} = z$ setzen, können wir dieselbe auf folgende Weise:

$$(z^3 + Az^2 + Bz + C)\psi^3 + (Dz^2 + Ez + F)\psi^2 + (Gz + H)\psi + I = 0,$$

oder auch, zur Abkürzung, unter folgender Form:

$$Z_3\psi^3 + Z_2\psi^2 + Z_1\psi + Z_0 = 0, \qquad (1)$$

schreiben. Dem zweiten Falle entspricht alsdann, dafs die Gleichung:

$$Z_3 = 0, \qquad (2)$$

zwei gleiche Wurzeln hat, und mit ihr zugleich also die folgende:

$$dZ_3 = 0, \qquad (3)$$

besteht. Im dritten Falle mufs zugleich mit den vorigen beiden Gleichungen die Gleichung

$$Z_2 = 0 \qquad (4)$$

befriedigt werden. Im vierten Falle hat die Gleichung (2) drei gleiche Wurzeln, und mufs also neben der Gleichung (3) und folgender Gleichung:

$$d^2Z_3 = 0$$

bestehen. Im fünften Falle wird aufserdem noch die Gleichung (4) befriedigt, und im sechsten Falle hat diese Gleichung überdiefs auch noch zwei gleiche Wurzeln, wonach, neben den frühern Gleichungen, auch noch die folgende besteht:

$$dZ_2 = 0.$$

Hiernach erhalten wir folgendes Schema von Gleichungen, welche für die verschiedenen Fälle zugleich Statt finden müssen.

I. Erster Fall:

Keine Bedingung, weil er der allgemeine Fall ist.

II. Zweiter Fall:

$$Z_3 = 0, \qquad dZ_3 = 0.$$

III. Dritter Fall:

$$Z_3 = 0, \qquad dZ_3 = 0, \qquad Z_2 = 0,$$

IV. Vierter Fall:

$$Z_3 = 0, \qquad dZ_3 = 0, \qquad d^2Z_3 = 0.$$

V. Fünfter Fall:

$$Z_3 = 0, \qquad dZ_3 = 0, \qquad d^2Z_3 = 0, \qquad Z_2 = 0.$$

VI. Sechster Fall:

$$Z_3 = 0, \qquad dZ_3 = 0, \qquad d^2Z_3 = 0, \qquad Z_2 = 0, \qquad dZ_2 = 0.$$

Ich bemerke nur noch, was den Punct der Symmetrie betrifft, dafs die Bedingungen, welche aus den vorstehenden Gleichungen sich ergeben, ganz dieselben sind, als diejenigen, welche wir erhalten würden, wenn wir φ und ψ gegenseitig mit einander vertauschten. Alsdann werden nemlich die Werthe von $\frac{1}{z}$ statt von z Wurzeln der obigen Gleichungen, dadurch aber wird in den Bedingungen über die Gleichheit dieser Wurzeln durchaus nichts geändert.

§. 2.

Geometrische Deutung der verschiedenen Fälle der allgemeinen Gleichung. Asymptoten. Maafs der Annäherung an dieselben. Osculirende Asymptoten. Hyperbolische und parabolische Asymptoten. Allgemeine Eintheilung der Curven dritter Ordnung.

163. Indem wir von dem allgemeinen Falle, dem folgende Form:

$$pqr + \mu s = 0, \qquad \text{I.}$$

entspricht, ausgehen, wollen wir zunächst die Voraussetzung machen, dafs die linearen Functionen des ersten Gliedes der vorstehenden Gleichung alle drei reell seien. Die Curve, welche durch diese Gleichung dargestellt wird, wenn wir den veränderlichen Gröfsen φ und ψ, von welchen p, q, r und s lineare und ganze Functionen sind, die Bedeutung beliebiger Punct-Coordinaten unterlegen, ist also vollkommen bestimmt, wenn wir die eben genannten vier Functionen, deren jede von zwei Constanten abhängt, und überdiefs den Coefficienten μ kennen. Jene Functionen sind bestimmt, wenn diejenigen vier geraden Linien, welche durch die vier Gleichungen:

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad s = 0,$$

dargestellt werden, gegeben sind, und nachdem dieselben auf diese Weise bestimmt worden sind, ist, zur Bestimmung des Coefficienten μ, hinreichend, dafs irgend ein Punct der Curve gegeben sei. Denn alsdann erhalten wir, in Beziehung auf diesen Punct, für die Functionen p, q, r und s vollkommen bestimmte Werthe, und hiernach durch die Gleichung I. den Werth von μ. Eine Curve dritter Ordnung ist auf diese Weise also vollkommen und auf einzige Weise bestimmt, wenn vier gerade Linien und irgend einer ihrer Puncte gegeben sind. Zwischen den gegebenen Stücken findet durchaus keine gegenseitige Abhängigkeit Statt. Jeder gegebenen geraden Linie entsprechen zwei Constante, dem gegebenen Puncte aber entspricht nur eine einzige, weil zur Bestimmung eines Punctes zwar zwei Constante nothwendig sind, aber zugleich jeder der unendlich vielen Puncte der Curve auf gleiche Weise zur Bestimmung des Coefficienten μ dienen kann.

164. Die geometrischen Beziehungen der obigen vier geraden Linien zu der durch die Gleichung I. dargestellten Curve dritter Ordnung müssen, weil wir in dem vorliegenden Falle nur auf eine einzige Weise zu einer Gleichung von dieser Form gelangen können, nothwendig vollkommen bestimmte und ausschliefsliche sein. Es hängen dieselben offenbar, einerseits, von der Form dieser Gleichung, und, andrerseits, von der Coordinaten-Bedeutung, welche wir den beiden veränderlichen Gröfsen φ und ψ unterlegen, ab.

Es ist zuvörderst ersichtlich, dafs das Characteristische der Form I. darin besteht, dafs in derselben drei lineare Functionen p, q und r der beiden Veränderlichen φ und ψ, in Evidenz getreten sind, welche, wenn man sie einzeln gleich Null setzt, diese Form auf den ersten Grad reduciren, und also für jene veränderlichen Gröfsen einzige Werthe geben, während man, im Allgemeinen, aus der Zusammenstellung einer linearen Gleichung mit der Gleichung I. drei Werthe, sowohl für φ als für ψ erhält. Eine solche Reduction findet aber für besondere Fälle nur deshalb Statt, weil zwei Werthe jeder der beiden Veränderlichen unendlich werden, und dadurch der algebraischen Bestimmung entgehen. Es schneidet also jede der drei geraden Linien

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \tag{1}$$

die Curve in solchen drei Puncten, von welchen zweien unendliche Werthe der beiden Veränderlichen φ und ψ entsprechen. Wir können ferner die Gleichung I. auf dreifache Weise befriedigen, indem wir nach einander die folgenden drei Paare von Gleichungen bestehen lassen:

$$\begin{aligned} p &= 0 \quad \text{und zugleich} \quad s = 0, \\ q &= 0 \quad » \quad » \quad » \quad s = 0, \\ r &= 0 \quad » \quad » \quad » \quad s = 0. \end{aligned}$$

Es schneiden also die drei, durch die Gleichungen (1) dargestellten, geraden Linien die gegebene Curve I. in solchen drei Puncten, welche auf derselben geraden Linie liegen, deren Gleichung die folgende ist:

$$s = 0, \tag{2}$$

Zur Vervollständigung der geometrischen Deutung der Gleichung I. müssen wir jetzt noch über die Coordinaten φ und ψ eine nähere Bestimmung machen. Wir wollen hier annehmen, dafs dieselben solche Coordinaten bedeuten, welche für alle Puncte, welche nicht unendlich weit liegen, endliche Werthe behalten, oder, mit andern Worten, solche Coordinaten, welche lineare und ganze Functionen der gebräuchlichen Parallel-Coordinaten sind. Alsdann sind also p, q, r und s eben solche Functionen, und es stellen die Gleichungen (1) solche drei gerade Linien dar, deren jede, weil zwei Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, die Curve dritter Ordnung nur in einem einzigen Puncte schneidet. Wir nennen diese Linien Asymptoten.

Eine Curve dritter Ordnung hat also im Allgemeinen drei Asymptoten; und überdiefs enthält die allgemeine Form I., welche wir ihrer Gleichung auf einzige Weise geben können, den folgenden Satz:

Eine Curve dritter Ordnung wird von ihren drei Asymptoten in solchen drei Puncten geschnitten, die in gerader Linie liegen *).

165. Wenn wir die Gleichung I. auf nachstehende Weise schreiben:

$$\frac{pqr}{s} = -\mu,$$

so springt zuvörderst in die Augen, dafs für alle Puncte einer und derselben Curve der Werth des Ausdrucks (pqr : s) entweder immer positiv oder immer negativ bleibt, je nachdem, umgekehrt, die Constante μ negativ oder positiv ist. Da nun aber der Werth jeder der einzelnen Functionen p, p, r und s sein Zeichen ändert, wenn der Punct, auf welchen diese Function bezogen wird, von einer Seite der bezüglichen unter den geraden Linien:

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad s = 0, \tag{3}$$

---

*) Die auf diese Weise vollkommen bestimmte und für die Curven dritter Ordnung characteristische gerade Linie wollen wir, in den folgenden Untersuchungen, „die Linie S“ nennen, und immer durch die Gleichung:

$$s = 0,$$

darstellen. Ueberhaupt wollen wir, um uns kurz auszudrücken und doch keine neuen Benennungen einzuführen, gerade Linien, da, wo dieselben für vorliegende Erörterungen besondere Bedeutung gewinnen, als „Linie P“, „Linie Q“ u. s. w. bezeichnen, wenn in ihren Gleichungen die entsprechenden Buchstaben des kleinen Alphabets vorkommen, wonach also die eben bezeichneten geraden Linien die Asymptoten $p = 0$, $q = 0$ u. s. w. sind. In spätern Paragraphen werden wir durch $s = 0$ andere gerade Linien darstellen; mit der andern Darstellungsweise wird hiernach also auch die Benennung „Linie S“ ihre Bedeutung ändern.

auf die andere Seite derselben hinüberrückt, so folgt, dafs nicht irgend zwei Puncte der Curve so liegen können, dafs zwischen denselben nur eine einzige oder drei von jenen vier geraden Linien hindurchgehen, sondern dafs wir vielmehr keine oder zwei dieser Linien oder alle vier überschreiten müssen, um von irgend einem Puncte der Curve zu irgend einem andern Puncte derselben zu gelangen.

Fig. 2. In dem allgemeinen Falle, in welchem nicht zwei der eben bezeichneten vier geraden Linien mit einander parallel sind, und nicht drei derselben durch einen und denselben Punct gehen, theilen diese Linien die Ebene in elf Flächenräume. In der 2. Figur, auf die wir uns der Anschaulichkeit wegen unmittelbar beziehen, sind fünf dieser Flächenräume durch a und die sechs übrigen durch b bezeichnet. Die Curve erstreckt sich, als Folge des oben Bemerkten, entweder blofs in jenen fünf oder blofs in diesen sechs Flächenräumen. Hierbei ist es ganz gleichgültig, in welcher Folge wir die vier geraden Linien der Figur für die, durch die vorstehenden vier Gleichungen (3) dargestellten nehmen, so dafs die Figur alle möglichen allgemeinen Fälle der gegenseitigen Lage der Linie S und der drei Asymptoten umfafst, wenn wir ihr diese Unbestimmtheit lassen.

166. Im Allgemeinen stellen sich p, q, r und s als Functionen in y und x von der Form $\varkappa(y+ax+b)$ dar; betrachten wir aber μ in der Gleichung I. als eine unbestimmte Constante, so können wir für den Coefficienten $\varkappa$ in jeder einzelnen Function einen beliebigen Werth annehmen, und insbesondere auch in allen $\varkappa$ gleich Eins setzen. Oder, indem wir die Sache von einer andern Seite auffassen, es ist klar, dafs die Form und geometrische Bedeutung jener Functionen von der Annahme der beiden Coordinaten φ und ψ abhängt; nehmen wir für φ und ψ die gewöhnlichen Parallel-Coordinaten y und x selbst, so haben alle jene Functionen die Form $(y+ax+b)$ und die Gleichung:

$$\frac{pqr}{s} = \mu,$$

in der μ durch die neun Coefficienten der ursprünglichen allgemeinen Gleichung bestimmt ist, gibt dann den nachstehenden Satz:

Auf jeder beliebigen Transversalen, die sich in der Ebene einer gegebenen Curve dritter Ordnung parallel mit sich selbst fortbewegt, ist das Verhältnifs des Abstandes jedes Durchschnittspunctes mit der Curve von der Linie S zu dem Producte der Abstände desselben Punctes von den drei Asymptoten ein gegebenes.

Nach der Anfangs-Bemerkung dieser Nummer, oder als einer andern Annahme der Coordinaten φ und ψ entsprechend, ergibt sich der folgende, mit dem vorigen noch verwandte Satz:

„Wenn man von irgend einem beliebigen Puncte einer gegebenen Curve dritter Ordnung Perpendikel auf die Linie S und die drei Asymptoten fällt, so ist das Verhältnifs des ersten Perpendikels zu dem Producte der drei übrigen ein gegebenes.“

167. Wir haben schon oben bemerkt, dafs, wenn die drei Asymptoten und die Linie S bekannt sind, die vollständige Bestimmung der durch die Gleichung I. dargestellten Curve auf gleiche Weise durch den Coefficienten μ oder durch irgend einen gegebenen Punct der Curve geschehen kann. Hierbei tritt uns nun die nahe liegende Frage entgegen, wie wir den Ort des gegebenen Punctes verändern müssen, damit μ, nach einander, alle möglichen Werthe von $(+\infty)$ bis $(-\infty)$ erhalte, oder, was dasselbe heifst, dafs wir, nach einander, zu allen möglichen Curven kommen, welche die drei gegebenen Asymptoten haben und dieselben auf der gegebenen geraden Linie S schneiden. Wenn wir

den gegebenen Punct auf einer beliebigen der drei Asymptoten annehmen, so finden wir als Folge dieser Annahme $\mu = \frac{pqr}{s} = 0$, und wir erhalten keine Curve im eigentlichen Sinne, sondern das System der drei Asymptoten, dargestellt durch die Gleichung

$$pqr = 0.$$

Nehmen wir hingegen den gegebenen Punct auf der Linie S an, so kommt $\mu = \frac{pqr}{s} = \pm\infty$. Durch diesen Werth von μ wird eine Gränze bezeichnet, wo die Gleichung I. ihre Bedeutung verliert, eine Gränze, der wir uns beliebig annähern, die wir aber, so lange wir die Asymptoten als gegeben betrachten, durch keine endliche Constanten-Annahme in der ursprünglichen allgemeinen Gleichung erreichen können. Da, was die geometrische Deutung dieser Gränze anbelangt, wenn $\mu = \infty$, die Gleichung I. einerseits für alle Puncte, die auf der Linie S, und andrerseits für alle Puncte, die unendlich weit liegen, und denen deshalb, im Allgemeinen, unendliche Werthe der vier Functionen p, q, r und s entsprechen, befriedigt wird, so ist ersichtlich, dafs, je mehr der gegebene Punct der Linie S näher rückt, ein ganzer Zweig der Curve dieser geraden Linie sich immer mehr annähert, während ein anderer Zweig der Curve sich immer weiter entfernt. Wenn wir hiernach auf irgend zwei der drei gegebenen Asymptoten zwei Puncte A und B so annehmen, dafs diejenige gerade Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, der Linie S in irgend einem Punct C, der dritten Asymptote aber nicht begegnet, so ist klar, dafs wir, nach einander, alle möglichen Curven erhalten, wenn wir den gegebenen Punct auf der eben bezeichneten Verbindungs-Linie, von A aus bis nach B fortrücken lassen. Für Lagen des gegebenen Punctes zwischen A und B ist der entsprechende Werth von μ entweder immer positiv oder immer negativ; für Lagen desselben zwischen C und B umgekehrt entweder immer negativ oder immer positiv; er ändert sein Zeichen, indem er bei C durch ∞ hindurchgeht. Wenn wir die beiden Puncte A und B so annehmen, dafs der Werth für μ, abgesehen vom Zeichen, von diesen beiden Puncten aus nach C hin, immer wächst, so entspricht jeder andern Lage des gegebenen Punctes zwischen A und B eine andere Curve.

168. Wenn wir in dem allgemeinen Falle, wo nicht zwei der vier geraden Linien (3) mit einander parallel sind, einen Punct, der unendlich weit liegt, betrachten, so ist von vorne herein klar, dafs höchstens nur eine der vier Functionen p, q, r und s in Beziehung auf diesen Punct einen endlichen Werth behalten kann: eine Behauptung, die sich auf beliebig viele gerade Linien und die ihnen entsprechenden linearen Functionen ausdehnen läfst. Zwei der drei Functionen d, q und r sind also nothwendig unendlich, wenn eine derselben gleich unendlich angenommen wird. Wenn wir für diese beiden Functionen q und r nehmen, und die Gleichung I. dann unter der nachstehenden Form:

$$p = -\frac{\mu s}{qr} \qquad (4)$$

schreiben, so erhalten wir offenbar für p ein unendlich Kleines der ersten Ordnung. Denn s kann kein unendlich Grofses von einer höhern Ordnung sein, als q und r, und auch keinen endlichen Werth behalten, weil p verschwindet. Die Curve hat also solche Zweige, die sich ins Unendliche erstrecken, sich aber zugleich der Asymptote P immer mehr annähern. Indem wir, um einen unendlich weit entfernten Punct zu bezeichnen, den Werth von q oder r unendlich grofs angenommen haben, so haben wir dadurch eine Gränze zwischen immer gröfser werdenden positiven und immer gröfser werdenden negativen Werthen dieser Function angedeutet: eine Gränze, die wir als positiv und negativ zugleich be-

trachten können. Hieraus folgt unmittelbar, dafs die Curve sich der Asymptote P zwiefach nähert, indem sie sich nach den beiden entgegengesetzten Richtungen immer weiter an ihr hinzieht. Die beiden andern Asymptoten stehen in derselben Beziehung zu der Curve. Es hat nieselbe also sechs unendliche Zweige, welche sich, paarweise, an den drei Asymptoten nach entgegengesetzter Richtung hinziehen, indem sie sich denselben, über jede gegebene endliche Entfernung hinaus, annähern.

169. Zugleich aber geht aus der vorstehenden Betrachtungsweise hervor, dafs es einen besondern Fall gibt, in welchem die Annäherung der Curve an ihre Asymptote, an P etwa, von der zweiten Ordnung ist. Dieser Fall tritt denn ein, wenn

$$s \equiv p + \varkappa, \tag{5}$$

indem wir durch $\varkappa$ irgend eine Constante bezeichnen. Dann geht nemlich die Gleichung (4) in folgende über:

$$p = -\frac{\mu(p+\varkappa)}{qr} = -\frac{\mu\varkappa}{qr+\varkappa}, \tag{6}$$

und wir bemerken, dafs, während in dem, eben betrachteten, allgemeinen Falle der Zähler in dem Ausdrucke für p, in Bezug auf Puncte, welche der Asymptote P sich immer mehr nähern, ein unendlich Grofses von derselben Ordnung, als q und r ist, dieser Zähler sich nun auf die Constante $\mu\varkappa$ reducirt. Die Gleichung (5) drückt aus, dafs die Linie S der Asymptote P parallel ist. In Beziehung auf die Annäherung der Curve an ihre beiden übrigen Asymptoten Q und R ändert sich nichts durch die eben gemachte Voraussetzung.

Wir wollen die Asymptote P eine osculirende nennen: eine Benennung, zu der wir durch die Erwägung veranlafst und berechtigt werden, dafs die gemeinschaftlichen Puncte der fraglichen Asymptote und der Curve alle drei in unendlicher Entfernung zusammenfallen, wonach diese Asymptote aufserdem also die Curve in keinem andern Puncte mehr schneidet. Es folgt diefs schon daraus, dafs die Durchschnitts-Puncte in endlicher Entfernung der Curven dritter Ordnung mit ihren Asymptoten zugleich auf der Linie S liegen, und diese im vorliegenden Falle mit der Asymptote P parallel ist. Es folgt auch unmittelbar daraus, dafs die Gleichung I., welche hier folgende Form annimmt:

$$pqr + \mu(p+\varkappa) = 0,$$

wenn wir p gleich Null setzen, statt, wie früher, auf eine lineare Function, nun auf eine Constante $\mu\varkappa$ sich reducirt. (164.)

170. Es kann eine Curve dritter Ordnung nur dann zugleich eine zweite osculirende Asymptote haben, wenn das zweite Glied der Gleichung I. sich auf eine Constante reducirt; alsdann aber sind zugleich alle drei Asymptoten osculirende. Aus der Gleichung I., welche alsdann folgende Form annimmt;

$$pqr + \mu = 0,$$

ergibt sich:

$$p = -\frac{\mu}{qr}, \qquad q = -\frac{\mu}{pr}, \qquad r = -\frac{\mu}{pq}, \tag{7}$$

woraus die obige Behauptung folgt. Es geht dieselbe auch schon daraus hervor, dafs, wenn eine Asymptote eine osculirende sein soll, die Linie S ihr parallel sein mufs, diese Linie aber so lange zweien Asymptoten zugleich nicht parallel sein kann, als sie nicht unendlich weit rückt; dann aber ist sie als jeder gegebenen geraden Linie parallel anzusehen. Auf diese Weise

Weise schliefst sich auch geometrisch der in Rede stehende Fall dem vorigen, als ein untergeordneter, an *).

171. Die verschiedene Ordnung der Annäherung der Curven dritter Ordnung I., von der wir, mit Euler, ein Eintheilungs-Princip derselben in Arten hernehmen werden, bringt zugleich eine verschiedene Lage der unendlichen Zweige der Curve gegen ihre Asymptoten mit sich.

Wir können offenbar, in dem allgemeinen Falle, auf zwei Zweigen einer Curve dritter Ordnung, welche sich nach entgegengesetzter Richtung derselben Asymptote nähern, zwei Puncte so weit entfernt annehmen, dafs die beiden andern Asymptoten und die Linie S zwischen ihnen hindurchgehen. Dann mufs aber, nach den Betrachtungen der 165. Nummer, nothwendig auch die erstgenannte Asymptote zwischen den beiden Puncten hindurchgehen. Hieraus ist ersichtlich, dafs, im Allgemeinen, zwei Zweige der Curve auf den beiden entgegengesetzten Seiten jeder der drei Asymptoten sich hinziehen.

In dem zweiten untergeordneten Falle hingegen, in welchem die Linie S einer Asymptote parallel ist, können wir zwei Puncte auf den beiden dieser Asymptote sich annähernden Zweigen der Curve, so weit und der Asymptote so nah annehmen, dafs zwischen ihnen die beiden übrigen Asymptoten hindurchgehen, nicht aber die Linie S. Hiernach ergibt sich aus den Betrachtungen der eben angeführten Nummer, dafs auch die erstgenannte Asymptote nicht zwischen diesen beiden Puncten hindurchgehen kann, und also die beiden unendlichen Zweige der Curve auf derselben Seite an dieser Asymptote, die eine osculirende ist, nach entgegengesetzten Richtungen sich hinziehen.

Aus derselben Schlufsweise folgt, dafs in dem dritten, dem vorigen wiederum untergeordneten, Falle, wo die Linie S unendlich weit liegt, jeder der drei, osculirenden, Asymptoten auf derselben Seite zwei unendliche Zweige sich annähern. —

Wir können auch die eben angewandten Betrachtungsweisen in eine mehr analytische Form einkleiden, und uns auf die Gleichungen (4), (6) und (7) zurückbeziehen. Denn auf solche zwei Puncte bezogen, die sich in entgegengesetztem Sinne nach der Richtung irgend einer gegebenen geraden Linie P immer weiter entfernen, erhält offenbar jede ganze und lineare Function, wie q, r, u. s. w., der eine gerade Linie entspricht, die der letztge-

---

*) Wenn wir in der Gleichung:

$$\varepsilon y + \varepsilon' x + c = 0,$$

in der y und x gewöhnliche Parallel-Coordinaten, oder auch lineare und ganze Functionen derselben bedeuten, während c immer denselben Werth beibehält, den beiden Constanten ε und ε' allmählig immer kleinere Werthe beilegen, so entfernt sich die, durch diese Gleichung dargestellte, gerade Linie immer weiter, sie liegt unendlich weit, wenn ε und ε' beide zugleich verschwinden. Wir können also sagen, dafs die Gleichung:

$$c = 0,$$

wenn wir uns dieselbe als durch das Verschwinden zweier Constanten aus der allgemeinen Gleichung des ersten Grades zwischen solchen Coordinaten, y und x, die für nicht unendlich weit entfernt liegende Puncte immer endliche Werthe behalten, entstanden denken, eine unendlich weit entfernt liegende gerade Linie darstelle. So lange wir nicht voraussetzen, dafs, während die beiden Gröfsen ε und ε' immer mehr abnehmen, zwischen denselben eine bestimmte Abhängigkeit Statt finde, so lange ist die Gränze des Ausdrucks $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ eine ganz unbestimmte, und kann also auf jede beliebige Richtung bezogen werden. Eine unendlich weit entfernte gerade Linie ist also, wenn nicht besondere Bestimmungen hinzutreten, als mit jeder gegebenen geraden Linie, gleichviel ob diese reell oder imaginär ist, parallel anzusehen.

nannten nicht parallel ist, Werthe von entgegengesetztem Zeichen. Die Gleichung (4) gibt also in Beziehung auf solche Puncte für p einen Ausdruck mit doppeltem Zeichen, nicht aber die Gleichung (6) und nicht die erste der Gleichungen (7).

172. Ich habe zuerst in meinen „analytisch-geometrischen Entwicklungen“ *) gezeigt, wie sich der Grad der Annäherung irgend einer Curve an ihre Asymptoten bestimmen und messen läfst. Die verschiedenen Ordnungen des Contactes zweier Curven bestehen nemlich auch dann noch, wenn die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspuncte in eine gemeinschaftliche Asymptote übergeht und der Berührungspunct selbst also unendlich weit sich entfernt. Wenn daher irgend eine Curve gegeben ist, die eine reelle Asymptote hat, so können wir unendlich viele Hyperbeln bestimmen, welche dieselbe Asymptote und auf derselben mit der gegebenen Curve, und also auch unter einander, in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Contact haben. Diese Hyperbeln geniefsen (vergleiche den eben angeführten Ort) einer merkwürdigen Eigenthümlichkeit. In jeder Hyperbel bestimmen bekanntlich die beiden Asymptoten und eine beliebige Tangente ein Dreieck, dessen Inhalt für alle Lagen dieser Tangente constant ist: es bleibt dieser Inhalt auch dann noch constant, wenn wir von einer der sich osculirenden Hyperbeln zu einer andern übergehen. Diesen constanten Inhalt können wir daher als das Maafs der Annäherung dieser Hyperbeln und also auch der gegebenen Curve an die gemeinschaftliche Asymptote, als das Maafs der Krümmung in immer zunehmender Entfernung betrachten. Dieses Maafs der Annäherung ist also für verschiedene Hyperbeln mit gemeinschaftlichen Asymptoten, wenn wir dieselben durch folgende Gleichung:

$$pq+\lambda = 0, \qquad (1)$$

in der λ eine unbestimmte Constante bedeutet, darstellen, dem jedesmaligen Werthe dieser Constanten proportional. Es wird, zugleich mit dieser Constanten, wenn die Hyperbel in ein System von zwei geraden Linien ausartet, gleich Null. Die Bestimmung des numerischen Werthes dieses Maafses setzt eine nähere Bestimmung der ganzen und linearen Functionen p und q voraus.

173. Nachdem diese Begriffe festgestellt worden sind, wollen wir in einige nähere Erörterungen über die Annäherung der Curven dritter Ordnung an ihre Asymptoten eingehen. Eine Hyperbel, welche eine solche Curve auf einer ihrer Asymptoten in unendlicher Entfernung osculirt, und also diese Asymptote zu ihrer eigenen hat, kann aufserdem irgend eine gegebene gerade Linie zu ihrer zweiten Asymptote haben. Wir können also für die osculirende Hyperbel eine solche nehmen, welche zugleich zwei Asymptoten der Curve zu ihrer eigenen hat. Ist hiernach:

$$pqr+\mu s = 0, \qquad \text{I.}$$

die Gleichung irgend einer Curve dritter Ordnung, so können wir:

$$pq+\lambda = 0, \qquad (1)$$

für die Gleichung einer Hyperbel nehmen, welche, wenn wir λ gehörig bestimmen, jene Curve sowohl auf der Asymptote P als auf der Asymptote Q osculirt. Von den sechs Puncten, in welchen die Hyperbel (1), wenn wir λ unbestimmt lassen, die Curve dritter Ordnung schneidet, liegen zweimal zwei auf den beiden gemeinschaftlichen Asymptoten unendlich weit, und nur zwei derselben liegen, im Allgemeinen, in endlicher Entfernung. Diese bei-

*) Zweiter Band S. 159.

den Durchschnittspuncte lassen sich auf die leichteste Weise bestimmen. Wir erhalten nemlich aus den vorstehenden beiden Gleichungen sogleich die folgende:

$$\lambda r - \mu s = 0, \tag{2}$$

welche, da sie nur vom ersten Grade ist, eine gerade Linie darstellt. Die gerade Linie schneidet die Hyperbel in den beiden fraglichen Durchschnittspuncten. Soll nun aber die Curve von der Hyperbel auf der Asymptote P osculirt werden, so mufs von diesen beiden Durchschnittspuncten einer sich mit den beiden unendlich weit entfernten Durchschnittspuncten auf derselben Asymptote vereinigen, das heifst, es mufs die gerade Linie (2) mit eben dieser Asymptote parallel sein. Soll hingegen die Curve von der Hyperbel auf der andern Asymptote Q osculirt werden, so mufs die gerade Linie (2) mit dieser andern Asymptote parallel sein. Durch schickliche Bestimmung der unbestimmten Constanten λ können wir, im Allgemeinen, nach einander beide Bedingungen erfüllen.

Da die Gleichung (2), wenn wir dieselbe durch μ dividiren, nur den Quotienten $\varkappa$ von λ in μ und nicht mehr diese beiden Constanten selbst enthält, so ist klar, dafs, wenn wir, nach einander, für μ verschiedene Werthe annehmen, mit diesen die verschiedenen resultirenden Werthe der Constanten $\varkappa$ in gleichem Verhältnisse stehen. In demselben Verhältnisse als μ, wächst also auch das Maafs der Annäherung der Curven an ihre beiden Asymptoten P und Q, und mithin auch an ihre dritte Asymptote R. Also:

Wenn wir nach einander alle möglichen Curven dritter Ordnung betrachten, welche dieselben drei Asymptoten haben, und diese auf derselben geraden Linie schneiden und durch die Gleichung:

$$pqr + \mu s = 0,$$

in der alsdann p, q, r und s vier gegebene lineare und ganze Functionen bedeuten, darstellen, so ist die Annäherung dieser Curven an ihre Asymptoten dem Werthe der Constanten μ proportional.

174. Wenn wir r und s als Functionen von p und q betrachten, so können wir die Gleichung (2) auf folgende Weise schreiben:

$$\lambda(p + aq + b) - \mu'(p + cq + d) = 0, \tag{3}$$

wobei μ' alsdann eine Constante bedeutet, die von μ und der particulären Functionen-Bestimmung abhängt, und durch die Constanten a und b, c und d die Lage der beiden geraden Linien R und S in Beziehung auf P und Q gegeben ist. Zur Bestimmung desjenigen Werthes von λ, bei welchem die vorstehende Gleichung (3) eine, der Asymptote Q parallele, gerade Linie darstellt, und den wir durch λ_q unterscheiden wollen, erhalten wir die Gleichung:

$$\lambda_q = \mu', \tag{4}$$

und zur Bestimmung desjenigen Werthes dieser Constanten, der dem Falle entspricht, dafs die gerade Linie (3) der andern Asymptote parallel ist, und den wir zur Unterscheidung λ_p nennen wollen, die folgende Gleichung:

$$a\lambda_p = c\mu'. \tag{5}$$

Dividiren wir die beiden vorstehenden Gleichungen in einander, um μ' zu eliminiren, so kommt:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_q} = \frac{c}{a}. \tag{6}$$

Wenn wir das Maafs für die zwiefache Annäherung der Curve an ihre beiden Asymptoten P und Q durch Δ_p und Δ_q bezeichnen, so sind diese Ausdrücke mit λ_p und λ_q proportional (173). Hiernach drückt also der erste Theil der letzten Gleichung das Verhältnifs

der Annäherung an die beiden eben genannten Asymptoten aus. Um den zweiten Theil dieser Gleichung geometrisch darzustellen, wollen wir uns sogleich auf die 3. Figur beziehen, in der die Benennungen der analytischen Bezeichnung entsprechen, und erhalten alsdann, ohne dafs irgend eine nähere Functionen-Bestimmung nöthig wäre: Fig. 3.

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin SP_1P}{\sin SQ_1Q} : \frac{\sin RO_1P}{\sin ROQ} = \frac{O_2Q_1}{O_2P_1} : \frac{O_2O}{O_2O_1}.$$

Hiernach gelangen wir zu der Proportion:

$$\Delta_p : \Delta_q = \frac{O_2O_1}{O_2P_1} : \frac{O_2O}{O_2Q_1},$$

an deren Stelle wir auch die nachstehende Gleichung setzen können:

$$\frac{O_2P_1}{O_2O_1}\Delta_p = \frac{O_2Q_1}{O_2O}\Delta_q. \tag{7}$$

Als Folge der Symmetrie in der Bezeichnung gehen, wenn Δ_r das Maafs der Annäherung der Curve an die dritte Asymptote bedeutet, aus der letzten Gleichung sogleich die folgenden beiden hervor:

$$\frac{OQ_1}{OO_2}\Delta_q = \frac{OR_1}{OO_1}\Delta_r, \qquad \frac{O_1R_1}{O_1O}\Delta_r = \frac{O_1P_1}{O_1O_2}\Delta_p. \tag{8}$$

Wir können also auf diese Weise das Verhältnifs der Annäherung einer Curve dritter Ordnung an ihre Asymptoten unmittelbar bestimmen, wenn diese Asymptoten und die Linie S gegeben sind.

Beiläufig füge ich noch die Bemerkung hinzu, dafs die letzten drei Gleichungen als Folge der Relation:

$$\frac{O_2P_1 \cdot OQ_1 \cdot O_1R_1}{O_2Q_1 \cdot OR_1 \cdot O_1P_1} = -1,$$

die sich unmittelbar aus der Theorie der Transversalen ergibt (65), zugleich Statt finden.

175. **Wenn die Curve eine osculirende Asymptote hat, so ist das Maafs ihrer Annäherung an diese Asymptote gleich Null.** Es ist dieſs von vorne herein klar, und folgt auch unmittelbar daraus, dafs, nach der Gleichung (5), λ_p und mithin auch Δ_p verschwindet, wenn $c = 0$, das heifst, wenn die Linie S der Asymptote parallel und diese Asymptote also eine osculirende ist.

Wenn die Curve eine osculirende Asymptote hat, so ist ferner das Maafs ihrer Annäherung an eine ihrer beiden übrigen Asymptoten dem Maafse ihrer Annäherung an die andere derselben gleich. Denn es ist nach der Gleichung (6) $\lambda_p = \lambda_q$ und also $\Delta_p = \Delta_q$, wenn $c = a$, das heifst, wenn die Linie S der Asymptote R parallel und diese Asymptote also eine osculirende ist. Hieraus folgt zugleich, dafs es in diesem Falle eine solche Hyperbel gibt, welche die beiden Asymptoten P und Q auch zu den ihrigen hat und, zugleich auf beiden diesen Asymptoten, die Curve dritter Ordnung dreipunctig osculirt.

176. Um das **absolute Maafs** der Annäherung der Curven dritter Ordnung an jede ihrer drei Asymptoten zu bestimmen, wollen wir von der Voraussetzung ausgehen, dafs p, q, r und s solche Functionen bedeuten, welche kürzeste Abstände von den bezüglichen geraden Linie darstellen. Wir wollen ferner die drei, den Asymptoten P, Q und R in dem von denselben gebildeten Dreiecke bezüglich gegenüberliegenden Winkel durch α, β und γ, und die Winkel an den Durchschnitten derselben drei Asymptoten mit der Linie S durch α', β' und γ' bezeichnen. (Diese drei letzten Winkel brauchen wir von ihren Nebenwinkeln hier nicht zu unterscheiden.) Alsdann ist das Maafs der Annäherung der durch

die Gleichung (1) dargestellten Hyperbel an ihre Asymptoten, oder, was dasselbe heifst, das von dem Winkel dieser Asymptote durch eine beliebige Tangente der Hyperbel abgeschnittene Dreieck gleich dem Ausdrucke: $-\frac{2\lambda}{\sin\gamma}$. Wenn ferner:

$$r \equiv \varrho(p+aq+b), \qquad s \equiv \sigma(p+cq+d),$$

der Voraussetzung nach, so wie p und q, Perpendikel auf die bezüglichen geraden Linien, darstellen sollen, so erhalten wir sogleich:

$$\varrho = -\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad \sigma = -\frac{\sin\beta'}{\sin\gamma}, \text{ *)}$$

und also an die Stelle der ursprünglichen Gleichung I. die folgende:

$$pq(p+aq+b)+\mu\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha}(p+cq+d) = 0. \qquad (9)$$

Nach der Gleichung (4) ist hiernach:

$$\lambda_1 = \mu' = \mu\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha},$$

und endlich also:

$$\Delta_1 = -2\mu.\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha\sin\gamma}. \qquad (10)$$

Durch bloſse Buchstaben-Vertauschung finden wir, zur Bestimmung des Maafses der Annäherung der Curve an ihre beiden andern Asymptoten P und R, die nachstehenden Gleichungen:

$$\Delta_2 = -2\mu.\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta\sin\gamma}, \qquad \Delta_3 = -2\mu.\frac{\sin\gamma'}{\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (11)$$

Wenn statt des Coefficienten μ irgend ein Punct der Curve I. gegeben ist, so können wir auch durch die Vermittelung dieses Punctes die vorstehenden Ausdrücke construiren. Ziehen wir zu diesem Ende durch den gegebenen Punct M eine gerade Linie, welche etwa der Asymptote Q parallel ist, und bezeichnen ihre Durchschnitte mit den beiden andern Asymptoten P und R und der Linie S durch P_2, R_2 und S_2, so kommt, wenn wir für μ seinen Ausdruck aus I. substituiren und die Functionen p, q, r und s auf den gegebenen Punct beziehen:

$$\Delta_1 = -2q.\frac{p.r.\sin\beta'}{\sin\alpha.\sin\gamma.s} = -2q.\frac{MP_2.MR_2}{MS_2}. \qquad (12)$$

177. Wir wollen die Untersuchungen noch weiter ausdehnen, und uns die Aufgabe stellen, diejenige Hyperbel zu bestimmen, welche mit der Curve dritter Ordnung auf jeder ihrer Asymptoten in unendlicher Entfernung einen Contact der höchsten Ordnung hat, oder, mit andern Worten, diejenige Hyperbel zu bestimmen, welche den Lauf der beiden an jeder Asymptote sich immer weiter hinziehenden unendlichen Zweige der Curve genauer darstellt als jede andere. Es gibt noch unendlich viele Hyperbeln, welche mit einer ge-

---

*) (−b) bedeutet nemlich, nach der ersten der beiden identischen Gleichungen des Textes, das vom Puncte O, dem Durchschnitte der beiden Asymptoten Q und R, für welchen r = 0 und q = 0, auf die Asymptote P gefällte Perpendikel. Bezeichnen wir ferner das vom Puncte Q_2, dem Durchschnitte der beiden Asymptoten P und Q, für welchen p = 0 und q = 0, auf die Asymptote R gefällte Perpendikel durch r_1, so gibt dieselbe Gleichung: $r_1 = -\varrho b$,
und mithin ist:

$$\varrho = -\frac{r_1}{b} = -\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma};$$

woraus der Werth für σ durch Buchstaben-Vertauschung sich unmittelbar ergibt.

gebenen Curve auf einer gegebenen Asymptote in unendlicher Entfernung einen vierpunctigen Contact haben, und ich habe schon in meinen „analytisch-geometrischen Entwicklungen“ *) gezeigt, dafs alle solche Hyperbeln einen gemeinschaftlichen Mittelpunct besitzen. So wie sich aber durch fünf Puncte nie mehr als eine einzige Hyperbel legen läfst, so gibt es auch nur eine einzige Hyperbel, welche mit der gegebenen Curve einen fünfpunctigen Contact hat, von dem wir hier voraussetzen, dafs er in unendlicher Entfernung Statt findet. Dieser Contact kann nur in dem Falle, dafs die bezügliche Asymptote eine osculirende ist, in einen sechspunctigen sich verwandeln. In dem Falle einer osculirenden Asymptote aber artet die fragliche Hyperbel, schon für einen dreipunctigen Contact, in ein System von zwei geraden Linien aus. Diese beiden geraden Linien sind parallel für einen vierpunctigen Contact, und wenn sie (in die Asymptote) zusammenfallen, geht der vierpunctige Contact unmittelbar in einen sechspunctigen über. Wir können also in dem Nachstehenden die osculirenden Asymptoten unberührt lassen.

178. Für die Gleichung irgend einer Hyperbel, welche mit der durch die Gleichung:

$$pqr+\mu s = 0, \qquad \text{I.}$$

dargestellten Curve dritter Ordnung die gerade Linie Q zur gemeinschaftlichen Asymptote hat, erhalten wir folgende Form:

$$qt+\lambda = 0, \qquad (1)$$

in der t irgend eine neue lineare und ganze Function, und λ irgend eine neue Constante bedeutet. Wenn wir q zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen eliminiren, so ergibt sich:

$$\lambda pr-\mu st = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung stellt eine solche Curve zweiter Ordnung dar, welche durch diejenigen vier Durchschnittspuncte der Curve dritter Ordnung I. und der Hyperbel (1) geht, welche, im Allgemeinen, nicht unendlich weit liegen. Um auszudrücken, dafs die beiden letztgenannten Curven I. und (1) auf der beiden gemeinsamen Asymptote Q einen dreipunctigen Contact haben, brauchen wir also blofs die Bedingung hinzustellen, dafs auch die Curve (2) eine Hyperbel sei, und eine Asymptote habe, welche mit der Asymptote Q parallel ist; damit einer der oben erwähnten vier Durchschnittspuncte nach der Richtung dieser Asymptote unendlich weit liege, und also auf derselben mit den beiden unendlich weit entfernten Durchschnittspuncten der gegebenen Curve dritter Ordnung und der Hyperbel (1) sich vereinige. Um endlich auszudrücken, dafs der Contact eben dieser beiden Curven in unendlicher Entfernung ein vierpunctiger sei, reicht es hin, auszudrücken, dafs die gerade Linie Q auch eine gemeinsame Asymptote der beiden Curven (1) und (2) sei. In dem ersten dieser beiden Fälle müssen wir hiernach nach der Bedingung fragen, unter welcher die Gleichung (2) folgende Form:

$$(q+\varkappa)w+\nu = 0, \qquad (3)$$

und in dem zweiten, nach derjenigen, unter welcher dieselbe Gleichung die Form:

$$qw+\nu = 0, \qquad (4)$$

annimmt, wobei wir durch w irgend eine neue lineare Function und durch $\varkappa$ und ν irgend zwei unbestimmte Constanten darstellen. Ohne dafs, um hierhin zu gelangen, eine absolute Functionen-Bestimmung erforderlich wäre, ist es hinreichend, dafs wir festsetzen, wie von irgend zwei beliebigen der, in den Gleichungen I. und (2) vorkommenden, Functionen, die übrigen abhängen. Wenn wir, zu diesem Ende,

*) Zweiter Band S. 145.

$r \equiv \varrho(p+aq+b)$, $s \equiv \sigma(p+cq+d)$, $t \equiv \tau(p+gq+h)$,

und der Kürze halber,

$$\frac{\mu\sigma\tau}{\varrho} = \mu_1,$$

setzen, so verwandelt sich die Gleichung (2) in die folgende:

$$\lambda p(p+aq+b) - \mu_1(p+cq+d)(p+gq+h). \qquad (5)$$

Soll diese Gleichung die Form (3) annehmen können, so muſs aus derselben p^2 verschwinden, wonach

$$\lambda = \mu_1; \qquad (6)$$

soll dieselbe Gleichung die Form (4) annehmen können, so müssen aufserdem auch noch alle diejenigen Glieder ausfallen, welche p in der ersten Potenz und nicht zugleich q enthalten. Dieſs gibt uns neben der vorstehenden Bedingungs-Gleichung und mit Berücksichtigung derselben auch noch die folgende:

$$b = d+h. \qquad (7)$$

Die Deutung der Gleichung (6) führt zu den Resultaten der vorstehenden Nummern zurück. Die letzte Gleichung zeigt zunächst, was wir in der vorigen Nummer schon vorausgeschickt haben, daſs solche Hyperbeln, welche die Curve I. auf der Asymptote Q in unendlicher Entfernung vierpunctig osculiren, alle denselben Mittelpunct haben. Denn die Lage dieses Mittelpunctes, des Durchschnittes der Asymptote Q mit der geraden Linie T' deren Gleichung:

$$p+gq+h = 0,$$

ist bestimmt, wenn wir den Werth von h kennen, und dieser Werth ist durch die Gleichung (7) gegeben. Ist in der 3. Figur Q_3 der zu construirende, auf der Asymptote Q liegende Mittelpunct, und sind O_2, O und Q_1 diejenigen drei Puncte, in welchen dieselbe Asymptote von den Asymptoten P, R und der Linie S geschnitten wird, so heiſst die Gleichung (7), daſs

$$O_2Q_3 = -OQ_1 \text{ oder } OQ_3 = -O_2Q_1.$$

Bezeichnen wir ferner die gemeinschaftlichen Mittelpuncte aller solcher Hyperbeln, welche die Curve I., statt auf der Asymptote Q, auf jeder der beiden andern Asymptoten auf gleiche Weise vierpunctig osculiren, durch P_3 und R_3, so erhalten wir bei der Symmetrie der Curve, in Beziehung auf ihre Asymptoten, unmittelbar auch:

$$O_2P_3 = -O_1P_1, \text{ oder } O_1P_3 = -O_2P_1,$$
$$OR_3 = -O_1R_1, \quad \text{„} \quad O_1R_3 = -OR_1.$$

Da die drei Puncte P_1, Q_1 und R_1 in gerader Linie liegen, so ist nach der Theorie der Transversalen

$$\frac{O_2P_1 \cdot OQ_1 \cdot O_1R_1}{O_2Q_1 \cdot OR_1 \cdot O_1P_1} = -1.$$

Diesen Ausdruck können wir nach den sechs vorhergehenden Gleichungen sogleich in den folgenden umformen:

$$\frac{O_1P_3 \cdot O_2Q_3 \cdot OR_3}{O_1Q_3 \cdot OR_3 \cdot OP_3} = -1,$$

und dieser sagt aus, daſs auch die drei Puncte P_3, Q_3 und R_3 auf einer und derselben geraden Linie liegen. Diese gerade Linie hängt auf keine Weise von der Constanten μ ab, sondern, nachdem die drei Asymptoten P, Q und R gegeben sind, einzig und allein von der Linie S, zu welcher sie überdieſs in einer, durch diese Asymptoten vermittelten, durchaus gegenseitigen, geometrischen Beziehung steht.

Die gemeinsamen drei Mittelpuncte derjenigen drei Gruppen von Hyperbeln, welche mit einer gegebenen Curve dritter Ordnung auf den drei Asymptoten in unendlicher Entfernung einen vierpunctigen Contact haben, liegen auf diesen Asymptoten in gerader Linie, und diese gerade Linie bleibt dieselbe für alle andere Curven dritter Ordnung, welche dieselben Asymptoten als die gegebenen haben, und diese in denselben Puncten schneiden.

Zugleich ersehen wir aus dem vorstehenden Satze, dafs, wenn die Linie S insbesondere durch den Durchschnitt zweier der drei Asymptoten geht, die drei in Rede stehenden Mittelpuncte auf der dritten Asymptote liegen, und zwar so, dafs, wenn etwa die Linie S durch den Punct O, den Durchschnitt der beiden Asymptoten Q und R, geht, der gemeinsame Mittelpunct aller Hyperbeln, welche die Curve dritter Ordnung auf der Asymptote Q vierpunctig osculiren, in O_2, und der gemeinsame Mittelpunct aller Hyperbeln, deren vierpunctiger Contact mit der Curve auf der Asymptote R Statt findet, in O_1 fällt. Also, auch in diesem Falle nur, kann es eine solche Hyperbel geben, welche zugleich zwei Asymptoten der Curve dritter Ordnung zu den ihrigen und auf einer derselben mit der Curve einen vierpunctigen Contact hat. Und zwar gibt es alsdann immer zwei solcher Hyperbeln; der vierpunctige Contact kann auf jeder derjenigen beiden Asymptoten der Curve, durch deren Durchschnitt die Linie S geht, Statt finden, und die dritte Asymptote der Curve ist beide Male die zweite der Hyperbel.

179. Alle die unendlich vielen Hyperbeln, welche die Curve I. auf der Asymptote Q in unendlicher Entfernung vierpunctig osculiren, haben, aufser dieser Asymptote, die sie mit der Curve gemein haben, noch eine zweite Asymptote T, für welche wir irgend eine gerade Linie, die durch den in der vorigen Nummer bestimmten Punct Q_3 geht, beliebig annehmen können. Denn die Richtung derselben kann jede beliebige sein, weil die Constante g, von welcher dieselbe abhängt, bei der in Rede stehenden Art und Ordnung des Contactes, durchaus keiner Bedingung unterworfen ist. Aber es gibt eine einzige und vollkommen bestimmte Lage der Asymptote T, für welche die Osculation in unendlicher Entfernung bis zu einer fünfpunctigen ansteigt. Doch diese Lage der Asymptote T hängt nicht, wie die Lage des Mittelpunctes Q_3, blofs von den drei Asymptoten P, Q und R und der Linie S, sondern zugleich auch von dem Werthe der Constanten μ ab.

Wenn eine gegebene Curve dritter Ordnung mit der Hyperbel (1) auf ihrer Asymptote Q in unendlicher Entfernung einen **fünfpunctigen Contact** haben soll, so mufs diese Hyperbel mit der Hyperbel (2) auf derselben Asymptote einen dreipunctigen Contact haben. Die Gleichungen dieser beiden Hyperbeln können wir, nach dem Vorstehenden und mit Berücksichtigung der beiden Bedingungs-Gleichungen (6) und (7), auf folgende Weise schreiben:

$$\tau q\{p+gq+h\}+\lambda = 0,$$
$$q\{(a-c-g)p-cgq-(ch+gd)\}-dh = 0,$$

wodurch in Evidenz tritt, dafs diese Hyperbeln die Linie Q zur gemeinschaftlichen Asymptote haben. Eliminiren wir den Factor q, der in den beiden ersten Gliedern der beiden vorstehenden Gleichungen vorkommt, so ergibt sich:

$$\tau dh\{p+gq+h\}+\lambda\{(a-c-g)p-cgq-(ch+gd)\} = 0.$$

Diese Gleichung, welche auf den ersten Grad sich reducirt hat, stellt diejenige gerade Linie dar, welche durch die beiden, im Allgemeinen, nicht in unendlicher Entfernung liegenden Durchschnitts-Puncte der Curve und der fraglichen Hyperbeln gehen. Um also auszu-

zudrücken, dafs diese sich auf ihrer gemeinschaftlichen Asymptote Q dreipunctig osculiren, ist es hinreichend, die Bedingung hinzustellen, dafs jene gerade Linie dieser Asymptote parallel sei. Für diese Bedingung ergibt sich auf der Stelle:

$$\tau dh + \lambda(a - c - g) = 0,$$

oder, wenn wir für h und λ die oben gefundenen Werthe substituiren,

$$d(b - d) + \frac{\mu\sigma}{\varrho}(a - c - g) = 0.$$

Wenn wir insbesondere wiederum wie in der 176. Nummer den vier linearen Functionen p, q, r und s in der Gleichung I. die Bedeutung kürzester Abstände von den bezüglichen geraden Linien geben, so stellt $(-g)$ den Quotienten der Sinus derjenigen beiden Winkel dar, welche die zu bestimmende Asymptote T mit den beiden Asymptoten P und Q bildet, und wir erhalten, indem wir für σ und ϱ ihre Werthe einsetzen:

$$d(b - d) + \frac{\mu \sin\beta'}{\sin\alpha}(a - c - g) = 0.$$

180. Wir wollen uns nun zu dem zweiten Falle wenden, dafs zwei der drei Functionen in dem ersten Gliede der allgemeinen Gleichung:

$$pqr + \mu s = 0, \qquad \text{I.}$$

imaginär sind und, dem entsprechend:

$$q = t + w\sqrt{-1}, \qquad r = t - w\sqrt{-1},$$

setzen. Alsdann können wir in der vorstehenden allgemeinen Gleichung, statt der beiden imaginären Functionen q und r, die beiden reellen, ganzen und linearen Functionen t und w, und an deren Stelle wiederum, zum Behuf einer gröfsern Allgemeinheit, zwei neue solche Functionen u und v einführen, welche mit den beiden zuletzt genannten durch die nachstehenden Gleichungen, in denen α eine willkührliche Constante bedeutet, verbunden sind:

$$t = u + \alpha v, \qquad w = v - \alpha u.$$

Alsdann erhalten wir:

$$qr = (1 + \alpha^2)(u^2 + v^2),$$

wonach die ursprüngliche Gleichung I., indem wir zugleich, der Kürze halber,

$$\frac{\mu}{1 + \alpha^2} = \mu',$$

setzen, in die folgende übergeht:

$$p(u^2 + v^2) + \mu' s = 0, \qquad (1)$$

Der Durchschnitt der beiden Asymptoten Q und R bleibt auch dann ein reeller Punct, wenn diese Asymptoten selbst imaginär werden. In diesem Falle können wir denselben durch folgende Gleichung:

$$qr = (1 + \alpha^2)(u^2 + v^2) = 0,$$

darstellen, durch dieselbe Gleichung, welche, in dem ersten allgemeinen Falle, das System der beiden Asymptoten ausdrückt; und unter diesem Gesichtspuncte aufgefafst, ersetzt er vollständig bei der geometrischen Bestimmung der Curven dritter Ordnung jene beiden reellen Asymptoten des frühern Falles. So wie zwei solche Asymptoten als eine Gränze für Hyperbeln gelten können, so ist dieser Punct alsdann als eine Ellipse anzusehen, deren Dimensionen immer abgenommen, während ihre Durchmesser, bis zum Verschwinden, dieselbe Lage und dasselbe Verhältnifs zu einander beibehalten haben, als diejenige Ellipse hat, welche, bei einer willkührlichen Annahme der Constanten γ, durch folgende Gleichungen:

$$qr = \gamma^2, \quad \text{oder} \quad u^2 + v^2 = \gamma^2,$$

dargestellt wird, und von der wir, mit analytischer Consequenz, wie von der entsprechenden Hyperbel in dem Falle dreier reellen Asymptoten, sagen können, dafs sie mit der

Curve dritter Ordnung, in unendlicher Entfernung, einen (imaginären) doppelten Contact habe. Um lästiger Umschreibungen überhoben zu sein, wollen wir den, unter diesem Gesichtspuncte betrachteten, reellen Durchschnittspunct der beiden imaginären Asymptoten den Asymptotenpunct der Curve dritter Ordnung nennen. Hiernach können wir also auch von den beiden Axen und den zugeordneten Durchmessern des Asymptotenpunctes sprechen. Und zwar stellen die beiden Gleichungen

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

wenn wir für α nach einander alle möglichen Werthe annehmen, alle möglichen Paare solcher zugeordneten Durchmesser dar. Um ein besonderes dieser Paare auszuzeichnen, müssen wir eine nähere Functionen-Bestimmung machen. Wir wollen einer solchen Bestimmung, da wo sie überhaupt nothwendig ist, in der Folge vorzugsweise die identische Bedingungs-Gleichung:

$$p+q+r \equiv \beta,$$

zu Grunde legen. Diese Gleichung gibt für den vorliegenden Fall (43):

$$p-\beta \equiv -(q+r) \equiv -2(u+\alpha v) \equiv -2t,$$

woraus ersichtlich ist, dafs die durch die Gleichung:

$$t = 0,$$

dargestellte gerade Linie der reellen Asymptote P parallel ist. Diese gerade Linie ist aber einer derjenigen beiden zugeordneten Durchmesser des Asymptotenpunctes, welche der Annahme $\alpha = 0$ (oder $\alpha = \infty$) entsprechen.

Die in dieser Nummer vorgenommene Umformung der Gleichung I. findet ähnlicher Weise auch für den Fall Statt, dafs die beiden Functionen q und r reell sind (29). Wir gelangen alsdann zu der nachstehenden Gleichung:

$$p(u^2-v^2)+\mu s = 0,$$

welche an die Stelle der Gleichung (1.) tritt.

181. Der Satz, welcher die geometrische Deutung der Form der allgemeinen Gleichung I. für den Fall dreier reeller Asymptoten ist, dafs nemlich eine Curve dritter Ordnung ihre Asymptoten in solchen drei Puncten schneidet, die alle drei auf der geraden Linie S liegen, besteht natürlich auch für den vorliegenden zweiten Fall, nur mit dem Unterschiede, dafs hier zwei der drei Durchschnittspuncte der Linie S mit der Curve imaginär sind. Diese Linie selbst bleibt hingegen überall da, wo diese beiden imaginären Durchschnittspuncte nicht unmittelbar und abgesondert in Betracht kommen, in derselben characteristischen Beziehung zur Curve. Wir können dieselbe in jedem der beiden allgemeinen Fälle durch zwei reelle Puncte geometrisch bestimmen; einerseits durch ihren Durchschnittspunct mit der einen, immer reell bleibenden, Asymptote der Curve, und, andrerseits, durch die immer reelle Mitte ihrer beiden imaginären Durchschnittspuncte mit der Curve, oder, was dasselbe heifst, mit den beiden imaginären Asymptoten derselben. Diese beiden imaginären Durchschnittspuncte können wir ihrerseits durch die Linie S und eine derselben nicht begegnenden Curve zweiter Ordnung geometrisch bestimmen. Doch ich berühre hier diesen Gegenstand nicht weiter, weil wir, bei Gelegenheit der Construction der Curven dritter Ordnung, auf denselben zurückkommen werden.

182. In dem zweiten allgemeinen Falle, der uns jetzt beschäftigt, ergeben sich Unterscheidungen, welche denen des ersten Falles ganz analog sind. Die Linie S ist entweder eine ganz beliebige, oder sie ist der einzigen reellen Asymptote parallel, oder endlich sie liegt unendlich weit. In dem ersten dieser drei Fälle ist die Asymptote P eine gewöhnliche, und nach der oben in Anwendung gebrachten Methode können wir leicht

das Maafs der Annäherung der Curve an dieselbe bestimmen. In dem zweiten dieser drei Fälle particularisirt sich die Form der Gleichung (1), indem sie in die nachstehende übergeht:

$$p(u^2+v^2)+\mu(p+\varkappa) = 0, \qquad (2)$$

wobei $\varkappa$ irgend eine Constante bedeutet. Die Asymptote P ist alsdann eine osculirende. Dem dritten Falle endlich entspricht die noch mehr particularisirte Form:

$$p(u^2+v^2)+\mu = 0, \qquad (3)$$

in der eine Constante an die Stelle der linearen Function s getreten ist.

183. Ein Blick auf die Gleichung (1) zeigt, dafs, damit die Constante μ immer dasselbe Zeichen behalte, beim Uebergange von irgend einem Puncte der bezüglichen Curve zu irgend einem andern Werthe der Functionen p und s entweder beide ihr Zeichen behalten, oder beide zugleich ihr Zeichen ändern müssen. Die Curve kann sich hiernach blofs in einem einzigen der beiden Paare von Scheitelwinkeln, welche im Durchschnitte der beiden geraden Linien P und S gebildet werden, erstrecken. Es ziehen sich also auch die beiden unendlichen Zweige derselben auf den beiden Seiten nach entgegengesetzter Richtung an der Asymptote hin.

In dem Falle, dafs die Linie S der Asymptote P parallel ist, mufs, damit μ sein Zeichen nicht ändere, der Werth von p entweder immer innerhalb der Gränzen Null und $(-\varkappa)$ bleiben, oder immer aufserhalb derselben Gränzen liegen. Die Curve erstreckt sich also entweder ganz zwischen den beiden Parallelen P und S, oder ganz aufserhalb derselben, so dafs sich die Curve nothwendig also auch beide Male der Asymptote P nach entgegengesetzter Richtung auf einerlei Seite nähert.

In dem Falle, dafs die Linie S unendlich weit liegt, befindet sie sich ganz auf einer und derselben Seite ihrer einzigen, reellen und osculirenden, Asymptote.

184. Die durch die allgemeine Gleichung I. dargestellten Curven dritter Ordnung theilen sich also nach dem Vorhergehenden in zwei grofse Abtheilungen; in der einen sind die Asymptoten alle drei reell, in der andern sind zwei derselben imaginär. In jeder derselben gibt es eine untergeordnete Abtheilung, in der eine der drei Asymptoten eine osculirende ist, und die Curve deshalb blofs von acht Constanten abhängt; und in jeder dieser untergeordneten Abtheilungen gibt es wiederum eine neue Abstufung, dafs nemlich die Linie S unendlich weit liegt, wonach die Curve nur noch von sieben Constanten abhängt. Die sechs, paarweise coordinirten, Fälle, welche sich hiernach ergeben, können wir durch folgende Gleichungen darstellen:

$$p(u^2 \mp \gamma^2 v^2)+\mu s = 0,$$
$$p(u^2 \mp \gamma^2 v^2)+\mu(p+\varkappa) = 0,$$
$$p(u^2 \mp \gamma^2 v^2)+\mu = 0,$$

wobei sich die obern Vorzeichen auf die erste, die untern auf die zweite Haupt-Abtheilung beziehen.

185. Zwischen den beiden Haupt-Classen von Curven dritter Ordnung, mit denen wir uns bisher in diesem Paragraphen beschäftigt haben, bilden diejenigen Curven den Uebergang, welche durch die Gleichung:

$$p(q^2+\lambda p)+\mu s = 0, \qquad \text{II.}$$

dargestellt werden. Wir haben schon in einer frühern Nummer bemerkt, dafs hier die allgemeine Gleichung die Form:

$$pqr+\mu s = 0, \qquad \text{I.}$$

oder:

$$(\varphi + a\psi + b)(\varphi + a'\psi + b')(\varphi + a''\psi + b'') + \mu(\varphi + c\psi + d) = 0,$$

deshalb nicht mehr annehmen kann, weil, bei der Constanten-Bestimmung, in zwei Factoren des ersten Gliedes dieser Form, diejenigen beiden Constanten (b' und b''), welche von den beiden veränderlichen Gröfsen φ und ψ unabhängig sind, unendlich werden; das heifst, wenn wir geometrisch deuten, zwei Asymptoten Q und R sind, indem sie eine bestimmte durch a' und a'' angezeigte Richtung beibehalten haben, unendlich weit gerückt. Wir können in diesem Falle, um den Lauf der bezüglichen immer weiter sich erstreckenden Zweige annäherungsweise darzustellen, an die Stelle der beiden Asymptoten eine Parabel setzen, die eine Uebergangs-Curve von Hyperbeln zu Ellipsen ist, und von der man, in dieser Beziehung, sagen kann, dafs ihre Asymptoten, auf gleiche Weise, wie die oben bezeichneten, den Uebergang vom Reellen zum Imaginären bildend, unendlich weit entfernt liegen, aber, obwohl unendlich weit entfernt, doch als den Durchmessern der Parabel parallel angesehen werden müssen.

186. Um die Gleichung II. zu befriedigen, können wir, nach einander, jede der folgenden beiden Gleichungen

$$p = 0, \tag{1}$$

$$q^2 + \lambda p = 0, \tag{2}$$

bestehen lassen, und erhalten alsdann beide Male aus der Gleichung der Curve:

$$s = 0. \tag{3}$$

Die durch die Gleichung (1) dargestellte gerade Linie schneidet die Curve II. also nur in einem einzigen Puncte; die beiden andern Durchnittspuncte liegen unendlich weit. Die durch die Gleichung (2) dargestellte Curve ist eine Parabel, welche von der geraden Linie P in ihrem Durchschnitte mit der geraden Linie Q (derjenigen geraden Linie, deren Gleichung: $q = 0$) berührt wird, und diese letztgenannte gerade Linie zu einem ihrer Durchmesser hat. Während, im Allgemeinen, eine Curve dritter Ordnung von einer Parabel in sechs Puncten geschnitten wird, reducirt sich in dem vorliegenden Falle die Anzahl der Durchschnittspuncte der Curve II. und der Parabel (2) auf zwei. Jede solche Reduction findet aber nur in Folge davon Statt, dafs eine gewisse Anzahl von Durchschnittspuncten, hier also vier, unendlich weit gerückt sind. Man erhält auf diese Weise im Ganzen nur drei Durchschnittspuncte des Systems der geraden Linie (1) und der Parabel (2) mit der Curve dritter Ordnung II. und diese drei Puncte, von denen die beiden letzten auch imaginär sein können, liegen auf der, durch die Gleichung (3) dargestellten, Linie S.

Die gerade Linie P ist, wie in dem früher discutirten Falle der Gleichung I., eine Asymptote der Curve dritter Ordnung. Die durch die Gleichung (2) dargestellte Parabel ist als eine krummlinige Asymptote der Curve anzusehen. Es tritt uns auch hierbei eine vollständige Analogie mit dem eben erwähnten allgemeinen Falle entgegen, dafs die Curve drei geradlinige Asymptoten hat. Wir können nemlich an die Stelle irgend zweier derselben eine solche Hyperbel setzen, zu welcher sie, wie zu der Curve dritter Ordnung, in der Beziehung von Asymptoten stehen. Alsdann spielt diese Hyperbel die Rolle einer hyperbolischen Asymptote, weil sie mit der Curve dritter Ordnung in unendlicher Entfernung einen doppelten Contact hat, und an derselben vier unendliche Zweige dieser letztern sich immer weiter hin erstrecken, wobei die Ordnung der Annäherung dieselbe ist, als die Ordnung der Annäherung der Curve dritter Ordnung, oder auch der fraglichen Hyperbel selbst, an ihre beiden gemeinsamen Asymptoten. Der doppelte Contact in unendlicher Entfernung besteht auch dann, wenn, in dem Falle der Gleichung

II., an die Stelle der Hyperbel eine Parabel tritt; nur verlieren die beiden geradlinigen Asymptoten der erstern ihre geometrische Bedeutung bei der Bestimmung dieses Contactes. Sie rücken immer weiter und sind in der Gränzlage als zusammenfallend zu betrachten; ihre Richtung nähert sich, indem sie immer weiter rücken, einer bestimmten Gränze, der Richtung der Durchmesser der Parabel. So wie ferner aber der eine Theil der hyperbolischen Asymptote nur dadurch in eine Parabel sich umwandelt, dafs der andere Theil derselben, indem er immer weiter rückt, verschwindet, so verliert die Curve dritter Ordnung I., indem sie in eine Curve von der besondern Art, der die Gleichung II. entspricht, sich umwandelt, gleichfalls zwei ihrer unendlichen Zweige. Auch die beiden ihr noch bleibenden unendlichen Zweige verschwinden, und die Curve dritter Ordnung erhält wiederum drei geradlinige Asymptoten, von denen aber zwei imaginär sind, wenn die Parabel in eine, diese Curve in unendlicher Entfernung doppelt berührende, Ellipse übergeht. Der doppelte Contact auf der parabolischen Asymptote stellt sich uns hiernach zugleich als eine vierpunctige Osculation dar, durch welche hindurch der reelle doppelte Contact in einen imaginären übergeht.

Wir können also mit vollem Rechte sagen, dafs die durch die Gleichung II. dargestellten Curven dritter Ordnung eine geradlinige Asymptote P und aufserdem eine parabolische Asymptote (2) haben. Doch, so wie zwei Paare unendlicher Zweige einer Curve dritter Ordnung von der allgemeinen Art unendlich viele hyperbolische Asymptoten haben, so hat auch eine und dieselbe Curve II. nicht blofs eine, sondern unendlich viele parabolische Asymptoten. Ueber diesen Punct wollen wir in einige ausführlichere Erörterungen eingehen.

187. Wenn wir an die Stelle der Gleichung II. die nachstehende von allgemeinerer Form setzen:

$$p(q^2+\lambda' r)+\mu' s' = 0, \qquad (4)$$

so steht zu der, durch diese Gleichung dargestellten, Curve dritter Ordnung diejenige Parabel, deren Gleichung:

$$q^2+\lambda' r = 0, \qquad (5)$$

ist, ganz in derselben Beziehung, als zu der Curve II. die Parabel (2). Die Curve (4) ist nemlich durch die parabolische Asymptote (5), durch die geradlinige Asymptote P, die Linie S' und den Coefficienten μ' vollkommen bestimmt. Die Parabel (5) ihrerseits ist, nach der Form ihrer Gleichung, durch die beiden geraden Linien Q und R, von welcher die erste ein Durchmesser derselben und die zweite die Tangente im Scheitel dieses Durchmessers ist, und den Coefficienten λ' bestimmt; diese Bestimmung kann aber auf unendlichfache Art Statt finden, und zwar so, dafs die Tangente R jede beliebige Richtung haben und insbesondere auch der, als gegeben betrachteten, Asymptote P parallel angenommen werden kann. Hiermit in Uebereinstimmung, enthält die Gleichung (5) eine Constante mehr, als zur Bestimmung der bezüglichen Parabel nöthig ist; die überflüssige Constante verschwindet aber, wenn wir, der obigen geometrischen Beschränkung gemäfs, die Gleichung (5) auf nachstehende Weise particularisiren:

$$q^2+\lambda(p+\alpha) = 0. \qquad (6)$$

Wir können also auch die Gleichung der Curven dritter Ordnung (4), unbeschadet der Allgemeinheit, unter der folgenden Form schreiben:

$$p\{q^2+\lambda(p+\alpha)\}+\mu' s' = 0, \qquad (7)$$

so dafs also, bei schicklicher Constanten-Bestimmung, die Gleichungen (4) und (7) dieselbe Curve dritter Ordnung und die Gleichung (5) und (6) dieselbe Parabel darstellen.

188. Der Gleichung (7) können wir, durch Einführung einer neuen, ganz willkührlichen Constanten α', folgende Form geben:

$$p\{q^2+\lambda(p+\alpha')\}+\mu's'+\lambda(\alpha-\alpha')p = 0, \tag{8}$$

und, wenn wir, der Kürze wegen,

$$\mu's'+\lambda(\alpha-\alpha')p \equiv \mu_1 s_1, \tag{9}$$

setzen, ergibt sich:

$$p\{q^2+\lambda(p+\alpha')\}+\mu_1 s_1 = 0:$$

eine Gleichung für dieselbe Curve dritter Ordnung und ganz von derselben Form. Aber an die Stelle der durch die Gleichungen (6) oder (5) dargestellten Parabel ist eine andere getreten, diejenige, deren Gleichung:

$$q^2+\lambda(p+\alpha') = 0, \tag{10}$$

ist. Da α' eine ganz willkührlich angenommene Constante bedeutet, können wir, nach einander, durch die letzte Gleichung unendlich viele verschiedene Parabeln darstellen, welche alle zu der Curve dritter Ordnung genau in derselben Beziehung stehen. Und eben aus diesem Grunde reducirt sich die Anzahl der Constanten in der Gleichung (7) noch um Eins. Wir können nemlich α' von vorne herein bestimmen, das heifst, unter den unendlich vielen parabolischen Asymptoten eine besondere hervorheben. Setzen wir $\alpha' = 0$, so wählen wir diejenige, welche die geradlinige Asymptote P der Curve dritter Ordnung berührt, und gelangen, indem wir

$$\mu's'+\lambda\alpha p = \mu s$$

setzen, zu der Gleichung:

$$p(q^2+\lambda p)+\mu s = 0, \tag{11}$$

in der die Zahl der Constanten auf die nothwendige herabgesunken ist.

189. Die Gleichung (10), die bei einer beliebigen Annahme der Constanten α', nach einander, alle möglichen parabolischen Asymptoten der Curve (7) darstellt, zeigt, dafs man, wenn eine derselben gegeben ist, sogleich alle erhält, indem man die gegebene, parallel mit sich selbst, nach der Richtung ihrer Durchmesser, verschiebt; denn, alle diese parabolischen Asymptoten haben, nach der eben angeführten Gleichung, dieselbe gerade Linie zu ihrer Axe und gleichen Parameter. Zugleich erhalten wir hierdurch den vollständigsten Aufschlufs darüber, dafs es unendlich viele solcher parabolischen Asymptoten derselben Curve geben mufs. Denn irgend zwei Parabeln, mit gemeinschaftlicher Axe und gleichem Parameter, nähern sich einander immer mehr; in der Art, dafs zwei Bogen derselben, die unendlich weit entfernt liegen, und die wir uns etwa zwischen zwei Coordinaten der Axe befindlich denken mögen, als einander unendlich nahe und zugleich der Axe parallel zu betrachten sind; wenn also eine Curve einer solchen Parabel sich immer mehr nähert, indem sie sich immer weiter an derselben hinzieht, nähert sie sich zugleich unendlich vielen immer mehr. Wenn wir uns einen gemeinschaftlichen Durchmesser dieser Parabel, parallel mit sich selbst, fortgerückt denken, so behalten zwar die beiden Durchschnitte desselben mit irgend zwei der Parabeln immer dieselbe und einer dieser beiden Durchschnittspuncte und der bezügliche Durchschnittspunct mit der sich annähernden Curve, im Allgemeinen, immer eine endliche Entfernung, wie weit wir auch vorwärts gehen mögen; aber sobald man, statt des Durchmessers, eine gerade Linie, die um irgend einen endlichen Winkel gegen denselben geneigt ist, parallel mit sich selbst, fortbewegt, so nähert sich jene Entfernung immer mehr der Gränze Null.

190. Indem die parabolische Asymptote (10) parallel mit sich selbst fortrückt, dreht sich die Linie S_1 um einen festen Punct der geradlinigen Asymptote P, und kann, im Allgemeinen, jede beliebige Richtung annehmen. Es zeigt diefs unmittelbar ein Blick auf die Gleichung (9). Wir können also auch α' insbesondere so bestimmen, dafs die Linie S_1

ein Durchmesser der parabolischen Asymptote wird. Alsdann vereinigt sich mit den vier unendlich weit entfernt liegenden Durchschnittspuncten der Curve dritter Ordnung und dieser Asymptote, noch ein fünfter, so dafs die beiden Curven in endlicher Entfernung sich nur noch in einem einzigen Puncte schneiden. Um der obigen Bestimmung nachzukommen, wollen wir für α' einen solchen Werth $(-\varkappa)$ annehmen, durch den die Gleichung:

$$\mu' s' + \lambda(\alpha + \varkappa)\mathrm{p} = \mu_0(\mathrm{q} + \sigma),$$

in der μ_0 und σ unbestimmte Constanten bedeuten, eine identische werde. Alsdann nimmt die Gleichung der Curve nachstehende Form an:

$$\mathrm{p}\{\mathrm{q}^2 + \lambda(\mathrm{p} - \varkappa\} + \mu_0(\mathrm{q} + \sigma) = 0,$$

oder auch, indem wir $(\mathrm{p} + \varkappa)$ statt p schreiben, und die Marke bei der Constanten μ_0 fortlassen, die folgende:

$$(\mathrm{p} + \varkappa)\{\mathrm{q}^2 + \lambda\mathrm{p}\} + \mu(\mathrm{q} + \sigma) = 0. \qquad \text{II. a.}$$

Diese Gleichung enthält, wie die Gleichung II., blofs die nothwendige Anzahl von Constanten, und gestattet also, so wenig wie diese, wenn sie alle möglichen Curven dritter Ordnung und der fraglichen Art darstellen soll, eine neue Particularisation. Wir wollen diese letzte Gleichung II. a. vorzugsweise vor der Gleichung II. den spätern Entwicklungen zu Grunde legen, weil in ihr die Beziehung der bezüglichen Curve zu derjenigen ihrer parabolischen Asymptoten, welche allein, unter den unendlich vielen, mit ihr in unendlicher Entfernung einen innigern (statt eines vierpunctigen einen fünfpunctigen) Contact hat, in Evidenz tritt. Die Gleichung dieser parabolischen Asymptote ist hierbei:

$$\mathrm{q}^2 + \lambda\mathrm{p} = 0,$$

und die Gleichung der geradlinigen:

$$\mathrm{p} + \varkappa = 0.$$

191. Die identische Gleichung (9) zeigt zwar, dafs, im Allgemeinen, bei einer schicklichen Annahme der willkührlichen Constanten α', die Linie S_1 der Linie Q, das heifst den Durchmessern der parabolischen Asymptote parallel werde, sie zeigt aber zugleich auch, dafs diefs in dem einzigen besondern Falle, dafs:

$$s' \equiv \nu(\mathrm{p} + \beta),$$

nicht geschehen könne. Alsdann behält die Function s_1 ebenfalls, für jede beliebige Annahme von α', dieselbe Form als s', in der ν und β zwei unbestimmte Constanten bedeuten. Während in diesem Ausnahmsfalle also die parabolische Asymptote nach der Richtung ihrer Durchmesser fortrückt, bleibt die Linie S_1 parallel mit sich selbst und der geradlinigen Asymptote P.

Es entspricht dem fraglichen Falle die Gleichung:

$$\mathrm{p}\{\mathrm{q}^2 + \lambda'\mathrm{r}\} + \mu'(\mathrm{p} + \beta) = 0,$$

die sich zunächst in folgende umwandelt:

$$\mathrm{p}\{\mathrm{q}^2 + \lambda(\mathrm{p} + \alpha)\} + \mu'(\mathrm{p} + \beta) = 0, \qquad (11)$$

und dann insbesondere auch, wenn wir die parabolische Asymptote parallel mit sich selbst so lange fortrücken, bis sie die geradlinige Asymptote P berührt, die nachstehende Form annimmt:

$$\mathrm{p}\{\mathrm{q}^2 + \lambda\mathrm{p}\} + \mu'(\mathrm{p} + \beta) = 0. \qquad (12)$$

Wir können aber auch die parabolische Asymptote, und zwar auf einzige Weise und blofs um eine endliche Strecke, so fortrücken, dafs die Linie S (deren Gleichung $\mathrm{p} + \beta = 0$) unendlich weit sich entfernt. Führen wir nemlich auf gleiche Weise, wie früher, eine willkührliche Constante α' in die Gleichung (11) ein, und setzen:

$$\mu'(\mathrm{p} + \beta) + \lambda(\alpha - \alpha')\mathrm{p} \equiv (\mu' + \lambda'(\alpha - \alpha'))\mathrm{p} + \mu'\beta \equiv \mu_1\mathrm{p} + \mu,$$

so geht diese Gleichung in die folgende über:

$$p\{q^2+\lambda(p+\alpha')\}+\mu_1 p+\mu=0,$$

und diese endlich, wenn wir α' so bestimmen, dafs

$$\mu_1 \equiv \mu'+\lambda(\alpha-\alpha')=0,$$

und dann $\alpha'=(-\varkappa)$ nehmen und $(p+\varkappa)$ statt p schreiben, in die nachstehende:

$$(p+\varkappa)\{q^2+\lambda p\}+\mu=0. \qquad (13)$$

Wenn aber die Linie S, welche die drei Durchschnittspuncte der Curve dritter Ordnung und des Systems ihrer geradlinigen und parabolischen Asymptote enthält, insbesondere der erstgenannten Asymptote parallel ist, so ist diese eine osculirende, und bleibt es auch dann, wenn die Linie S immer weiter fortrückt. Indem alsdann aber auch diejenigen beiden der obigen drei Durchschnittspuncte, welche auf der parabolischen Asymptote liegen, unendlich weit sich entfernen, vereinigen sie sich mit den vier schon unendlich weit liegenden Durchschnittspuncten dieser Asymptote und der Curve dritter Ordnung. Diese wird von jener auf einer unendlich weit entfernten geraden Linie sechspunctig osculirt und aufserdem also in keinem Puncte mehr von derselben geschnitten.

192. Wir können auch hier wiederum nach denjenigen Relationen fragen, welche den, in den beiden letzten Nummern entwickelten, in dem allgemeinen Falle der Curve dritter Ordnung und mit drei geradlinigen Asymptoten entsprechen. Irgend zwei dieser drei Asymptoten müssen wir hierbei nothwendig als zusammengehörig betrachten, weil immer nur zwei derselben zugleich unendlich weit fortrücken und immer nur zwei zugleich imaginär werden.

Wir haben früher nachgewiesen, dafs es, unter den unendlich vielen hyperbolischen Asymptoten, an denen zwei Paare unendlicher Zweige einer Curve sich hinziehen, immer eine gibt, welche zwei dieser Zweige, die dieselbe geradlinige Asymptote haben, in unendlicher Entfernung dreipunctig osculirt. Wenn eine parabolische Asymptote an die Stelle der hyperbolischen tritt, so fallen die beiden Asymptoten der letztern in unendlicher Entfernung zusammen, und mit ihnen also auch der auf einer derselben liegende Osculations- und der auf der andern liegende blofse Berührungspunct, und bilden, in diesem Sinne, eine fünfpunctige Osculation. Die Ordnung der Annäherung der Curve an die beiden Zweige der fünfpunctig osculirenden parabolischen Asymptote ist dieselbe; die den Durchmessern derselben parallele Linie S schneidet weder den einen noch den andern dieser beiden Zweige vorzugsweise. Während aber, bei dem Fortrücken der parabolischen Asymptote, die Linie S durch diese Richtung hindurchgeht, schneidet sie vorher den einen und nachher den andern Zweig: vorher nähert sich also die Curve dem einen Zweige mehr und nachher mehr dem andern; indem sie, um mich so auszudrücken, das Bestreben hat, mit demselben eine dreipunctige Osculation zu bilden, die erst in unendlicher Entfernung Statt findet, wo sich dann aber zugleich auch, wie oben schon bemerkt worden ist, mit dem Osculationspuncte der Berührungspunct auf dem jedesmaligen andern Zweige vereint.

Es gibt ferner, im Allgemeinen, keine Hyperbel, welche mit einer Curve dritter Ordnung zugleich auf zwei ihrer Asymptoten einen dreipunctigen Contact hat, sondern dieſs findet nur bei einer besondern Art dieser Curven, nemlich bei solchen nur Statt, deren dritte Asymptote eine osculirende ist (170). Hiermit vollkommen in Uebereinstimmung, haben nur solche Curven mit parabolischen Asymptoten, unter diesen eine sechspunctig osculirende, deren geradlinige Asymptote ebenfalls eine osculirende ist. Bei einem schicklichen Verschieben der parabolischen Asymptote, entfernt sich alsdann nemlich einer ihrer Durchschnittspuncte mit der immer parallel mit sich selbst bleibenden Linie S, und also auch mit der Curve dritter Ordnung, auf jedem ihrer Zweige immer weiter; die Curve

hat

hat alsdann das Bestreben, auf jedem Zweige eine dreipunctige Osculation zu bilden, die aber erst dann Statt findet, wenn zugleich beide Osculationspuncte auf einer unendlich weit entfernten geraden Linie sich vereinigen.

193. Um die Lage der durch die Gleichung:

$$p(q^2+\lambda r)+\mu s = 0,$$

dargestellten Curven dritter Ordnung in Beziehung auf ihre Asymptoten zu erkennen, brauchen wir wiederum nur zu berücksichtigen, dafs μ einen constanten Coefficienten bedeutet, und also, in Beziehung auf alle möglichen Puncte einer und derselben Curve, der Werth des Ausdrucks:

$$\frac{p(q^2+\lambda r)}{s},$$

immer dasselbe Zeichen erhalten mufs. Das Zeichen der Werthe für die drei Functionen p, s und $(q^2+\lambda r)$ ändert sich aber jedesmal dann, wenn derjenige Punct, auf welchen diese Functionen bezogen werden, bezüglich die Asymptote P, die Linie S und die der letzten Function entsprechende, parabolische Asymptote überschreitet. Es kann sich also die Curve nicht zugleich in solchen zwei, von diesen drei Oertern gebildeten Flächenräumen erstrecken, welche von der Art sind, dafs man, um von einem derselben zu dem andern zu gelangen, einmal oder dreimal die obigen drei Oerter überschreiten mufs. Wenn die Parabel von jeder der beiden geraden Linien in reellen Puncten geschnitten wird, so beträgt die Anzahl der Flächenräume, die alsdann entstehen, neun, und die Curve erstreckt sich entweder nur in fünf derselben oder nur in den vier übrigen. Betrachten wir insbesondere zwei solche Puncte, welche auf den beiden parabolischen Zweigen weit genug entfernt liegen, so begegnet eine gerade Linie, die von dem einen dieser beiden Puncte nach dem andern gezogen wird, offenbar keiner der beiden geraden Linien, und begegnet also auch der Parabel entweder gar nicht oder in zwei Puncten. Hieraus folgt, dafs sich die Curve dritter Ordnung, an den beiden Zweigen ihrer parabolischen Asymptote, entweder beide Male auf der innern oder beide Male auf der äufsern Seite hinzieht. Diese Bestimmung besteht auch dann, wenn nur eine der beiden geraden Linien P und S, oder wenn keine derselben der Parabel wirklich begegnet, und demnach die Zahl der Flächenräume sich auf sieben oder fünf reducirt. Es tritt eine Aenderung nur dann ein, wenn die Linie S ein Durchmesser der Parabel wird. Dann schneidet nemlich diejenige gerade Linie, welche, wie oben, irgend zwei Puncte, die auf den beiden parabolischen Zweigen der Curve weit genug entfernt liegen, verbindet, die Linie S, nicht aber die Asymptote P, und mufs also der Parabel nothwendig in einem einzigen Puncte begegnen; hieraus sehen wir, dafs alsdann ein unendlicher Zweig der Curve sich an der äufsern und ein andrer an der innern Seite der Parabel hinziehen. Wenn die Linie S unendlich weit liegt, so tritt, in Beziehung auf die Lage der parabolischen Zweige der Curve gegen ihre Asymptote, wiederum der allgemeine Fall ein.

Eine Curve mit parabolischen Asymptoten nähert sich einer beliebigen derselben, im Allgemeinen, entweder beide Male auf der innern oder beide Male auf der äufsern Seite derselben. Verrückt man diese parabolische Asymptote parallel mit sich selbst, so nähert sie sich der Curve immer mehr bis zu einer Gränze, bei welcher ein Zweig dieser Asymptote auf die entgegengesetzte Seite der Curve hinübertritt. Ueber diese Gränze hinaus rückt auch der zweite Zweig der Parabel auf die entgegengesetzte Seite der Curve, und es ziehen sich also nun die beiden parabolischen Zweige der Parabel beide Male an der

äufsern oder innern Seite ihrer Asymptote hin, je nachdem sie früher, umgekehrt, beide Male an der innern oder äufsern Seite sich hinzogen.

Eine Ausnahme von der allgemeinen Regel findet bei der in dem Obigen bestimmten Unterabtheilung von Curven der in Rede stehenden Art Statt. Es treten alsdann, bei der-eben bezeichneten Gränze, die Zweige der parabolischen Asymptote, die alsdann eine sechspunctig osculirende wird, beide zugleich auf die andere Seite der Curve hinüber.

194. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, in Beziehung auf die Ordnung der Annäherung der fraglichen Curven an ihre parabolischen Asymptoten, in einige analytische Erörterungen einzugehen. Der Ausdruck:

$$q^2+\lambda r \equiv \lambda(r+\frac{1}{\lambda}q^2),$$

bedeutet, wenn wir denselben auf irgend einen beliebigen Punct beziehen, den Abstand dieses Punctes von der durch die Gleichung:

$$q^2+\lambda r = 0,$$

dargestellten Parabel, genommen auf einem Durchmesser dieser letztern und multiplicirt mit einem constanten Coefficienten. Die allgemeinste Gleichung der Curven dritter Ordnung mit parabolischen Asymptoten gibt aber für alle Puncte der Curve

$$q^2+\lambda r = -\frac{\mu s}{p} = \mu'\frac{r+cq+d}{r+aq+b},$$

indem wir p und s als Functionen von q und r betrachten. Wenn wir die Werthe von q und r immer gröfser annehmen, so mufs, wenn der erste Theil der vorstehenden Gleichung einen endlichen Werth behalten soll, das Verhältnifs $\frac{q}{r}$ sich der Gränze Null nähern. Für diese Gränze erhalten wir also, im Allgemeinen,

$$q^2+\lambda r = \mu'.$$

Die Curve dritter Ordnung nähert sich also ihrer Asymptote, wenn wir diese Annäherung nach der Richtung der Durchmesser der letztern bestimmen, im Allgemeinen, nur bis zu einer bestimmten endlichen Gränze. Ob die beiden Constanten c und a Null sind oder nicht, hat hierbei durchaus keinen Einfluſs, und aus diesem Grunde sind, in Beziehung auf den Grad der fraglichen Annäherung, die beiden Gleichungen (4) und (7) von derselben Allgemeinheit.

Legen wir aber unseren Betrachtungen die Gleichung II, a. zu Grunde, so kommt für immer weiter auf den beiden parabolischen Zweigen sich entfernende Puncte:

$$0 = q^2+\lambda p = -\frac{\mu(q+\sigma)}{p+\varkappa} = -\frac{\mu q}{p} = \frac{\lambda\mu}{q} = 0,$$

und wenn endlich an die Stelle der letztgenannten Gleichung die Gleichung (13) tritt, so ergibt sich:

$$0 = q^2+\lambda p = -\frac{\mu}{p+\varkappa} = -\frac{\mu}{p} = \frac{\lambda\mu}{q^2} = 0.$$

Bezeichnen wir ferner denjenigen Zuwachs, den q, für einen gegebenen Werth von r, bei dem Uebergange von der parabolischen Asymptote der Curve zu dieser Curve selbst, erhält, durch β, so dafs also, in dem allgemeinsten Falle:

$$q^2+\lambda r = 0,$$

$$(q+\beta)^2+\lambda r = -\frac{\mu s}{p},$$

so ergibt sich, wenn wir β^2 vernachlässigen:

$$\beta = -\frac{1}{2q}.\frac{\mu s}{p}.$$

β verschwindet also für sich immer weiter auf den parabolischen Zweigen der Curve entfernende Puncte. Für die Gränze erhalten wir in den drei oben discutirten Fällen:

$$\beta = \frac{\mu'}{2q} = 0, \qquad \beta = \frac{\lambda\mu}{2q^2} = 0, \qquad \beta = \frac{\lambda\mu}{2q^3} = 0.$$

Hiernach gelangen wir zu einer deutlichen Uebersicht der verschiedenen Ordnungen der Annäherung der parabolischen Zweige einer Curve dritter Ordnung an ihre Asymptoten. Diese Ordnung steigt in demselben Maafse, wenn wir nach einander die Annäherung an eine gewöhnliche, an eine fünfpunctig und an eine sechspunctig osculirende parabolische Asymptote betrachten. Wollen wir diese Annäherungen mit derjenigen einer Curve an eine geradlinige Asymptote vergleichen, so müssen wir erwägen, dafs, wenn wir auf einem Zweige einer Parabel unendlich weit gehen, $p = \infty$ wird, und umgekehrt; dafs ferner aber q^2 von derselben Ordnung ist als p und folglich erst $\frac{1}{q^2}$ ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist. Hieraus ist ersichtlich, dafs die Annäherung einer Curve an eine fünfpunctig osculirende Parabel erst von derselben Ordnung ist als die Annäherung an eine gewöhnliche geradlinige Asymptote, und dafs, wenn wir die Annäherung an die Parabel insbesondere nach der Richtung ihrer Durchmesser bestimmen, bei gleicher Ordnung der Annäherung, diese Parabel sogar eine sechspunctig osculirende sein mufs. Eine Curve dritter Ordnung kann sich einer parabolischen Asymptote, unter keiner Voraussetzung, in demselben Grade annähern, als einer osculirenden geradlinigen oder einer dreipunctig osculirenden hyperbolischen. Hier nemlich ist die Annäherung von der zweiten Ordnung, während, wenn wir diese Ordnung für den Fall einer sechspunctig osculirenden parabolischen Asymptote durch eine Zahl ausdrücken wollen, wir für diese $1\frac{1}{2}$ erhalten. Denken wir uns eine Curve, deren zwei Zweigen-Paare an einer hyperbolischen Asymptote sich hinziehen, in eine andere mit zwei parabolischen (je nach der Art der hyperbolischen Annäherung osculirenden oder nicht osculirenden) Zweigen umgestaltet, so reducirt sich die Summe der Ordnungs-Exponenten der doppelten Annäherung um Eins.

Es bedarf wohl hiernach kaum einer besondern Erwähnung, dafs, wenn von einer fünf- und sechspunctigen parabolischen Osculation die Rede ist, wir dadurch keineswegs die Ordnung der Annäherung, sondern nur die Anzahl der in unendlicher Entfernung zusammenfallenden Puncte bezeichnen wollen, und dafs dieses Zusammenfallen von Puncten im Unendlichen wiederum nur ein geometrischer Ausdruck ist, welcher, der Analogie nach, einer analytischen Gränz-Betrachtung angepafst ist.

195. Das Haupt-Resultat, zu dem wir in den letzten Nummern gelangt sind, ist hiernach, dafs die Curven dritter Ordnung mit parabolischen Asymptoten, in Beziehung auf diese, eine zwiefache Unterscheidung zulassen. In dem ersten und allgemeinen Falle befindet sich unter den unendlich vielen parabolischen Asymptoten eine fünfpunctig osculirende, in dem zweiten und untergeordneten Falle ist diese nicht eine blofs fünf-, sondern sechspunctig osculirende. Die allgemeine Gleichung, die dem ersten Falle entspricht, ist:

$$p\{q^2 + \lambda r) + \mu s = 0,$$

und die dem zweiten Falle entsprechende:

$$p\{q^2 + \lambda r) + \mu(p + \varkappa) = 0.$$

Aber diese Gleichungen enthalten eine überzählige Anzahl von Constanten, so dafs wir,

bei einer neuen Constanten-Bestimmung, nicht nothwendig eine neue Curve erhalten. Die folgenden beiden Gleichungen:

$$(p+\varkappa)\{q^2+\lambda p\}+\mu(q+\sigma) = 0,$$
$$(p+\varkappa)\{q^2+\lambda p\}+\mu = 0,$$

in welchen die Anzahl der Constanten auf die nothwendige, bezüglich auf acht und sieben, reducirt ist, bieten zugleich den Vorzug dar, dafs die in dem ersten Falle fünf- und im zweiten Falle sechspunctig osculirende parabolische Asymptote in Evidenz tritt.

196. Wir wollen uns nun zu dem dritten Falle wenden, in welchem die Gleichung der Curven dritter Ordnung auf unendlichmalige Weise die Form I. annehmen kann. Diefs setzt voraus, dafs diese Form sich folgender Gestalt particularisirt:

$$pq(q+\gamma)+\mu s = 0, \qquad (1)$$

und dann läfst sich dieselbe, nach dem ersten Paragraphen, auch in die nachstehende umwandeln:

$$p(q+\varkappa)(q-\varkappa)+\mu(q+\sigma) = 0. \qquad \text{III.}$$

Die Function p bleibt bei diesen Umwandlungen identisch dieselbe, die bezügliche gerade Linie P ist eine unwandelbare, und, wie man sogleich sieht, eine Asymptote der Curve.

Die Gleichung (1) gibt:

$$q = -\frac{\mu s}{p(q+\gamma)}.$$

Die beiden Theile dieser Gleichung müssen, wenn die gerade Linie Q ebenfalls eine Asymptote der Curve sein soll, beide zugleich auf Null sich reduciren. Diefs geschieht aber nur dann, wenn s, das im Allgemeinen jede beliebige ganze und lineare Function von p und q sein kann, von p unabhängig wird, das heifst, wenn:

$$s \equiv q+\sigma,$$

und also, da σ irgend eine Constante bedeutet, die beiden geraden Linien S und Q parallel sind. Legen wir also die Form III. zu Grunde, so tritt uns aus derselben sogleich entgegen, dafs die Gleichungen:

$$p = 0, \qquad q+\varkappa = 0, \qquad q-\varkappa = 0,$$

die drei Asymptoten der Curve darstellen, und dafs zwei dieser drei Asymptoten parallel sind. Die Annnäherung an jede dieser beiden parallelen Asymptoten ist, wie die Annäherung an die dritte Asymptote, von der ersten Ordnung; man hat nemlich:

$$0 = q \pm \varkappa = -\frac{\mu(q+\sigma)}{p(q\mp\varkappa)} = \pm\frac{\mu(\sigma-\varkappa)}{2\varkappa p} = 0. \qquad (2)$$

197. Wenn es überhaupt irgend eine gerade Linie (S) gibt, welche einer gegebenen Curve dritter Ordnung in drei Puncten begegnet, durch die sich solche drei andere gerade Linien (P, Q und R) legen lassen, welche aufserdem der Curve in keinem Puncte mehr begegnen, weil alle sonstigen Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, so knüpft sich an diese Bedingung jedesmal die Möglichkeit an, dafs die Gleichung der fraglichen Curve dritter Ordnung die Form I. annehmen kann. Für den vorliegenden Fall gibt es unendlich viele solcher Systeme von vier geraden Linien, und also kann auch die Gleichung der Curve auf unendlichmalige Weise die eben angezeigte Form annehmen. Denn es schneidet die Asymptote P die Curve nur in einem einzigen Puncte; dasselbe thut aber auch, was ein Blick auf die Gleichung III. sogleich zeigt, jede gerade Linie, die parallel mit den beiden parallelen Asymptoten ist. Legen wir also durch jenen festen Durchschnittspunct der Asymptote P mit der Curve irgend eine beliebige gerade Linie (S), welche die Curve noch in irgend zwei Puncten schneidet, und legen dann, durch diese beiden Durchschnittspuncte, zwei gerade Linien (Q und R) parallel mit den beiden parallelens Aymptoten, so

erhalten wir ein System vier gerader Linien von der fraglichen Beziehung zur Curve. Wir können die Linie S um den festen Durchschnittspunct auf der Asymptote P beliebig drehen; alsdann rücken die beiden letzten jener vier geraden Linien (Q und R) parallel mit sich selbst fort, bis sie, wenn die Linie S den beiden parallelen Asymptoten parallel wird, mit diesen Asymptoten zusammenfallen.

198. Ein untergeordneter Fall ist derjenige, wo die gerade Linie:

$$q+\sigma = 0, \tag{3}$$

parallel mit sich selbst immer weiter fortgerückt ist. Indem alsdann in der Gleichung III. an die Stelle des letzten Gliedes eine blofse Constante tritt, particularisirt sich dieselbe auf folgende Weise:

$$p(q+\varkappa)(q-\varkappa)+\mu = 0. \tag{4}$$

Durch die in Rede stehende Umformung verwandelt sich die Asymptote P in eine osculirende. Aber es bleibt hierbei die Ordnung der Annäherung der Curve an ihre beiden übrigen, einander parallelen, Asymptoten unverändert dieselbe. Die gerade Linie (3), welche an die Stelle der Linie S getreten ist, schneidet die Curve nur in unendlich weit entfernten Puncten auf den beiden ihr parallelen Asymptoten, so dafs, mit diesen Durchschnittspuncten, auch dann keine neuen sich vereinigen, wenn die genannte gerade Linie unendlich weit rückt. Die Ordnung der Annäherung steigt hier eben so wenig, als bei dem Contacte auf einer osculirenden Asymptote, wenn die ihr parallele Linie S unendlich weit rückt. Wir finden diese Bemerkungen übrigens unmittelbar bestätigt; denn wir erhalten, wenn wir, statt der Gleichung III., die Gleichung (4) zu Grunde legen, für die unendlich weit entfernten Puncte auf dem, an den parallelen Asymptoten sich hinziehenden Zweige der Curve:

$$0 = q \pm \varkappa = -\frac{\mu}{p(q \mp \varkappa)} = \pm\frac{\mu}{2\varkappa p} = 0.$$

199. Die beiden parallelen Asymptoten einer Curve dritter Ordnung können sowohl imaginär als reell sein. In dem Falle imaginärer Asymptoten können wir an die Stelle der Gleichungen III. und (4) die folgenden setzen:

$$p\{q^2+\vartheta^2\}+\mu(q+\sigma) = 0, \tag{5}$$

$$p\{q^2+\vartheta^2\}+\mu = 0. \tag{6}$$

Während zwei zusammengehörige imaginäre gerade Linien überhaupt in irgend einem reellen Puncte sich schneiden, entfernt sich dieser Punct in dem Falle, dafs jene beiden Linien parallel sind, nach bestimmter Richtung unendlich weit *). Indem also eine Curve dritter Ordnung von der allgemeinsten Art und mit imaginären Asymptoten in eine Curve der fraglichen besondern Art sich umformt, rückt ihr Asymptotenpunct immer weiter.

---

*) Es seien:

$$m+n\sqrt{-1} = 0, \qquad m-n\sqrt{-1} = 0, \tag{a}$$

die Gleichungen zweier zusammengehörigen imaginären geraden Linien; alsdann wird der reelle Punct, in welchem diese Linien sich schneiden, durch die beiden reellen geraden Linien:

$$m = 0, \qquad n = 0,$$

bestimmt. Wenn dieser Durchschnittspunct unendlich weit liegen soll, so müssen die letztgenannten beiden geraden Linien parallel sein, wonach, indem wir durch c irgend eine Constante bezeichnen,

$$m \equiv n+c.$$

Als Folge hiervon gehen die beiden Gleichungen (a) in die nachstehenden beiden:

$$n(1+\sqrt{-1})+c\sqrt{-1} = 0, \qquad n(1-\sqrt{-1})-c\sqrt{-1} = 0,$$

und diese wiederum in die folgenden über:

$$(2n+c)+c\sqrt{-1} = 0, \qquad (2n+c)-c\sqrt{-1} = 0.$$

Auf diese Form können wir immer die Gleichungen zweier parallelen imaginären geraden Linien bringen.

Die Asymptote P ist in dem Falle der Gleichung (5) eine gewöhnliche, in dem Falle der Gleichung (6) eine osculirende.

200. Die Gränze zwischen reellen und imaginären parallelen Asymptoten bildet das Zusammenfallen derselben, und ihr entspricht die Gleichung:

$$pq^2 + \mu(q + \varkappa) = 0, \qquad (7)$$

die sich, für den untergeordneten Fall, dafs die Asymptote P in eine osculirende übergeht, noch folgender Gestalt particularisirt:

$$pq^2 + \mu = 0. \qquad (8)$$

Durch das Zusammenfallen der beiden parallelen Asymptoten erleidet die Ordnung der Annäherung der Curve an dieselben eine Reduction, die gleichmäfsig bei beiden vorstehenden Fällen Statt findet. Wenn wir nemlich die Gleichung (7) auf folgende Weise schreiben:

$$q^2 = -\frac{\mu(q + \varkappa)}{p},$$

so müssen wir, damit die beiden Theile dieser Gleichung zugleich verschwinden, zugleich $q = 0$ und $p = \infty$ setzen. Dadurch wird aber erst q^2 ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, wonach die Ordnung der Annäherung der Curve an ihre zusammenfallenden geradlinigen Asymptoten dieselbe ist, als, in dem Falle parabolischer Asymptoten, die Ordnung der Annäherung der Curve an einen Zweig einer beliebigen dieser Asymptoten.

Zugleich zeigt die letzte Gleichung, dafs für immer kleiner werdenden Werthe von q, die entsprechenden, immer gröfser werdenden Werthe von p ein bestimmtes und zwar mit $(\mu\varkappa)$ das entgegengesetzte Zeichen haben und behalten; dafs aber, umgekehrt, für diese Werthe von p, die entsprechenden Werthe von q die doppelten Zeichen zulassen. Zwei unendliche Zweige der Curve ziehen sich also an den zusammenfallenden Asymptoten nach derselben Richtung zu beiden Seiten derselben hin, in der Art, dafs sie in unendlicher Entfernung gleichsam eine Spitze bilden.

201. Nach den letzten Nummern wird also der allgemeine Fall, dafs die Curven dritter Ordnung zwei parallele Asymptoten haben, durch die Gleichung,

$$p\{q^2 \mp \vartheta^2\} + \mu(q + \sigma) = 0,$$

dargestellt. Das obere Zeichen in diesen Gleichungen bezieht sich auf den Fall reeller, das untere auf den Fall imaginärer Asymptoten. Dem Uebergange zwischen beiden entspricht der besondere Fall, dafs ϑ verschwindet und demnach die fraglichen beiden Asymptoten zusammenfallen.

Ein untergeordneter Fall ist derjenige, dafs die dritte Asymptote P eine osculirende ist, und demselben entspricht die Gleichung:

$$p\{q^2 \mp \vartheta^2\} + \mu = 0,$$

wo wiederum die Fälle reeller und imaginärer Asymptoten, in Beziehung auf Allgemeinheit, coordinirt sind, der besondere Fall aber, dafs ϑ verschwindet und diese Asymptoten zusammenfallen, diesen wiederum untergeordnet ist.

Im Ganzen erhalten wir hier also sechs Fälle, deren zwei von sieben, drei von sechs und einer von fünf Constanten abhängt.

202. Diejenigen Curven, welche durch die Gleichung:

$$p^3 + \lambda q^2 + \mu s = 0, \qquad (1)$$

dargestellt werden, haben weder eine gerade Linie noch eine Curve zweiter Ordnung zu ihrer Asymptote. Wir können blofs, unter diesen Curven selbst, die Curve von der einfachsten Art auswählen und dieselbe als Asymptote der übrigen betrachten. Diese Curve von der einfachsten Art wird durch die Gleichung:

$$p^3 + \lambda q^2 = 0, \qquad (2)$$

dargestellt, und ist die semicubische oder (zunächst für den Fall, dafs die beiden geraden Linien P und Q auf einander senkrecht stehen) die Neil'sche Parabel genannt worden. Die Curve (siehe die VI. Kupfertafel LV.) bildet im Durchschnitte der beiden Linien P und Q eine Spitze, deren beide Zweige sich zu beiden Seiten an die letztgenannte Linie Q anlegen. Jede dieser Linie parallele gerade Linie schneidet die Curve nur in einem einzigen reellen Puncte, die beiden andern Durchschnittspuncte sind imaginär. Jede beliebige der Linie P parallele gerade Linie begegnet der Curve nur in zwei reellen oder imaginären Puncten; weil der dritte Durchschnittspunct unendlich weit liegt; der geometrische Ort für die Mitte zwischen den beiden Durchschnittspuncten ist die Linie Q.

Es ist die durch die Gleichung (2) dargestellte semicubische Parabel nicht die einzige, welche eine Asymptote der Curve (1) ist, es gibt deren unendlich viele. Unter diesen zeichnet sich aber eine aus, die mit dieser Curve in unendlicher Entfernung einen mehrpunctigen Contact hat. Man erhält alle diese asymptotischen Curven und insbesondere auch die eben ausgezeichnete, wenn man eine derselben parallel mit sich selbst so verschiebt, dafs ihre Spitze auf der Linie P fortrückt. Statt aber die semicubische Parabel so weit zu verschieben, dafs sie in die fragliche ausgezeichnete Beziehung zur Curve (1) tritt, können wir auch, umgekehrt, diese Curve verrücken, und q um eine schickliche Constante so wachsen lassen, dafs ihre Gleichung die nachstehende Form annimmt:

$$p^3 + \lambda q^2 + \mu(p + \varkappa) = 0, \qquad \text{IV.}$$

von der wir schon im ersten Paragraphen nachgewiesen haben, dafs sie alle Curven dritter Ordnung von der in Rede stehenden Art darstellen kann. Die Linie S, welche im Allgemeinen die Curve in drei Puncten schneidet, ist in dem vorliegenden Falle, durch das blofse Fortrücken der Curve, der Linie P parallel geworden, der dritte Durchschnittspunct hat sich mit denjenigen vereinigt, die auf den beiden Zweigen der Asymptote (2) unendlich weit liegen.

Die Gleichung IV. gestattet, im Allgemeinen, keine neue Reduction der Constanten mehr; wenn wir annehmen, dafs ihr letztes Glied auf eine blofse Constante sich reducirt, so stellt die hiernach particularisirte Gleichung:

$$p^3 + \lambda q^2 + \mu = 0, \qquad (3)$$

eine untergeordnete Abtheilung von Curven der fraglichen Art dar. Bei der Umgestaltung der Curven IV. in die Curven (3) ist die, der Linie P parallele, Linie S unendlich weit gerückt; es haben sich die beiden noch übrigen Durchschnittspuncte der Curve mit ihrer Asymptote (2) zugleich mit den schon unendlich weit entfernten vereinigt. Soll die Gleichung (1) in die Gleichung (3), wie oben in die Gleichung IV. übergehen können, so darf die lineare Function s nicht p enthalten; die Linie S ist alsdann also immer der Linie Q parallel.

203. Wenn wir, nach einander, die Curven (1), IV. und (3) mit der semicubischen Parabel (2) zusammenstellen, so bemerken wir ohne Mühe eine steigende Ordnung der Annäherung. Zuerst nemlich ist klar, dafs, bei immer wachsenden Werthen von p und q, damit überhaupt die vorstehenden Gleichungen befriedigt werden können, nothwendig p^3 und q^2 von derselben Ordnung sein müssen. Bezeichnen wir ferner den Zuwachs, den p erleidet, wenn wir, bei einem immer gröfser angenommenen Werthe von q, von der semicubischen Parabel zu der Curve (1) übergehen, durch α und setzen überdiefs $s \equiv p + \gamma q + \delta$, so erhalten wir, zugleich mit (2) bestehend, die Gleichung:

$$(p + \alpha)^3 + \lambda q^2 + \mu(p + \gamma q + \delta) + \mu\alpha = 0.$$

Ziehen wir von derselben die Gleichung (2) ab und vernachlässigen constante Gröfsen und α gegen p und q, so kommt:

$$\alpha = -\frac{\mu\{p+\gamma q\}}{3p^2}. \qquad (4)$$

Wir erhalten also Null für den Gränzwerth von α, wodurch *a posteriori* die obige Vernachlässigung von α gerechtfertigt wird. Da p^3 erst von derselben Ordnung ist, als q^2, so erhalten wir für die fragliche Gränze noch eine neue Reduction, es ist

$$\alpha = -\frac{\mu\gamma q}{3p^2} = -\frac{\mu\gamma q}{3\lambda^{\frac{2}{3}}q^{\frac{4}{3}}} = -\frac{\mu\gamma}{3\lambda^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Für den Fall, dafs die Gleichung (1) in die Gleichung IV. übergeht, gibt die Gleichung (4)

$$\alpha = -\frac{\mu}{3p} = \frac{\mu}{3\lambda^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}} = 0;$$

und für den Fall der Gleichung (3) ergibt sich:

$$\alpha = -\frac{\mu}{3p^2} = -\frac{\mu}{3\lambda^{\frac{2}{3}}q^{\frac{4}{3}}} = 0.$$

Für die Gröfse α erhalten wir also, nach einander, ein unendlich Kleines von der Ordnung $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{3}$. In Beziehung auf das ungleichmäfsige Ansteigen dieser Ordnung verdient bemerkt zu werden, dafs beim Uebergange von den Curven (1) zu den Curven IV. nur ein Durchschnittspunct, mit der Asymptote (2), beim Uebergange von diesen Curven aber zu den Curven (3), zwei Durchschnittspuncte zugleich unendlich weit rücken.

Die Ordnung von α ist als die Ordnung der Annäherung der bezüglichen Curven in unendlicher Entfernung anzusehen. Denn, wenn wir auf der Curve eine unendlich grofse Strecke zurücklegen, so wird q ein unendlich Grofses derselben Ordnung (nicht aber p). Hiernach können wir die Ordnung der Annäherung der Curven (1), IV. und (3) an die semicubische Parabel mit der Ordnung der Annäherung der früher betrachteten Curven an ihre geradlinigen und parabolischen Asymptoten vergleichen. Wir sehen zum Beispiel, dafs diese Ordnung, bei einer gewöhnlichen parabolischen Asymptote, gröfser ist als in dem Falle der Curven (1) und niedriger, als in dem Falle der Curven IV.; dafs diese Ordnung bei einer gewöhnlichen geradlinigen Asymptote höher ist als in dem Falle der Curven IV. und geringer, als in dem Falle der Curven (3); und so weiter.

204. Der Ausdruck $(p^3+\lambda q^2)$ ändert nur dann sein Zeichen, wenn derjenige Punct, auf welchen er bezogen wird, die durch (2) dargestellte semicubische Parabel überschreitet. Wir müssen hiernach also, um von einem Puncte einer der fraglichen Curven zu einem andern Puncte derselben zu gelangen, weil μ sein Zeichen nicht ändern kann, nothwendig, wenn dabei die Curve (2) und die Linie S überhaupt überschritten werden, diese Oerter eine gerade Anzahl von Malen überschreiten. Erwägen wir ferner, dafs, wenn zwei Puncte weit genug auf den beiden Zweigen der semicubischen Parabel oder den sich ihr anschmiegenden Zweigen der Curven (1) fortrücken, jede gerade Linie, die nicht der Linie P (deren Richtung jene Curven, um so weiter sie sich erstrecken, immer mehr annehmen) parallel ist, zwischen solchen zwei Puncten hindurchgeht, so ist ersichtlich, dafs, im Allgemeinen, die beiden unendlichen Zweige der fraglichen Curven (1) sich an die semicubische Parabel (2) auf entgegengesetzter Seite derselben hinziehen. Wenn wir diese Parabel, um alle ähnlichen Asymptoten der Curven (1) zu erhalten, parallel mit sich selbst so verschieben, dafs ihre Spitze auf der Linie P bleibt, so gelangen wir zu einer Gränzlage dieser Curve, bei welcher ihre immer weiter sich erstreckenden Zweige auf die entge-

gegengesetzten Seiten der Zweige der Curve hinüberrücken. Dieser Gränzlage, bei welcher der Contact ein innigerer wird, entspricht, im Allgemeinen, dafs die Linie S der Linie P parallel ist und also die Curve ihrer Asymptote beide Male auf derselben Seite dieser letztern sich nähert.

In dem untergeordneten Falle, welchen wir oben ausgezeichnet haben, ändert sich, in Beziehung auf die gegenseitige Lage der Curven gegen ihre Asymptoten, durchaus nichts. Beim Verrücken einer dieser letztern bleibt die Linie S immer mit der Linie Q parallel; sie geht bei jener Gränzlage durchs Unendliche hindurch, in der Art, dafs sie vorher den einen und nachher den andern Zweig der Asymptote schneidet.

205. In den letzten Nummern haben wir drei neue Arten von Curven dritter Ordnung erhalten. Die semicubische Parabel:

$$p^3+\lambda q^2=0,$$

welche nur von fünf Constanten abhängt, ist die einfachste dieser Curven und bildet die eine dieser drei Arten, die wir deshalb den beiden andern voranstellen, weil sie diesen als Asymptote dient. Die allgemeinsten Gleichungen, welche diesen beiden andern Arten entsprechen, sind:

$$p^3+\lambda q^2+\mu s=0, \qquad p^3+\lambda q^2+\mu(q+\sigma)=0,$$

und diese lassen sich immer auf folgende Formen bringen, welche nur die nothwendige Anzahl von Constanten, nemlich bezüglich sieben und sechs, enthalten:

$$p^3+\lambda q^2+\mu(p+\varkappa)=0, \qquad p^3+\lambda q^2+\mu=0.$$

Wir bemerken zugleich, dafs die semicubische Parabel der besondern Annahme, dafs in der zweiten der letzten beiden Gleichungen μ gleich Null ist, entspricht.

206. Wir wenden uns zu dem neuen Falle, der durch die Form der nachstehenden Gleichung:

$$p(p^2+\lambda q)+\mu=0, \qquad \text{V.}$$

characterisirt wird. Aus dieser Form erkennen wir sogleich, dafs die bezügliche Curve die durch die Gleichung:

$$p^2+\lambda q=0, \qquad (1)$$

dargestellte Parabel und die gerade Linie:

$$p=0, \qquad (2)$$

die ein Durchmesser dieser Parabel ist, zu ihren Asymptoten hat. Die Linie S liegt unendlich weit; es schneidet die Curve V. keine der beiden Asymptoten. Die Ebene der Curve wird durch diese Asymptoten in vier unendliche Flächenräume getheilt, die Curve erstreckt sich nur in zwei derselben. Die unendlichen Zweige derselben nähern sich der geradlinigen Asymptote (2) auf deren beiden Seiten nach entgegengesetzter Richtung, und der parabolischen Asymptote (1) einmal auf ihrer innern und das andere Mal auf ihrer äufsern Seite. Newton hat diese Curve, die einzige, die dem fünften Falle entspricht, Trident genannt.

Wenn wir die durch (1) dargestellte Parabel nach der Richtung ihrer Durchmesser, parallel mit sich selbst, verschieben, so bleibt sie, in allen ihren Lagen, eine Asymptote der Curve. Geben wir, um irgend eine solche neue Asymptote in der Gleichung der Curve V. in Evidenz zu bringen, dieser, durch Einführung einer neuen unbestimmten Constanten σ, folgende Form:

$$p\{p^2+\lambda(q+\sigma)\}-(\lambda\sigma p-\mu)=0,$$

so ist ersichtlich, dafs alsdann die Linie S, deren Gleichung:

$$\lambda\sigma p-\mu=0,$$

statt, wie früher, unendlich weit zu liegen, nun eine der geradlinigen Asymptote P parallele gerade Linie ist. Als ein Durchmesser der neuen parabolischen Asymptote schneidet

sie diese und mithin auch die Curve dritter Ordnung, nur in einem einzigen Puncte. Wir überzeugen uns leicht, nach der nun öfter schon in Anwendung gebrachten Schlufsweise, dafs zwei Zweige der Curve V. entweder beide Male der neuen parabolischen Asymptote auf der innern, oder beide Male auf der äufsern Seite derselben sich annähern. Es ist also diese Beziehung ganz dieselbe, als in dem allgemeinen Falle parabolischer Asymptoten überhaupt (193).

Endlich ist klar, dafs die parabolische Asymptote (2), welche diejenige Gränze bezeichnet, bei welcher zwei Zweige der Curve V. auf die beiden entgegengesetzten Seiten der parabolischen Asymptote überhaupt hinübertreten — so jedoch, dafs, bei dieser Gränze selbst, ein Zweig schon hinübergetreten ist — mit der Curve einen innigern Contact hat. Was die Ordnung der Annäherung in diesem Falle betrifft, so gibt die Gleichung V.:

$$p^2+\lambda q = -\frac{\mu}{p},$$

woraus wir sehen (194), dafs diese Ordnung dieselbe ist, als bei der Annäherung parabolischer Curven dritter Ordnung überhaupt an ihre einfach (fünfpunctig) osculirenden parabolischen Asymptoten.

Wir können die Gleichung V. durch Einführung dreier unbestimmten Coefficienten auch auf folgende Form bringen:

$$(p+\varkappa)\{(p+\tau)^2+\lambda(q+\sigma)\}+\mu's' = 0,$$

vorausgesetzt jedoch, dafs zwischen den beiden Constanten $\varkappa$ und τ die folgende Relation besteht: $\varkappa+2\tau = 0.$

Hieraus ist ersichtlich, dafs, wenn wir eine parabolische Asymptote parallel mit sich selbst, nach beliebiger Richtung fortrücken, sie der Trident-Curve, in allen ihren Lagen, nie in mehr als in zwei Puncten begegnet. Wir können die gerade Linie S' ganz beliebig annehmen und dann der Gleichung der fraglichen Curve immer noch folgende Form geben:

$$(p+\varkappa)(p^2+\lambda q)+\mu's' = 0.$$

In einer solchen Gleichung tritt aber keine parabolische Asymptote mehr in Evidenz.

207. Zwischen dem Falle, mit welchem wir uns in der vorigen Nummer beschäftigt haben, und dem Falle parabolischer Asymptoten überhaupt, findet eine analoge Beziehung Statt, als zwischen dem Falle paralleler Asymptoten und dem Falle dreier geradliniger Asymptoten überhaupt. In dem Falle der vorigen Nummer begegnet die geradlinige Asymptote der Curve gar nicht, weil alle drei Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, ohne deshalb eine osculirende zu sein; jede ihr parallele gerade Linie begegnet der Curve nur einmal, ohne deshalb eine Asymptote zu sein. Eine Parabel kann die Curve nur in zwei Puncten schneiden, weil die vier übrigen Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, und sie ist deshalb doch keine Asymptote derselben; eine parabolische Asymptote überhaupt schneidet die Curve nur in einem einzigen Puncte, weil alle übrigen unendlich weit liegen, ohne sie deshalb zu osculiren; die osculirende Asymptote begegnet ihr gar nicht in endlicher Entfernung, ohne dafs deshalb die Annäherung von der höchstmöglichen Ordnung ist. Diese Anomalien finden darin ihre Erklärung, dafs geometrische Relationen, wenn sie durch Gränz-Betrachtungen ins Unendliche gerückt werden, dadurch ihre Bestimmtheit verlieren können. Häufig entsprechen analytischen Form-Aenderungen in der geometrischen Deutung Uebergänge, die, ohne Widersprüche, im Endlichen nicht Statt finden könnten.

208. Es bleibt uns jetzt nur noch der letzte Fall zu betrachten übrig, dem die nachstehende Gleichung entspricht:

$$p^3 + \lambda q = 0. \qquad \text{VI.}$$

Aus der einfachen Form dieser Gleichung erkennt man unmittelbar den Lauf und die Natur der bezüglichen Curve, welche Newton die cubische Parabel nennt. Es hat dieselbe weder eine gerade Linie noch irgend eine Curve zweiter Ordnung zu ihrer Asymptote. Es kann auch, wenn wir die Curven dritter Ordnung nicht ausschliefsen, die cubische Parabel nur eine zweite cubische Parabel zur Asymptote haben, und es kann diese zweite keine andere sein, als die ursprüngliche selbst, parallel verschoben nach der Richtung der geraden Linie: $p = 0$.

209. Zum Schlusse dieses Paragraphen wollen wir die verschiedenen Fälle, die uns in dem Vorstehenden, bei der Discussion der allgemeinen Gleichung des dritten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen, entgegengetreten sind, übersichtlich zusammenstellen. In dieser Zusammenstellung bedeuten p, q, r und s reelle lineare und ganze Functionen mit zwei unbestimmten Coefficienten. Wir können etwa die beiden letzten derselben auch als solche lineare Functionen der beiden ersten betrachten, und demgemäfs zum Beispiel $r \equiv p + aq + b$ und $s \equiv p + cq + d$ setzen und dann die beiden ersten Functionen namentlich auch als Parallel-Coordinaten construiren, wodurch, so lange wir die Annahme der beiden Axen keiner Beschränkung unterwerfen, der Allgemeinheit kein Abbruch geschieht. Die griechischen Buchstaben bedeuten überall unbestimmte Coefficienten.

I. 1. Curven mit drei reellen geradlinigen Asymptoten, von neun Constanten abhängig. Formen der allgemeinen Gleichung:

$$pqr + \mu s = 0,$$
$$p(u^2 - \gamma^2 v^2) + \mu s = 0.$$

2. Curven mit drei reellen geradlinigen Asymptoten, unter welchen eine osculirende sich befindet. Die Linie S ist dieser Linie parallel. Anzahl der Constanten: acht. Formen der allgemeinen Gleichung:

$$pqr + \mu(p + \varkappa) = 0,$$
$$p(u^2 - \gamma^2 v^2) + \mu(p + \varkappa) = 0.$$

3. Curven mit drei osculirenden reellen geradlinigen Asymptoten. Die Linie S liegt unendlich weit. Anzahl der Constanten: sieben. Formen der allgemeinen Gleichung:

$$pqr + \mu = 0,$$
$$p(u^2 - \gamma^2 v^2) + \mu = 0.$$

4. Curven mit zwei imaginären geradlinigen Asymptoten, die sich in einem reellen Puncte, dem Asymptotenpuncte, schneiden, und mit einer reellen geradlinigen Asymptote. Anzahl der Constanten: neun. Allgemeine Gleichung:

$$p(u^2 + \gamma^2 v^2) + \mu s = 0.$$

5. Curven mit zwei imaginären, in einem reellen Puncte sich schneidenden, und mit einer osculirenden reellen geradlinigen Asymptote. Die Linie S ist dieser letztern parallel. Anzahl der Constanten: acht. Allgemeine Gleichung:

$$p(u^2 + \gamma^2 v^2) + \mu(p + \varkappa) = 0.$$

6. Curven mit zwei imaginären, in einem reellen Puncte sich schneidenden, und mit einer osculirenden reellen geradlinigen Asymptote. Die Linie S liegt unendlich weit. Anzahl der Constanten: sieben. Allgemeine Gleichung:

$$p(u^2 + \gamma^2 v^2) + \mu = 0.$$

II. 7. Curven mit einer geradlinigen Asymptote und mit parabolischen Asymptoten, unter welchen eine einfach osculirende sich befindet. Betrachten wir diese letztere, so wird die Linie S ein Durchmesser derselben. Anzahl der Constanten: acht. Allgemeine Gleichung:

$$(p+\varkappa)\{q^2+\lambda p\}+\mu(q+\sigma)=0.$$

8. Curven mit einer osculirenden geradlinigen Asymptote und mit parabolischen Asymptoten, unter welchen eine nach höchster Ordnung osculirende sich befindet. Die Linie S ist überhaupt der geradlinigen Asymptote parallel, insbesondere aber liegt sie, wenn wir die osculirende parabolische Asymptote betrachten, unendlich weit. Anzahl der Constanten: sieben. Allgemeine Gleichung:

$$(p+\varkappa)\{q^2+\lambda p\}+\mu=0.$$

III. 9. Curven mit drei reellen geradlinigen Asymptoten, unter welchen zwei parallel sind. Mit diesen letztern ist noch die Linie S parallel. Anzahl der Constanten: sieben. Allgemeine Gleichung: $p(q^2-\vartheta^2)+\mu(q+\sigma)=0.$

10. Curven mit drei reellen geradlinigen Asymptoten, unter welchen zwei parallel sind und die dritte eine osculirende ist. Die Linie S liegt unendlich weit. Anzahl der Constanten: sechs. Allgemeine Gleichung:

$$p(q^2-\vartheta^2)+\mu=0.$$

11. Curven mit einer reellen und zwei imaginären, einander parallelen, geradlinigen Asymptoten. Der Asymptotenpunct liegt nach der (reellen) Richtung der beiden imaginären Asymptoten, mit denen auch die Linie S parallel ist, unendlich weit. Anzahl der Constanten: sieben. Allgemeine Gleichung:

$$p(q^2+\vartheta^2)+\mu(q+\vartheta)=0.$$

12. Curven mit einer osculirenden reellen geradlinigen Asymptote und zwei imaginären einander parallelen. Der Asymptotenpunct liegt nach der Richtung dieser letztern unendlich weit. Die Linie S liegt unendlich weit. Anzahl der Constanten: sechs. Allgemeine Gleichung: $p(q^2+\vartheta)+\mu=0.$

13. Curven mit drei geradlinigen Asymptoten, von welchen zwei in eine einzige gerade Linie zusammenfallen. Die Linie S ist dieser geraden Linie parallel. Anzahl der Constanten: sechs. Allgemeine Gleichung:

$$pq^2+\mu(q+\sigma)=0.$$

14. Curven mit drei geradlinigen Asymptoten, von welchen zwei in eine einzige gerade Linie zusammenfallen und die dritte eine osculirende ist. Die Linie S liegt unendlich weit. Anzahl der Constanten: fünf. Allgemeine Gleichung:

$$pq^2+\mu=0.$$

IV. 15. Die semicubische Parabel, die von fünf Constanten abhängt, und deren Gleichung: $p^3+\lambda q^2=0.$

16. Curven, welche semicubische Parabeln zu Asymptoten haben, unter welchen eine einfach osculirende sich befindet. Betrachten wir diese letztere, so ist die bezügliche Linie S eine derjenigen Chorden der Parabel, welche von der Tangente in ihrer Spitze halbirt werden. Anzahl der Constanten: sieben. Allgemeine Gleichung:

$$p^3+\lambda q^2+\mu(p+\varkappa)=0.$$

17. Curven, welche semicubische Parabeln zu Asymptoten haben, unter welchen sich eine nach höchster Ordnung osculirende befindet. Die Linie S ist, im Allgemeinen, der Tangente in der Spitze der parabolischen Asymptote parallel, und liegt, wenn wir für diese die osculirende nehmen, unendlich weit. Anzahl der Constanten: sechs. Allgemeine Gleichung: $p^3+\lambda q^2+\mu=0.$

V. 18. Die Trident-Curve mit einer geradlinigen Asymptote und solchen parabolischen Asymptoten, die jene zu einem ihrer Durchmesser haben. Unter den parabolischen Asymptoten befindet sich eine einfach osculirende. Im Allgemeinen ist die Linie S eben-

falls ein Durchmesser der parabolischen Asymptote, liegt aber, wenn wir für diese die osculirende nehmen, unendlich weit. Anzahl der Constanten: sechs. Allgemeine Gleichung:

$$p(p^2+\lambda q)+\mu = 0. \text{ *)}$$

VI. 19. Die cubische Parabel, die von fünf Constanten abhängt, und deren Gleichung:

$$p^3+\lambda q = 0.$$

210. Die neunzehn verschiedenen Fälle, welche wir in der vorigen Nummer zusammengestellt haben, reduciren sich, wenn wir einerseits die beiden Fälle 5. und 6. und andrerseits die drei Fälle 15., 16. und 17. in einen einzigen zusammenziehen, auf die sechszehn von Euler, im 9. Kapitel des zweiten Bandes seiner „Einleitung in die Analysis des Unendlichen", aufgestellten Arten von Curven dritter Ordnung. Das Euler'sche Eintheilungs-Princip scheint keinesweges so absolut bestimmt, als am angeführten Orte §. 236. behauptet wird; mir scheint, um meine eigene Meinung auszusprechen, dafs von einem Eintheilungs-Principe da eigentlich keine Rede sein könne, wo es nur zwei coordinirte Fälle gibt, welche beide in der allgemeinen Gleichung I. enthalten sind, dafs nemlich die Asymptoten der Curven dritter Ordnung entweder alle drei reell oder zwei derselben imaginär sind, und wo alle übrigen Fälle blofs allmälig sich abstufende Unterarten oder Abarten von Curven dritter Ordnung bezeichnen. Die geradlinigen Asymptoten werden in untergeordneten Fällen durch krummlinige vertreten; soll man, wie Euler es thut, nur bei jenen nicht, aber bei diesen eine verschiedene Ordnung der Annäherung unterscheiden? Wenn wir blofs die Curven der dritten Ordnung mit parabolischen Asymptoten betrachten, so erhalten wir indefs keine neue Art von Curven, gleichviel, ob wir auch auf die letzte Unterscheidung Rücksicht nehmen oder nicht. Soll man diese Unterscheidung der Ordnung der Annäherung auch dann noch machen, wenn nur eine einfachere Curve der dritten Ordnung selbst als Asymptote sich darstellt? Die Beantwortung dieser Frage ist willkührlich, und es ist ohne Bedeutung, ob wir die drei Fälle 15., 16. und 17. in einen einzigen zusammenziehen oder nicht.

Wichtiger scheint mir zu sein, dafs wir nicht die beiden Fälle 5. und 6. mit einander verschmelzen, und dafs wir, überhaupt, als Grundsatz aufstellen, kein Eintheilungs-Princip der Curven der dritten oder einer höhern Ordnung aus blofs geometrischen Betrachtungsweisen herzunehmen, und nach diesen, in der analytischen Darstellung, die verschiedenen möglichen Formen, welche die bezügliche allgemeine Gleichung der Curven annehmen kann, zu unterscheiden; sondern die Eintheilung der Curven lediglich und von vorne herein auf die Verschiedenheit der möglichen Formen ihrer Gleichung zu basiren. Mag immerhin der Lauf derjenigen Curven, welche jenen beiden Fällen entsprechen, grofse Uebereinstimmung haben, weil, wenn ich mich so ausdrücken darf, das Unterscheidende ins Imaginäre hinübergerückt ist. Es findet dieselbe Uebereinstimmung aber auch Statt, wenn wir zum Beispiel die Curven des 12. Falles, welche zwei parallele imaginäre Asymptoten haben, mit besondern Arten der eben erwähnten beiden Fälle zusammenstellen. Und man wird doch nicht behaupten, dafs der Begriff paralleler imaginärer Asymptoten ein geometrischer sei, und dafs man, durch unmittelbare geometrische Anschauung, unter ima-

*) Euler gibt irrthümlich in seiner *Introductio II, cap.* X. §. 259, für die möglichst einfache Gleichung dieser Art von Curven die folgende:

$$u^3+atu+bt+d = 0,$$

indem er durch u und t beliebige schiefwinklige Coordinaten bezeichnet. Es enthält diese Gleichung eine Constante zu viel, wir können unbeschadet der Allgemeinheit b gleich Null setzen. Wenn dies nicht der Fall wäre, müfste diese Art von Curven nothwendig eine besondere Unterabtheilung einschliefsen.

ginären, das heifst nicht existirenden, geraden Linien, parallele unterscheiden könne. Der Ausdruck paralleler imaginärer Asymptoten, den auch Euler gebraucht, ist blofs die geometrische Bezeichnung eines analytischen Factums: eben so könnten wir sagen, dafs im 6. Falle die beiden imaginären Asymptoten osculirende sind. Vor Allem müssen wir die analytische Consequenz festhalten; bei den Curven der höheren Ordnung kann von keiner geometrischen die Rede sein: schon der allgemeine Begriff solcher Curven ist der Geometrie fremd.

§. 3.

Allgemeine geometrische Construction der Curven dritter Ordnung.

211. Wir können die allgemeine Gleichung der Curven dritter Ordnung:

$$pqr+\mu s = 0, \qquad \text{I.}$$

durch Einführung einer willkührlichen Constanten ξ auf folgende Form bringen:

$$p(qr+\xi)+(\mu s-\xi p) = 0,$$

und dann dieselbe befriedigen, indem wir zugleich

$$qr+\xi = 0, \qquad (1)$$

$$\mu s-\xi p = 0, \qquad (2)$$

setzen. Es liegen also alle Durchschnittspuncte der beiden durch die letzten Gleichungen, bei jeder beliebigen Annahme von ξ, dargestellten geometrischen Oerter auf der durch I. dargestellten Curven dritter Ordnung. Zugleich ist klar, dafs der erste dieser beiden Oerter, wenn wir unendlich weit entfernt liegende Durchschnittspuncte ausschliefsen, die Curve I. in keinem andern Puncte aufserdem noch schneidet. Die Gleichung (1) stellt eine Curve zweiter Ordnung dar, welche diejenigen beiden Asymptoten der zu construirenden Curve I., deren Gleichungen die folgenden sind:

$$q = 0, \qquad r = 0,$$

zu ihrer eigenen hat. Wir wollen zuvörderst annehmen, dafs diese Asymptoten reell seien. Alsdann ist diese Curve eine Hyperbel, eine hyperbolische Asymptote, der sich vier Zweige der zu construirenden Curve immer mehr nähern. Die Gleichung (2) wird befriedigt, wenn wir zugleich

$$p = 0 \quad \text{und} \quad s = 0,$$

setzen, und stellt also eine solche gerade Linie dar, die durch den Durchschnittspunct der dritten Asymptote der Curve I. und der Linie S geht. Diese gerade Linie schneidet die Hyperbel (1), im Allgemeinen, in zwei Puncte; diese beiden Puncte liegen zugleich auf der Curve I.

Die Curve I. ist vollkommen bestimmt, wenn ihre drei Asymptoten P, Q und R, die Linie S und der constante Coefficient μ, oder auch, statt dieses Coefficienten, irgend ein Punct der Curve, gegeben sind. Eben so ist die Hyperbel (1) vollkommen bestimmt, wenn ihre beiden Asymptoten Q und R und überdiefs der Coefficient ξ, oder, statt dieses Coefficienten, irgend ein Punct derselben, gegeben sind. Nehmen wir insbesondere an, dafs irgend ein Punct der Curve I., den wir durch M bezeichnen wollen, gegeben sei, und dafs durch eben diesen Punct auch die Hyperbel (1) gehe, so ist diese eine vollkommen bestimmte, und schneidet, aufser in dem Puncte M, die Curve I. nur noch in einem einzi-

gen Puncte. Dieser zweite Durchschnittspunct liegt ebenfalls auf der geraden Linie (2), die ihrerseits dadurch vollkommen bestimmt ist, dafs sie durch den gegebenen Punct M und den Durchschnittspunct der Asymptote P und der Linie S, die wir ebenfalls beide als gegeben betrachten, hindurchgeht. Um einen neuen Punct der zu construirenden Curve dritter Ordnung zu erhalten, brauchen wir also blofs den zweiten Durchschnittspunct der so bestimmten Linie (2) mit der Hyperbel (1) zu construiren: eine Construction, die sich auf die leichteste Weise ergibt.

Es seien (Fig. 5.) PP, QQ und RR die drei Asymptoten der zu construirenden Curve I., und S, S′ und S″ diejenigen drei Puncte, in welchen diese Asymptoten bezüglich von der Linie S geschnitten werden. M sei ein gegebener Punct der Curve. Diesen Punct wollen wir mit dem Puncte S durch eine gerade Linie verbinden, welche den beiden Asymptoten QQ und RR bezüglich in den Puncten K und L begegnen, und dann auf dieser geraden Linie einen neuen Punct M_1 so bestimmen, dafs Fig. 5.

$$M_1L = KM.$$

Alsdann ist M_1 ein Punct der Curve I. Denn, nach einem allbekannten Satze, liegt dieser Punct auf derjenigen Hyperbel, welche QQ und RR zu ihren Asymptoten hat, und überdiefs durch den gegebenen Punct M geht.

Da wir in der vorstehenden Construction die Asymptote PP, nach einander, mit jeder der beiden andern Asymptoten QQ und RR vertauschen können, so erhalten wir zunächst noch zwei neue Puncte der zu construirenden Curve I. (die Puncte M_1' und M_1''), und hiernach ganz auf gleiche Weise, im Allgemeinen, beliebig viele neue Puncte derselben. Diese, aus der Form der Gleichung I. unmittelbar hervortretende, allgemeine Construction der Curve dritter Ordnung ist der Construction einer Hyperbel, welche zwei gegebene gerade Linien zu ihren Asymptoten hat und durch einen gegebenen Punct gehen soll, ganz ähnlich: es ist diese Construction selbst, nur mit dem Unterschiede, dafs jeder neue Constructionspunct auf einer neuen solchen Hyperbel liegt.

Die vorstehende Construction findet auch dann ihre volle Anwendung, wenn die Linie S einer der drei Asymptoten, etwa PP, parallel ist. Alsdann liegt der Punct S unendlich weit, so dafs jede durch denselben gehende gerade Linie mit jener Asymptote ebenfalls parallel ist. Diefs finden wir durch die Gleichung (2) bestätigt, welche für den fraglichen Fall die Form:

$$p + const = 0,$$

annimmt.

Es besteht dieselbe Construction auch noch in demjenigen Falle, dafs die Linie S unendlich weit liegt. Alsdann treten an die Stelle der durch die drei Puncte S, S′ und S″ gehenden drei geraden Linien, drei gerade Linien, welche den drei Asymptoten parallel sind.

212. Wenn zwei Asymptoten der zu construirenden Curve dritter Ordnung parallel sind (Fall III.), so ist durch Gränz-Betrachtungen von vorne herein ersichtlich, dafs auch dann noch die obige Construction besteht, und zugleich folgt, dafs, wenn QQ und RR die beiden parallelen Asymptoten sind, jede gerade Linie, welche durch den Punct S geht, die Curve in solchen zwei Puncten (M und M_1 etwa) schneidet, welche beide innerhalb oder beide aufserhalb der beiden parallelen Asymptoten liegen und gleich weit von denselben abstehen. Jedoch erhalten wir hier unmittelbar nur einen einzigen neuen Punct der zu construirenden Curve.

Wir können in dem vorliegenden Falle der allgemeinen Gleichung auf unendlichmalige Art folgende Form geben:

$$pqr + \mu s = 0,$$

die hier sich folgendergestalt particularisiren läfst:

$$p(q+x)(q-x)+\mu s = 0; \qquad (3)$$

und können also auch die fragliche Construction, welche einzig von dieser Form abhängt, unendlich oft in Anwendung bringen. Die Linie S kann hierbei jede beliebige gerade Linie sein, welche durch den Durchschnitt der Curve mit der nicht parallelen Asymptote P geht. Für diejenigen beiden geraden Linien, welche wir in dem Vorstehenden QQ und RR genannt haben, und welche nun durch die beiden Gleichungen:

$$q+x = 0, \qquad q-x = 0, \qquad (4)$$

dargestellt werden, ergeben sich alsdann diejenigen beiden, welche durch die beiden übrigen Durchschnittspuncte der Linie S mit der Curve gehen und mit den beiden parallelen (reellen, imaginären oder zusammenfallenden) Asymptoten derselben parallel, aber nicht mehr diese Asymptoten selbst sind.

Die Gleichung der Curve (3) wird befriedigt, wenn wir, ähnlich wie früher, indem ξ eine unbestimmte Constante bezeichnet, zugleich

$$(q+x)(q-x)+\xi = 0, \qquad (5)$$

$$\mu s - \xi p = 0, \qquad (6)$$

setzen. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt ein System von solchen zwei geraden Linien dar, die den beiden geraden Linien (4) parallel sind, und gleich diesen und den beiden parallelen Asymptoten, von der durch die Gleichung: $q = 0$, dargestellten geraden Linie zu beiden Seiten derselben gleich weit abstehen. Das System dieser beiden Linien tritt hier an die Stelle der in dem allgemeinen Falle durch die Gleichung (1) dargestellten Hyperbel. Die Gleichung (6) stellt eine solche gerade Linie dar, welche durch den Durchschnittspunct der Curve dritter Ordnung mit der nicht parallelen Asymptote derselben geht. Der geometrische Ort für die Mitte zwischen den beiden Durchschnittspuncten irgend einer solchen geraden Linie und der der Curve dritter Ordnung ist also, in Uebereinstimmung mit den Anfangs-Bemerkungen dieser Nummer, die gerade Linie: $q = 0$.

In dem fraglichen Falle hängt die Construction der Curven dritter Ordnung nur von sieben Constanten ab. Dieser Constanten-Anzahl entsprechend, können wir irgend eine hierher gehörige Curve dadurch bestimmen, dafs wir ihre Asymptote P und ihren Durchschnitt mit derselben, ferner diejenige, in allen Fällen reelle, gerade Linie: $q = 0$, welche den parallelen (reellen oder imaginären) Asymptoten der Curve parallel ist, und in der Mitte zwischen beiden hindurchgeht, und endlich irgend zwei Puncte der Curve, als gegeben betrachten. Alsdann erhalten wir, nach dem Vorstehenden, sogleich zwei neue Puncte der Curve, die so weit von der gegebenen geraden Linie abstehen, als die beiden letztgenannten Puncte. Und durch je zwei Puncte der Curve, die von dieser geraden Linie gleich weit abstehen, können wir derselben zwei gerade Linien parallel ziehen und diese als die beiden gegebenen geraden Linien QQ und RR und jene beiden Puncte selbst als die Puncte S' und S'', in der allgemeinen Construction der vorigen Nummer, betrachten.

213. Es ist offenbar, dafs wir die fragliche Construction auch in dem VI. Falle in Anwendung bringen können. Und zwar können wir hierbei jede beliebige gerade Linie, welche die bezügliche Curve in drei reellen Puncten schneidet, zur Linie S nehmen. Diejenigen drei geraden Linien, welche alsdann an die Stelle der drei Asymptoten PP, QQ und RR, in dem allgemeinen Falle treten, gehen durch diese drei Durchschnittspuncte, sie sind unter einander parallel und haben eine solche Richtung, dafs keine derselben die Curve aufserdem noch, weder in einem reellen noch imaginären Puncte, schneidet. Sie sind, wenn wir die in Rede stehenden Curven, wie früher, durch die Gleichung:

$$p^3 + \lambda q = 0, \qquad \text{VI.}$$

darstellen, der durch die Gleichung: $p = 0$, dargestellten geraden Linie, die wir die Axe der Curve nennen wollen, parallel. Ich füge, um die Uebertragung der allgemeinen Construction auf den vorliegenden Fall zu veranschaulichen, die 6. Figur, mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung, hinzu. Fig. 6.

Wir begegnen hier zugleich einer characteristischen Eigenschaft der, dem VI. Falle entsprechenden, cubischen Parabeln.

Wenn man einen Punct auf dem Umfange einer cubischen Parabel beliebig annimmt, und eine durch diesen Punct gehende gerade Linie um denselben sich drehen läfst, so ist der geometrische Ort für die Mitte zwischen den beiden übrigen Durchschnittspuncten dieser geraden Linie und der Curve eine neue gerade Linie. Wenn der beliebig angenommene Punct auf der Curve sich fortbewegt, so rückt diese neue gerade Linie, parallel mit sich selbst, fort.

Der erste Theil dieses Satzes besteht, nach der vorigen Nummer, auch für den Fall der Curven. III. mit zwei parallelen Asymptoten, nur mit der Beschränkung, dafs der Punct auf dem Umfange der Curve nothwendig ihr Durchschnitt mit der dritten Asymptote sein mufs.

214. Wir können eine Curve dritter Ordnung mit zwei imaginären Asymptoten durch ihre reelle, dritte Asymptote, ihren Asymptotenpunct, durch die Linie S und irgend einen Punct auf ihrem Umfange als gegeben betrachten (180). In diesem Falle gibt uns diejenige Construction, mit der wir uns in der vorigen Nummer beschäftigt haben, unmittelbar, nur einen einzigen neuen Punct; weil alsdann zwei der drei Durchschnittspuncte, welche die Linie S verbindet, imaginär sind, und also jede Construction, in der einer derselben einzeln vorkommt, wegfällt. Was die Construction dieses Punctes betrifft, so wird die allgemeine Gleichung dieser Curven:

$$p(u^2 + \gamma^2 v^2) + \mu s = 0, \qquad (7)$$

befriedigt, wenn, indem ξ wiederum eine unbestimmte Constante bezeichnet, die folgenden beiden Gleichungen zugleich bestehen:

$$u^2 + \gamma^2 v^2 + \xi = 0, \qquad (8)$$

$$\mu s - \xi p = 0. \qquad (9)$$

Die erste dieser beiden Gleichungen stellt eine Ellipse dar, die, wenn der Werth von ξ immer kleiner wird und zuletzt verschwindet, in den Asymptotenpunct selbst übergeht, und, je nachdem ξ einen negativen oder positiven Werth hat, reell oder imaginär ist. Wir können sagen, dafs, so wie die hyperbolische Asymptote (1), im Falle dreier reellen Asymptoten, mit der Curve in unendlicher Entfernung einen reellen doppelten Contact hat, in dem vorliegenden Falle die Ellipse (8) mit der Curve in unendlicher Entfernung einen imaginären doppelten Contact habe. Es läfst sich der unbestimmte Coefficient ξ immer so annehmen, dafs diese Ellipse durch den gegebenen Punct der zu construirenden Curve (7) geht. Dann liegt der zweite Durchschnittspunct dieser Curve mit der Ellipse zugleich auf der geraden Linie (9), welche jenen gegebenen Punct mit dem Durchschnitte der gegebenen reellen Asymptote und der gegebenen Linie S verbindet. Dieser neue Punct der zu construirenden Curve ergibt sich hiernach sehr leicht.

Es sei (Fig. 7.) A der Asymptotenpunct, PP die reelle Asymptote und S derjenige Punct, in welchem sie von der Linie S geschnitten wird. Es habe ferner die Curve ima- Fig. 7.

die hier sich folgendergestalt particularisiren läfst:

$$p(q+\varkappa)(q-\varkappa)+\mu s = 0; \qquad (3)$$

und können also auch die fragliche Construction, welche einzig von dieser Form abhängt, unendlich oft in Anwendung bringen. Die Linie S kann hierbei jede beliebige gerade Linie sein, welche durch den Durchschnitt der Curve mit der nicht parallelen Asymptote P geht. Für diejenigen beiden geraden Linien, welche wir in dem Vorstehenden QQ und RR genannt haben, und welche nun durch die beiden Gleichungen:

$$q+\varkappa = 0, \qquad q-\varkappa = 0, \qquad (4)$$

dargestellt werden, ergeben sich alsdann diejenigen beiden, welche durch die beiden übrigen Durchschnittspuncte der Linie S mit der Curve gehen und mit den beiden parallelen (reellen, imaginären oder zusammenfallenden) Asymptoten derselben parallel, aber nicht mehr diese Asymptoten selbst sind.

Die Gleichung der Curve (3) wird befriedigt, wenn wir, ähnlich wie früher, indem ξ eine unbestimmte Constante bezeichnet, zugleich

$$(q+\varkappa)(q-\varkappa)+\xi = 0, \qquad (5)$$

$$\mu s-\xi p = 0, \qquad (6)$$

setzen. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt ein System von solchen zwei geraden Linien dar, die den beiden geraden Linien (4) parallel sind, und gleich diesen und den beiden parallelen Asymptoten, von der durch die Gleichung: $q = 0$, dargestellten geraden Linie zu beiden Seiten derselben gleich weit abstehen. Das System dieser beiden Linien tritt hier an die Stelle der in dem allgemeinen Falle durch die Gleichung (1) dargestellten Hyperbel. Die Gleichung (6) stellt eine solche gerade Linie dar, welche durch den Durchschnittspunct der Curve dritter Ordnung mit der nicht parallelen Asymptote derselben geht. Der geometrische Ort für die Mitte zwischen den beiden Durchschnittspuncten irgend einer solchen geraden Linie und der der Curve dritter Ordnung ist also, in Uebereinstimmung mit den Anfangs-Bemerkungen dieser Nummer, die gerade Linie: $q = 0$.

In dem fraglichen Falle hängt die Construction der Curven dritter Ordnung nur von sieben Constanten ab. Dieser Constanten-Anzahl entsprechend, können wir irgend eine hierher gehörige Curve dadurch bestimmen, dafs wir ihre Asymptote P und ihren Durchschnitt mit derselben, ferner diejenige, in allen Fällen reelle, gerade Linie: $q = 0$, welche den parallelen (reellen oder imaginären) Asymptoten der Curve parallel ist, und in der Mitte zwischen beiden hindurchgeht, und endlich irgend zwei Puncte der Curve, als gegeben betrachten. Alsdann erhalten wir, nach dem Vorstehenden, sogleich zwei neue Puncte der Curve, die so weit von der gegebenen geraden Linie abstehen, als die beiden letztgenannten Puncte. Und durch je zwei Puncte der Curve, die von dieser geraden Linie gleich weit abstehen, können wir derselben zwei gerade Linien parallel ziehen und diese als die beiden gegebenen geraden Linien QQ und RR und jene beiden Puncte selbst als die Puncte S′ und S″, in der allgemeinen Construction der vorigen Nummer, betrachten.

213. Es ist offenbar, dafs wir die fragliche Construction auch in dem VI. Falle in Anwendung bringen können. Und zwar können wir hierbei jede beliebige gerade Linie, welche die bezügliche Curve in drei reellen Puncten schneidet, zur Linie S nehmen. Diejenigen drei geraden Linien, welche alsdann an die Stelle der drei Asymptoten PP, QQ und RR, in dem allgemeinen Falle treten, gehen durch diese drei Durchschnittspuncte, sie sind unter einander parallel und haben eine solche Richtung, dafs keine derselben die Curve aufserdem noch, weder in einem reellen noch imaginären Puncte, schneidet. Sie sind, wenn wir die in Rede stehenden Curven, wie früher, durch die Gleichung:

$$p^3 + \lambda q = 0, \qquad \text{VI.}$$

darstellen, der durch die Gleichung: $p = 0$, dargestellten geraden Linie, die wir die Axe der Curve nennen wollen, parallel. Ich füge, um die Uebertragung der allgemeinen Construction auf den vorliegenden Fall zu veranschaulichen, die 6. Figur, mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung, hinzu. Fig. 6.

Wir begegnen hier zugleich einer characteristischen Eigenschaft der, dem VI. Falle entsprechenden, cubischen Parabeln.

Wenn man einen Punct auf dem Umfange einer cubischen Parabel beliebig annimmt, und eine durch diesen Punct gehende gerade Linie um denselben sich drehen läfst, so ist der geometrische Ort für die Mitte zwischen den beiden übrigen Durchschnittspuncten dieser geraden Linie und der Curve eine neue gerade Linie. Wenn der beliebig angenommene Punct auf der Curve sich fortbewegt, so rückt diese neue gerade Linie, parallel mit sich selbst, fort.

Der erste Theil dieses Satzes besteht, nach der vorigen Nummer, auch für den Fall der Curven III. mit zwei parallelen Asymptoten, nur mit der Beschränkung, dafs der Punct auf dem Umfange der Curve nothwendig ihr Durchschnitt mit der dritten Asymptote sein mufs.

214. Wir können eine Curve dritter Ordnung mit zwei imaginären Asymptoten durch ihre reelle, dritte Asymptote, ihren Asymptotenpunct, durch die Linie S und irgend einen Punct auf ihrem Umfange als gegeben betrachten (180). In diesem Falle gibt uns diejenige Construction, mit der wir uns in der vorigen Nummer beschäftigt haben, unmittelbar, nur einen einzigen neuen Punct; weil alsdann zwei der drei Durchschnittspuncte, welche die Linie S verbindet, imaginär sind, und also jede Construction, in der einer derselben einzeln vorkommt, wegfällt. Was die Construction dieses Punctes betrifft, so wird die allgemeine Gleichung dieser Curven:

$$p(u^2 + \gamma^2 v^2) + \mu s = 0, \qquad (7)$$

befriedigt, wenn, indem ξ wiederum eine unbestimmte Constante bezeichnet, die folgenden beiden Gleichungen zugleich bestehen:

$$u^2 + \gamma^2 v^2 + \xi = 0, \qquad (8)$$

$$\mu s - \xi p = 0. \qquad (9)$$

Die erste dieser beiden Gleichungen stellt eine Ellipse dar, die, wenn der Werth von ξ immer kleiner wird und zuletzt verschwindet, in den Asymptotenpunct selbst übergeht, und, je nachdem ξ einen negativen oder positiven Werth hat, reell oder imaginär ist. Wir können sagen, dafs, so wie die hyperbolische Asymptote (1), im Falle dreier reellen Asymptoten, mit der Curve in unendlicher Entfernung einen reellen doppelten Contact hat, in dem vorliegenden Falle die Ellipse (8) mit der Curve in unendlicher Entfernung einen imaginären doppelten Contact habe. Es läfst sich der unbestimmte Coefficient ξ immer so annehmen, dafs diese Ellipse durch den gegebenen Punct der zu construirenden Curve (7) geht. Dann liegt der zweite Durchschnittspunct dieser Curve mit der Ellipse zugleich auf der geraden Linie (9), welche jenen gegebenen Punct mit dem Durchschnitte der gegebenen reellen Asymptote und der gegebenen Linie S verbindet. Dieser neue Punct der zu construirenden Curve ergibt sich hiernach sehr leicht.

Es sei (Fig. 7.) A der Asymptotenpunct, PP die reelle Asymptote und S derjenige Punct, in welchem sie von der Linie S geschnitten wird. Es habe ferner die Curve ima- Fig. 7.

ginäre Kreis-Asymptoten *), so dafs die Gleichung (8) einen Kreis darstellt, dessen Mittelpunct A ist. Es sei M endlich der gegebene Punct. Zieht man alsdann SM, und beschreibt um A, als Mittelpunct, einen Kreis, welcher durch M geht, so ist der zweite Punct, den dieser Kreis mit jener geraden Linie SM gemein hat, der Punct M_1, der verlangte neue Punct der Curve dritter Ordnung.

215. Wir können die bisher entwickelte Construction der Curven dritter Ordnung aus einem allgemeinern Gesichtspuncte betrachten, und ihr dadurch eine solche Ausdehnung geben, dafs sie in jedem Falle zur vollständigen Bestimmung der Curve führt. Zu diesem Ende wollen wir der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung folgende Form geben:

$$pK + \mu s = 0, \qquad (1)$$

indem wir durch K irgend eine Function des zweiten Grades bezeichnen. Da eine solche Function fünf Constante enthält, so wird dadurch in die allgemeine Gleichung der Curven dritter Ordnung eine zehnte Constante willkührlich eingeführt. Es stimmt die Form der letzten Gleichung mit der Form der Gleichung der 211. Nummer überein. Es stellt alsdann die Gleichung:

$$K = 0, \qquad (2)$$

wenn erstens alle Asymptoten der Curve reell sind, irgend eine Hyperbel dar, welcher sich vier unendliche Zweige immer mehr annähern; wenn zweitens zwei Asymptoten der Curve imaginär sind: eine Ellipse, mit denselben beiden imaginären Asymptoten; wenn drittens zwei Asymptoten unendlich weit liegen (II. und V. Fall): eine parabolische Asymptote; wenn viertens zwei Asymptoten parallel sind (III. Fall) und im VI. Falle: ein System zweier parallelen geraden Linien. In allen diesen Fällen wird die Curve dritter Ordnung von dem, durch die Gleichung (2) dargestellten, geometrischen Orte zweiter Ordnung nur in zwei Puncten geschnitten, weil die vier übrigen, reellen oder imaginären, Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, und zwar können wir immer voraussetzen, dafs jener Ort die Curve dritter Ordnung in zwei reellen Puncten schneidet. Es bleibt vorerst nur der IV. Fall hier ausgeschlossen.

Um die Durchschnittspuncte der Curve (1) mit irgend einer geraden Linie, die wir durch die Gleichung:

$$t = 0, \qquad (3)$$

darstellen wollen, zu bestimmen, wollen wir p und K als Functionen von s und t betrachten, und hiernach die Gleichung (1), unter Einführung unbestimmter Coefficienten, unter der folgenden Form schreiben:

$$(s + \zeta t + \vartheta)\{s^2 + 2\alpha st + \beta t^2 + 2\gamma s + 2\delta t + \varepsilon\} + \mu s = 0,$$

und dann t gleich Null setzen. Alsdann kommt:

$$(s + \vartheta)(s^2 + 2\gamma s + \varepsilon) + \mu s = 0. \qquad (4)$$

---

*) Ich nenne „imaginäre Kreis-Asymptoten" solche imaginäre Asymptoten, als ein Kreis hat. Die Voraussetzung solcher Kreis-Asymptoten wollen wir in der Folge da, wo zwei (nicht parallele) imaginäre Asymptoten bei Curven dritter Ordnung vorkommen, allen Constructionen zu Grunde legen. Wir vermeiden dadurch, dieselben mit Details zu überladen, wodurch an, richtig verstandener, Allgemeinheit nichts gewonnen wird, und erreichen zugleich, dafs es uns möglich wird, die verschiedenen Formen, welche die hierher gehörigen Curven dritter Ordnung annehmen können, zu übersehen. Diese Uebersichtlichkeit mufs dann nothwendig verloren gehen, wenn wir bei der Zusammenstellung der einzelnen verschiedenen Arten dieser Curven, die wir in dem Folgenden beabsichtigen, bald Curven mit imaginären Kreis-Asymptoten, bald Curven mit solchen imaginären Asymptoten nehmen, wie sie einer Ellipse von irgend einem besondern Axen-Verhältnifs entsprechen. Bei der in Rede stehenden Voraussetzung betrachten wir zwar nur einen einzelnen Fall, aber in diesem einzelnen Falle können wir sogleich alle Fälle derselben Art übersehen.

Die drei Wurzeln dieser Gleichung geben diejenigen Werthe der Function s, welche sich auf die drei Durchschnittspuncte der Curve (1) mit der geraden Linie (3) beziehen.

Wenn wir auf gleiche Weise die Durchschnittspuncte derselben geraden Linie (3) mit dem durch die Gleichung:

$$pK = 0, \tag{5}$$

dargestellten Systeme einer geraden Linie und (im Allgemeinen) eines Kegelschnittes bestimmen, so finden wir:

$$(s+\vartheta)(s^2+2\gamma s+\varepsilon) = 0. \tag{6}$$

Die Summe der drei Wurzeln jeder der beiden Gleichungen (4) und (6) ist eine und dieselbe, also auch das arithmetische Mittel aus den beidesmaligen drei Wurzeln. Es fallen also auch die Mitten *) der drei Durchschnittspuncte der beliebigen geraden Linie (3) mit der Curve dritter Ordnung einerseits, und mit der einen Asymptote dieser Curve und (im Allgemeinen) einem Kegelschnitte, der die beiden übrigen Asymptoten zu seinen eigenen hat, andrerseits, in einzigen Punct zusammen.

216. Zuvörderst ergibt sich aus der vorigen Nummer, wenn die drei Asymptoten einer Curve dritter Ordnung, oder, statt zwei derselben (namentlich auch in dem Falle, dafs dieselben imaginär sind und unendlich weit liegen), ein Kegelschnitt, der diese zu seinen eigenen Asymptoten hat, und aufserdem irgend zwei Puncte einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, sogleich derjenige dritte Punct derselben, welche auf der, die beiden gegebenen Puncte verbindenden, geraden Linie liegt. Es seien M_1 und M_2 die beiden gegebenen Puncte, und diejenige gerade Linie, welche durch dieselben geht, schneide die gegebene reelle Asymptote in P_1 und den gegebenen Kegelschnitt in K_1 und K_2. Bestimmt man alsdann auf derselben geraden Linie, nach den Gleichungen:

$$K_1L = \tfrac{1}{2}K_1K_2, \qquad LG = \tfrac{1}{3}LP_1,$$
$$M_1N = \tfrac{1}{2}M_1M_2, \qquad NM_3 = 3NG,$$

nach einander die vier Puncte L, G, N und M_3, indem wir zugleich auf die, durch die letzten Gleichungen angezeigte, gegenseitige Lage der Puncte Rücksicht nehmen, so ist der letzte dieser vier Puncte, nemlich M_3, ein neuer Punct der Curve dritter Ordnung.

Ferner folgt unmittelbar aus der vorigen Nummer, dafs, wenn die gerade Linie (3) insbesondere durch den Durchschnittspunct der Curve dritter Ordnung mit der Asymptote P geht, die Mitte der beiden übrigen Durchschnittspuncte dieser Linie und der Curve dritter Ordnung einerseits, und die Mitte der beiden Durchschnittspuncte derselben geraden Linie und der Curve (2) andrerseits, zusammenfallen. Diese Bemerkung führt uns zu den Constructionen in den ersten Nummern dieses Paragraphen zurück. Aber zugleich ist auch klar, dafs, wenn die gerade Linie (3) insbesondere durch einen Durchschnittspunct der Curve dritter Ordnung und der Curve (2) geht, die Mitte der beiden noch übrigen Durchschnittspuncte dieser geraden Linie und der Curve dritter Ordnung einerseits, und die Mitte zwischen dem zweiten Durchschnitte derselben geraden Linie mit der Curve (2) und ihrem Durchschnitte mit der reellen Asymptote P andrerseits, in einen und denselben Punct zusammenfallen. Was namentlich diese letzte Behauptung betrifft, so können wir dieselbe auch unmittelbar aus der obigen analytischen Bezeichnungsweise hernehmen. Wir brau-

*) Ich werde überall unter „Mitte dreier Puncte" denjenigen Punct verstehen, in den der Schwerpunct dreier gleichen Gewichte, die man sich in jenen drei Puncten angebracht denken kann, fallen würde, und diese Benennung in dem Folgenden auch auf den Fall, dafs die drei Puncte nicht in gerader Linie liegen, ausdehnen, und sie dann mit dem Ausdrucke „Mitte des von denselben Puncten gebildeten Dreiecks" als gleichbedeutend ansehen.

chen zu diesem Ende blofs, der gemachten Voraussetzung gemäfs, dafs die Curve (2) durch den Durchschnitt der geraden Linie (3) mit der Linie S geht, s gleich Null zu setzen. Alsdann stellt sich, als Folge jener Voraussetzung, s als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder in den beiden Gleichungen (4) und (6) dar, welche hiernach, mit Vernachlässigung dieses Factors, in die folgenden übergehen:

$$(s+\vartheta)\{s+2\gamma\}+\mu = 0,$$
$$(s+\vartheta)(s+2\gamma) = 0,$$

woraus das eben Behauptete sogleich hervorgeht.

Fig. 8. 217. An die vorstehenden Erörterungen schliefst sich eine allgemeine Construction der Curven dritter Ordnung an, welche, in Beziehung auf allgemeine Anwendbarkeit, nichts zu wünschen mehr übrig läfst. Es sei eine gerade Linie P und irgend ein Ort zweiter Ordnung K (in dem Falle der 8. Fig. ein Kreis) gegeben, ferner eine zweite gerade Linie, welche die erste im Puncte S und diesen Ort in den Puncten S′ und S″ schneide, und endlich aufserdem noch irgend ein Punct M. Zieht man alsdann die gerade Linie SM, welche den Ort K in den beiden Puncten K_1 und K_2 schneiden, ferner S′M und S″M, welche die gerade Linie P in den Puncten P′ und P″ und den Ort K zum zweiten Male in den Puncten K′ und K″ schneiden, so liegen diejenigen drei Puncte M_1, M_1' und M_1'', welche man erhält, wenn man auf diesen drei, bezüglich durch die Puncte, S, S′ und S″ gehenden, geraden Linien:

$$K_2M_1 = MK_1, \qquad P'M_1' = MK', \qquad P''M_1'' = MK'',$$

nimmt, auf einer Curve dritter Ordnung, welche dadurch bestimmt ist, dafs sie die gegebene gerade Linie P zu ihrer Asymptote hat, dafs ihre beiden andern Asymptoten, im Allgemeinen, die Asymptoten des gegebenen Ortes K sind, und dafs sie überdiefs durch die vier gegebenen Puncte S, S′, S″ und M geht. Nachdem auf diesem Wege drei neue Puncte dieser Curve dritter Ordnung gefunden sind, ergeben sich unmittelbar so viele Puncte derselben M° u. s. w., als man will.

218. Nach dem Verfahren in der vorigen Nummer kann man jede Curve dritter Ordnung construiren, mit Ausnahme des einzigen IV. Falles. Wenn der gegebene Ort K eine Hyperbel ist, so hat die Curve dritter Ordnung drei reelle Asymptoten; zwei dieser Asymptoten werden imaginär, wenn an die Stelle der gegebenen Hyperbel eine Ellipse tritt. Ist der Ort K eine Parabel, so hat die Curve, im Allgemeinen, dieselbe zur parabolischen Asymptote. Ist derselbe ein System von zwei parallelen geraden Linien, so hat die Curve, im Allgemeinen, zwei parallele (reelle, imaginäre oder zusammenfallende) Asymptoten. Sind die beiden parallelen geraden Linien insbesondere auch der gegebenen geraden Linie P parallel, so gehört die Curve zu dem VI. Falle. In dem besondern Falle endlich, dafs der gegebene Ort K eine Parabel und die gegebene gerade Linie P ein Durchmesser derselben ist, erhält man eine Curve des V. Falles; es ist alsdann jene Parabel, im Allgemeinen, keine Asymptote der Curve, wird aber eine solche, wenn man sie, parallel mit sich selbst, schicklich fortrückt.

Was den zuletzt berührten Fall betrifft, so können wir nach der 206. Nummer jede beliebige gerade Linie, die eine Curve dieser Art in drei beliebigen Puncten schneidet, als Linie S betrachten, und dann durch einen dieser Puncte eine gerade Linie parallel mit ihrer geradlinigen Asymptote und durch die beiden übrigen Durchschnittspuncte eine Parabel legen, die mit der parabolischen Asymptote der Curve gleiche Durchmesser-Richtung und gleichen Parameter hat, und hiernach endlich das System jener geraden Linie und dieser Parabel durch die Gleichung (5) darstellen. Wenn man also durch den ersten Durch-

schnittspunct auf der Linie S, für den wir jeden beliebigen Punct der Curve annehmen können, eine gerade Linie legt, so fallen, wie sich auch diese gerade Linie um jenen Durchschnittspunct drehen mag, die Mitte ihrer beiden übrigen Durchschnittspuncte mit der Curve dritter Ordnung einerseits, und die Mitte ihrer beiden Durchschnittspuncte mit der Parabel andrerseits, immer in demselben Puncte zusammen. Der geometrische Ort für die Mitten der jedesmaligen beiden Durchschnittspuncte einer geraden Linie, welche um einen festen Punct sich dreht, mit einer gegebenen Parabel ist aber bekanntlich eine neue Parabel, welche, bei gleicher Durchmesser-Richtung, einen halb so grofsen Parameter hat, als die gegebene. Hiernach erhalten wir folgende characteristische Eigenschaft der dem V. Falle angehörigen Curven dritter Ordnung.

Wenn man um irgend einen gegebenen Punct einer Trident-Curve eine gerade Linie sich drehen läfst, so beschreibt die Mitte ihrer beiden übrigen Durchschnittspuncte mit dieser Curve eine Parabel, deren Parameter halb so grofs ist als der Parameter der parabolischen Asymptoten, und deren Durchmesser dieselbe Richtung haben als die Durchmesser dieser. Wenn der gegebene Punct auf dem Umfange der Trident-Curve fortrückt, so bewegt sich diese Parabel parallel mit sich selbst fort.

Der erste Theil dieses Satzes gilt für den Fall der Curven II., mit parabolischen Asymptoten überhaupt, nur dann, wenn wir insbesondere annehmen, dafs der gegebene Punct der Durchschnittspunct einer solchen Curve mit ihrer geradlinigen Asymptote sei.

219. Die Curven des IV. Falles sind bisher von der Discussion dieses Paragraphen ausgeschlossen geblieben. Die Construction derselben ergibt sich, durch die Vermittelung der semicubischen Parabel, gerade auf dieselbe Weise, als, in dem Vorstehenden, die Construction der übrigen Curven dritter Ordnung durch die Vermittelung dreier geraden Linien oder des Systemes einer geraden Linie und eines Kegelschnittes sich ergeben hat. Die Schlufsweise der 215. Nummer findet, nach den hierdurch angezeigten Modificationen, unmittelbar ihre Anwendung. Es fallen die beiden Mitten der drei Durchschnittspuncte einer beliebigen geraden Linie mit einer solchen Curve IV. einerseits und mit einer semicubischen Parabel, die eine Asymptote derselben ist, andrerseits, in demselben Puncte zusammen. Wenn die beliebige gerade Linie insbesondere durch einen Durchschnittspunct der beiden Curven geht, so fallen also auch die Mitten der beiden noch übrigen Durchschnittspuncte der geraden Linie mit jeder der beiden Curven zusammen. Es scheint mir überflüssig hier in irgend ein Detail der Construction einzugehen. Wir wenden uns daher sogleich zu der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung zurück, um aus derselben eine neue allgemeine Construction derselben herzuleiten.

220. Wir können der, früher schon zu Grunde gelegten Gleichung:

$$pK+\mu s = 0, \qquad (1)$$

durch Einführung einer neuen willkührlichen Constanten auch folgende Form geben:

$$p(K+\xi s)-s(\xi p-\mu) = 0,$$

und sie dann befriedigen, indem wir

$$K+\xi s = 0, \qquad (2)$$

und zugleich entweder $s = 0$, oder:

$$\xi p-\mu = 0, \qquad (3)$$

setzen. Es liegen also die Durchschnitte der durch die Gleichung (2) dargestellten Curve und der Curve dritter Ordnung (1) auf der geraden Linie S und der geraden Linie (3); die Anzahl derselben beträgt also blofs vier; zwei liegen unendlich weit. Die Gleichung:

$$K = 0, \qquad (4)$$

stellt einen Kegelschnitt dar, der zwei Asymptoten der Curve (1) zu seinen eigenen hat, und durch dessen beide Durchschnittspuncte mit dieser Curve die Linie S geht. Die Gleichung (2) stellt also einen zweiten Kegelschnitt dar, der durch die beiden eben bezeichneten Durchschnittspuncte geht, weil diese Gleichung befriedigt wird, wenn wir zugleich:

$$K = 0 \quad \text{und} \quad s = 0,$$

setzen. Dieser zweite Kegelschnitt hat ferner, weil s eine blofs lineare Function bedeutet, zwei solche gerade Linien zu Asymptoten, die den Asymptoten des ersten Kegelschnittes, das heifst, zwei Asymptoten der Curve dritter Ordnung (1) parallel sind, oder er ist, mit andern Worten, dem ersten Kegelschnitte ähnlich und ähnlich liegend. Jeder solcher Kegelschnitt also, welcher, bei irgend einer Annahme von ξ, durch die Gleichung (2) dargestellt wird, schneidet die Curve dritter Ordnung, aufser in den beiden auf der Linie S liegenden Puncten, nur noch in zwei Puncten, und diese liegen auf der geraden Linie (3), also auf einer solchen geraden Linie, die der Asymptote P parallel ist. Hierdurch ist eine Reihe einzelner Constructionen gegeben, die ich mehr andeuten als ausführen will.

221. Wir wollen zuerst die Voraussetzung machen, dafs die Asymptoten der zu construirenden Asymptote dritter Ordnung alle drei reell seien. Dann stellt die Gleichung (4) eine Hyperbel dar, die zwei dieser Asymptoten zu den ihrigen hat, oder, insbesondere auch, diese Asymptoten selbst. Die Discussion beider Fälle ist ganz analog; wir wollen uns begnügen, den letztern näher zu betrachten, wo die Gleichung (1), indem wir qr an die Stelle von K schreiben, wiederum die Form:

$$pqr + \mu s = 0,$$

annimmt. Es seien (Fig. 9.) PP, QQ und RR in drei Asymptoten und S, S′ und S″ diejenigen Puncte, in welchen dieselben von der Linie S geschnitten werden. Es sei aufserdem M irgend ein gegebener Punct der zu construirenden Curve. Wenn wir, bei dieser Annahme, eine Hyperbel (2) beschreiben, deren Asymptoten die beiden gegebenen geraden Linien QQ und RR parallel sind, und welche überdiefs durch die drei gegebenen Puncte S′, S″ und M geht, so schneidet dieselbe die Curve dritter Ordnung aufserdem nur noch in einem einzigen Puncte, und dieser liegt zugleich auf der geraden Linie (3), welche dadurch bestimmt wird, dafs sie durch den gegebenen Punct M geht und mit PP parallel ist. Um diesen neuen Punct der zu construirenden Curve zu finden, brauchen wir die Hyperbel (2) selbst nicht zu beschreiben. Unter andern, zeigt der Pascalsche Satz vom eingeschriebenen Sechsecke, dadurch modificirt, dafs zwei Winkelpuncte desselben unendlich weit liegen (nach der Richtung von QQ und RR, die vier andern Winkelpuncte sind S′, S″, M und der zu construirende neue Punct M_1), die nachstehende Construction an. Man lege durch die beiden gegebenen Puncte S″ und M eine gerade Linie, von welcher QQ in q geschnitten werde, ziehe durch Q eine gerade Linie parallel mit PP, von welcher RR in r geschnitten werde, ziehe ferner S′r und durch M eine neue gerade Linie mit PP parallel: die beiden zuletzt gezogenen geraden Linien schneiden sich alsdann in dem gesuchten Puncte M_1. Wenn man die drei gegebenen Asymptoten in anderer Ordnung zusammenstellt, so erhält man zwei neue Puncte ($M_{\prime\prime}$ ist in der 9. Figur ein solcher Punct) und dann so viele Puncte man will.

Fig. 9.

Wenn zwei Asymptoten der zu construirenden Curve imaginär sind, so erhalten wir, unmittelbar, nur einen einzigen neuen Punct. Die allgemeine Construction dieses Punctes hängt alsdann davon ab, den Durchschnittspunct M_1 einer Ellipse, welche durch die Gleichung (2) dargestellt wird, und dadurch bestimmt ist, dafs sie einer gegebenen (4) ähnlich

Fig. 10.

und ähnlichliegend ist und überdiefs durch drei gegebene Puncte S', S'' und M geht, mit einer geraden Linie (MM_1) zu bestimmen, welche durch einen dieser Puncte (M) mit der reellen Asymptote PP parallel gezogen wird. Die beigefügte Construction (Fig. 10.) bezieht sich auf die Annahme imaginärer Kreis-Asymptoten; wo alsdann die Gleichung (4) irgend einen Kreis darstellt, welcher um den Asymptotenpunct A, als Mittelpunct, beschrieben ist, und die Gleichung (2) einen neuen Kreis, welcher mit diesem die Linie S zur gemeinschaftlichen Chorde hat und aufserdem durch den gegebenen Punct M geht.

Wenn zwei der drei Asymptoten der Curve dritter Ordnung (1) parallel sind, so stellt die Gleichung (4) ein System von irgend zwei geraden Linien, die mit den parallelen Asymptoten parallel sind, und die Gleichung (2) eine Parabel dar, welche diese beiden geraden Linien zu Durchmessern hat und von denselben auf der Linie S geschnitten wird. Jede auf diese Weise bestimmte Parabel schneidet die zu construirende Curve (1) aufserdem noch in zwei Puncten, die auf einer solchen geraden Linie liegen, die der dritten Asymptote der Curve parallel ist. Ist einer dieser beiden Puncte gegeben, so erhält man leicht den andern.

In dem Falle parabolischer Curven dritter Ordnung stellt die Gleichung (4) irgend eine solche Asymptote dar und die Gleichung (2) irgend eine neue Parabel, deren Durchmesser dieselbe Richtung haben. Diese neue Parabel schneidet die Asymptote auf der Linie S, und hat aufserdem mit der zu construirenden Curve (1) nur noch zwei Puncte gemein, und diese liegen auf der geraden Linie (3), welche der geradlinigen Asymptote P parallel ist. Wenn einer dieser Durchschnitte gegeben ist, ergibt sich der andere, wie in den früheren Fällen. Bei einer besondern Annahme des unbestimmten Coefficienten ξ stellt die Gleichung (4) ein System zweier Durchmesser der parabolischen Asymptote dar. Legt man also durch den Durchschnitt einer der fraglichen Curven dritter Ordnung mit ihrer geradlinigen Asymptote eine beliebige gerade Linie (S), welche dieselbe aufserdem noch in zwei Puncten schneidet, und legt dann ferner durch diese beiden Durchschnittspuncte zwei neue gerade Linien, welche die Richtung der Durchmesser der parabolischen Asymptote haben, so wird die Curve von diesen beiden geraden Linien in solchen zwei neuen Puncten geschnitten, die auf einer der geradlinigen Asymptote derselben parallelen geraden Linie liegen. Hiernach nähern sich die beiden Fälle II. und III. einander an. Ein Satz, der dem vorstehenden analog ist, findet, wie man sogleich einsieht, auch dann Statt, wenn eine hyperbolische Asymptote die parabolische vertritt.

222. Wenn, wie in der vorigen Nummer, die Asymptote P, die Curve (2), die Linie S (auf welcher die drei Durchschnittspuncte der zu construirenden Curve mit jener Asymptote und dieser Curve liegen) und irgend ein Punct M der zu construirenden Curve gegeben sind, so können wir die Construction eines neuen Punctes M_1, der auf einer durch M gehenden, mit der Asymptote P parallelen geraden Linie liegt (indem wir uns etwa auf die 10. Figur beziehen), auch aus der nachstehenden metrischen Relation hernehmen: Fig. 10.

$$Ms \cdot M_1s = Ks \cdot K_1s,$$

die bekanntermeise immer Statt findet, wenn irgend zwei ähnliche und ähnlichliegende Kegelschnitte und deren gemeinschaftliche Chorde von einer beliebigen Transversalen bezüglich in den Puncten K und K_1, M und M_1, und T geschnitten werden.

223. Wenn die Linie S insbesondere die Curve (4) nur in einem einzigen Puncte schneidet, und diese Curve also eine osculirende oder parabolische Asymptote ist, so erhält die Gleichung (1) bezüglich eine von folgenden beiden Formen:

$$p(qr+\eta)+\mu(q+\sigma) = 0, \qquad (p+\varkappa)(q^2+\lambda p)+\mu(q+\sigma) = 0.$$

Alsdann können wir der Gleichung (2) bezüglich die folgenden beiden Formen geben:

$$q(r+\xi)+\zeta = 0, \qquad (q+\gamma)^2+\lambda(p+\delta) = 0;$$

woraus ersichtlich ist, dafs die letztgenannte Gleichung (2), einmal, eine Hyperbel darstellt, welche mit der osculirenden Hyperbel (4) eine Asymptote gemein hat, das andere Mal eine Parabel, welche mit der osculirenden Parabel (4) gleichen Parameter hat. Alle übrigen Beziehungen bleiben dieselben, als in dem allgemeinen Falle.

Sobald die Linie S unendlich weit liegt, gehen die in Rede stehenden Constructionsweisen, weil alsdann die lineare Function s auf eine blofse Constante sich reducirt, in diejenige über, welche wir aus den analytischen Entwickelungen der ersten Nummer dieses Paragraphen hergeleitet haben.

224. Alle die einzelnen Constructionen, zu welchen wir in diesem Paragraphen gekommen sind, können wir unter einem allgemeinen Gesichtspuncte zusammenfassen. Ueberall nemlich haben wir nur auf einer solchen geraden Linie, welche durch zwei gegebene Puncte der zu construirenden Curve geht, den dritten Punct, in welchem dieselbe die Curve schneidet, bestimmt. Entweder waren die beiden gegebenen Puncte ganz beliebig (215), oder einer derselben stand in einer besondern Beziehung zur Curve (211), oder war endlich dadurch bestimmt, dafs er, nach gegebener Richtung, unendlich weit lag (220). Die Bestimmung der drei Durchschnittspuncte einer gegebenen geraden Linie mit einer Curve dritter Ordnung überhaupt, gleichviel durch welche Bestimmungsstücke diese Curve geometrisch gegeben sein mag, hängt nothwendig von der Auflösung einer Gleichung des dritten Grades ab. Diese Gleichung reducirt sich auf den zweiten Grad, wenn einer der drei Durchschnittspuncte gegeben ist; sie wird linear, wenn zwei derselben gegeben sind. Wenn eine gerade Linie nur durch einen gegebenen Punct der zu construirenden Curve geht, so können wir jedesmal dann, wenn sie die Curve aufserdem nur noch in einem einzigen Puncte schneidet, weil der dritte Durchschnittspunct unendlich weit liegt, diesen zweiten Durchschnittspunct auf lineare Weise finden. Hierauf beziehen sich die Constructionen der letzten Nummern, wo die gerade Linie einer geradlinigen Asymptote parallel war. Zugleich aber ist ersichtlich, dafs wir nothwendig auch noch in den folgenden beiden besondern Fällen zu linearen Constructionen gelangen müssen; dann nemlich, wenn wir auf einer geraden Linie, die durch einen gegebenen Punct einer Curve dritter Ordnung geht, einen neuen Punct dieser Curve suchen und diese gerade Linie entweder einerseits (Fall II.) ein Durchmesser ihrer parabolischen Asymptoten ist, oder andrerseits (Fall IV.) diejenige Richtung hat, nach welcher die semicubischen Parabeln, welche die Curve zu Asymptoten hat, nur in zwei Puncten geschnitten werden. Diese beiden Constructionen sind den bisher behandelten noch beizufügen.

Was die erste dieser Constructionen betrifft, so wollen wir hier denjenigen Fall hervorheben, dafs die osculirende parabolische Asymptote gegeben ist, und demnach die folgende Gleichung wiederum zu Grunde legen:

$$(p+\varkappa)(q^2+\lambda p)+\mu(q+\sigma) = 0, \qquad \text{II. 7.}$$

so dafs die Gleichung: $(p+\varkappa)(q^2+\lambda p) = 0,$

das System dieser osculirenden parabolischen und der geradlinigen Asymptote darstellt. Setzen wir in die vorstehenden beiden Gleichungen für q irgend einen constanten Werth γ ein, so erhalten wir zur Bestimmung der entsprechenden Werthe von p zwei Gleichungen des zweiten Grades. Die Summe der beiden Wurzeln ist offenbar in diesen beiden Gleichungen dieselbe. Also wird die Curve dritter Ordnung einerseits, und das System ihrer Asymptoten andrerseits von der geraden Linie:

$$q = \gamma$$

$$q = \gamma, \qquad (1)$$

nur in zwei Puncten geschnitten, und es fallen die beiden Mitten der beiden Paare von Durchschnittspuncten zusammen. Hiernach erhalten wir, wenn einer der beiden Durchschnittspuncte dieser geraden Linie und der Curve II, 7. gegeben ist, sogleich den andern. Wir können diese Construction mit den Constructionen der 221. Nummer aus demselben Gesichtspuncte betrachten; in so fern nemlich die Linie S und die gerade Linie (1) beide Durchmesser der parabolischen Asymptote sind, schneiden sie sich auf derselben in unendlicher Entfernung. Es findet die eben entwickelte Construction auch dann ihre Anwendung, wenn die parabolische Asymptote eine osculirende höherer Ordnung ist.

Was die zweite der oben erwähnten Constructionen betrifft, so wollen wir ihr die folgende Gleichung zu Grunde legen:

$$p^3 + \lambda q^2 + \mu(p + \varkappa) = 0. \qquad IV.$$

Jedem Werthe von p entsprechen, nach dieser Gleichung, zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von q. Die gerade Linie

$$q = 0,$$

oder die Doppel-Tangente in der Spitze der osculirenden semicubi-parabolischen Asymptote der Curve IV., ist also der geometrische Ort für die Mitte der beiden Durchschnittspuncte dieser Curve und einer beliebigen geraden Linie, die mit der Linie P parallel ist. Ist einer solcher zwei Durchschnittspuncte gegeben, so erhält man den andern also unmittelbar.

§. 4.

Mittelpuncte. Doppelpuncte: Durchschnittspuncte zweier reellen Zweige der Curve, conjugirte Puncte, Rückkehrpuncte. Durchmesser.

225. Wir wollen in den folgenden Nummern zuerst blofs solche Curven dritter Ordnung, welche drei geradlinige Asymptoten haben, betrachten, und überdiefs auch noch voraussetzen, dafs diese geradlinigen Asymptoten alle drei reell seien. Die Resultate, zu welchen wir für diesen allgemeinen Fall gelangen werden, können wir alsdann unmittelbar auf den zweiten allgemeinen Fall, dafs zwei Asymptoten imaginär sind, übertragen, und zuletzt auch diejenigen Modificationen, welche diese allgemeinen Resultate in den untergeordneten Fällen erleiden, leicht übersehen und zusammenstellen.

Bei der in der 211. Nummer entwickelten Construction einer Curve dritter Ordnung haben wir vorausgesetzt, dafs die drei Asymptoten P, Q und R, die Linie S und irgend ein Punct der Curve M gegeben seien. Wir wollen in dem Folgenden nun, indem wir die drei Asymptoten und die Linie S als ein für alle Mal gegebene betrachten, besondere Annahmen über die Lage des Punctes M machen, und untersuchen, wie mit einer veränderten Lage dieses Punctes die Curve ihre Form verändert. Es kann diese Lage überhaupt jede beliebige sein; mit der Beschränkung indefs, dafs, wenn die Curve dritter Ordnung nicht in ein System von drei geraden Linien ausarten soll, der Punct M auf keiner der gegebenen Asymptoten, und auch nicht auf der Linie S, in welchem Falle zwei der drei geraden Linien unendlich weit rücken, angenommen werden darf.

226. Wenn der Punct M insbesondere in die Mitte desjenigen Segmentes fällt, das, auf der geraden Linie SM, welche diesen Punct mit dem Puncte S auf der Asymptote P

verbindet, von den beiden andern Asymptoten Q und R interceptirt wird, so fällt der Constructionspunct M' (ich behalte hier die Bezeichnung der 211. Nummer und der 5. Figur bei) mit dem gegebenen Puncte M zusammen. Die gerade Linie SM ist alsdann eine Tangente der zu construirenden Curve dritter Ordnung und auf dieser Tangente M der Berührungspunct. Von jeder andern Curve dritter Ordnung, welche dieselben drei Asymptoten und dieselbe gerade Linie S hat, wird die eben genannte gerade Linie, aufser in dem Puncte S, noch in solchen zwei Puncten geschnitten, deren Mitte in den Punct S fällt, oder, mit andern Worten, im Puncte M wird eine, überdiefs durch den Punct S gehende Chorde jeder solchen Curve halbirt. Wir wollen hier zunächst den geometrischen Ort für die Mitten aller solcher durch den Punct S gehenden Chorden suchen, oder, was dasselbe heifst, denjenigen geometrischen Ort bestimmen, auf welchem wir den Punct M annehmen müssen, damit SM eine Tangente derjenigen Curve dritter Ordnung sei, welche der jedesmaligen Annahme des Punctes M entspricht.

Es seien, wie früher,

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0,$$

die Gleichungen der drei gegebenen Asymptoten. Es seien ferner q^0 und r^0 diejenigen bestimmten Werthe, welche die linearen Functionen q und r erhalten, wenn sie auf den Punct S, den Durchschnittspunct der Linie S mit der Asymptote P, bezogen werden. Alsdann können wir, indem wir durch $\varkappa$ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen, jede beliebige gerade Linie, welche durch diesen Punct S geht, durch die nachstehende Gleichung darstellen:

$$q - q^0 = \varkappa(r - r^0). \qquad (1)$$

Wir erhalten hiernach denjenigen Werth der Function q, welcher sich auf die Mitte des von den Asymptoten Q und R auf der geraden Linie (1) interceptirten Segmentes bezieht, wenn wir in der vorstehenden Gleichung r gleich Null setzen, und dann den resultirenden Werth von q halb nehmen. Also ergibt sich für diese Mitte:

$$2q = q^0 - \varkappa r^0. \qquad (2)$$

Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2) den unbestimmten Coefficienten $\varkappa$ eliminiren, so erhalten wir die Gleichung des verlangten geometrischen Ortes. Man findet auf diese Weise:

$$2qr - r^0q - q^0r = 0. \qquad (3)$$

Der fragliche Ort ist also eine Hyperbel, welche durch den Durchschnittspunct der Asymptoten Q und R und durch den Punct S geht. Ihr Mittelpunct ist die Mitte zwischen diesen beiden Puncten, und ihre Asymptoten sind den beiden eben genannten Asymptoten Q und R parallel.

Die Mitten derjenigen Segmente, welche auf allen solchen geraden Linien, die einerseits durch den Punct S' und andrerseits durch den Punct S'' gehen, einerseits von den Asymptoten P und R, und andrerseits von den Asymptoten P und Q interceptirt werden, also die Mitten aller Chorden irgend einer der in Rede stehenden Curven dritter Ordnung, welche dieser Curve zum dritten Male einerseits in S' und andrerseits in S'' begegnen: liegen auf zwei neuen Hyperbeln, welche auf ganz analoge Weise geometrisch gegeben sind. Wenn wir die beiden Puncte S' und S'' auf ähnliche Weise, als eben den Punct S, analytisch bestimmen, und dem gemäfs diese drei Puncte auf folgende Art bezeichnen:

$$\left.\begin{matrix} q = q^0 \\ r = r^0 \end{matrix}\right\} S, \qquad \left.\begin{matrix} p = p' \\ r = r' \end{matrix}\right\} S', \qquad \left.\begin{matrix} p = p'' \\ q = q'' \end{matrix}\right\} S'',$$

so finden wir für die Gleichungen der beiden neuen Hyperbeln durch blofse Buchstaben-Vertauschung die folgenden beiden:

$$2pr - r'p - p'r = 0, \quad (4)$$
$$2pq - q''p - p''q = 0. \quad (5)$$

227. Die drei Hyperbeln (3), (4) und (5), deren Gleichungen wir in der vorigen Nummer entwickelt haben, schneiden sich in denselben Puncten. Die Anzahl dieser Durchschnittspuncte reducirt sich indefs auf drei, weil eine Asymptote jeder dieser drei Hyperbeln einer Asymptote jeder der beiden andern parallel ist. Um diese Behauptung zu beweisen, müssen wir nothwendig in Betracht ziehen, dafs die drei Puncte S, S' und S'' in gerader Linie liegen, und also auch, wenn wir analytisch verfahren, die entsprechenden Relationen, welche zwischen den Functionen-Werthen q^0, r^0, p', r', p'' und q'' Statt finden, berücksichtigen.

Wir können die Linie S beliebig durch jede der nachstehenden drei Gleichungen ausdrücken:

$$q^0p + p'q = p'q^0,$$
$$r^0p + p''r = p''r^0,$$
$$r'q + q''r = q''r'.$$

Die Form der ersten dieser drei Gleichungen drückt aus, dafs die bezügliche gerade Linie durch die beiden Puncte S und S' geht; denn diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir einmal $p = 0$ und zugleich $q = q^0$, das andere Mal $q = 0$ und zugleich $p = p'$ setzen. Weil dieselbe gerade Linie zugleich aber auch durch den Punct S' geht und für diesen Punct $p = p''$ und $q = q''$, so mufs eben diese Gleichung auch dann befriedigt werden, wenn wir in derselben den beiden Functionen p und q die besondern Werthe p'' und q'' beilegen. Auf ähnliche Weise werden die beiden übrigen Gleichungen befriedigt, wenn wir in der einen derselben p' und q' für p und q und in der andern q^0 und r^0 für q und r substituiren. Auf diese Weise ergeben sich die folgenden drei Bedingungs-Gleichungen, von welchen jede eine algebraische Folge der beiden übrigen ist:

$$q^0p'' + p'q'' = p'q^0,$$
$$r^0p' + p''r' = p''r^0, \quad (6)$$
$$r'q^0 + q''r^0 = q''r',$$

und von denen wir die beiden letzten auch auf folgende Weise schreiben können:

$$(r^0 - r')p'' = r^0p',$$
$$(r' - r^0)q'' = r'q^0. \quad (7)$$

Nach diesen vorläufigen Erörterungen wollen wir uns zu den drei Gleichungen der drei fraglichen Hyperbeln selbst zurückwenden:

$$2qr - r^0q - q^0r = 0, \quad (3)$$
$$2pr - r'p - p'r = 0, \quad (4)$$
$$2pq - q''p - p''r = 0, \quad (5)$$

und zwischen den beiden ersten dieser Gleichungen die Function r eliminiren. Alsdann kommt:

$$2pq - \frac{r'q^0}{r' - r^0} \cdot p - \frac{r^0p'}{r^0 - r'} \cdot q = 0,$$

eine Gleichung, welche als Folge der Bedingungs-Gleichungen (7) mit der Gleichung (5) identisch ist. Es schneiden sich also die durch die Gleichungen (3), (4) und (5) dargestellten Hyperbeln alle drei in denselben Puncten *).

*) Wir dürfen indefs hierbei nicht übersehen, dafs es sich nur um solche Durchschnittspuncte handelt, die nicht unendlich weit liegen. Denn keineswegs sind die drei vierten Durchschnittspuncte je zweier der drei fraglichen Hyperbeln als in unendlicher Entfernung zusammenfallend zu betrachten, und nur, weil solche

228. Wir haben also in der vorigen Nummer den directen Beweis geführt, dafs, wenn irgend eine Curve dritter Ordnung, welche drei reelle Asymptoten hat, und also durch folgende Gleichung: $pqr + \mu s = 0$ I.
dargestellt werden kann, gegeben ist, es im Allgemeinen drei solche Puncte gibt, von welchen jeder die Eigenschaft besitzt, dafs drei Chorden der Curve — welche ihr zum dritten Male auf den drei Asymptoten in den drei Puncten S, S′ und S″ begegnen — in diesem Puncte sich gegenseitig halbiren. Für alle Curven dritter Ordnung, welche dieselben drei Asymptoten haben und diese in denselben drei Puncten schneiden, sind diese drei Puncte dieselben. Wir wollen sie die Mittelpuncte jeder solchen Curve dritter Ordnung nennen und in dem Folgenden überall durch O, O′ und O″ bezeichnen. Eine Curve dritter Ordnung hat im Allgemeinen drei Mittelpuncte, deren Lage blofs von ihren drei Asymptoten und der Linie S abhängt.

Indem wir zusammenfassen, erhalten wir den nachstehenden Satz:

Wenn irgend ein Dreieck und auf den drei Seiten desselben, P, Q und R, drei Puncte S, S′ und S″, welche in gerader Linie liegen, gegeben sind, so kann man durch diese drei Puncte, im Allgemeinen, auf dreimalige Weise, drei gerade Linien so legen, dafs diejenigen Segmente derselben, welche bezüglich zwischen den Seiten-Paaren Q und R, P und R, P und Q liegen, sich gegenseitig in gemeinsamen Durchschnitte halbiren. Jeder solcher Punct ist ein Mittelpunct aller Curven dritter Ordnung, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks zu ihren Asymptoten haben, und diese Asymptoten in den drei gegebenen Puncten S, S′ und S″ schneiden.

Den ersten Theil des vorstehenden Satzes können wir auch als eine Uebertragung des Resultates, dafs eine Curve dritter Ordnung im Allgemeinen drei Mittelpuncte hat, auf denjenigen Gränzfall, dafs die Curve in das System ihrer drei Asymptoten übergeht, ansehen. Dann aber findet dasselbe unzählige Mal seine Anwendung. Den analytischen Zusammenhang hiervon können wir leicht nachweisen. Da wir nemlich, wenn ein System von drei geraden Linien durch die Gleichung I. dargestellt werden soll, μ gleich Null setzen müssen, so fällt, eben durch diese Voraussetzung, die Function s ganz weg. Diese lineare Function kann also auf keine Weise in Betracht kommen, oder, was dasselbe heifst, es bleibt Alles unverändert, wie wir auch die Linie S annehmen mögen.

229. Wenn wir insbesondere die Voraussetzung machen, dafs der Punct M, den wir zur Bestimmung einer Curve dritter Ordnung als gegeben betrachten, in einen der drei gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der drei Hyperbeln (3), (4) und (5) falle, so ist die fragliche Curve dritter Ordnung von einer besondern Art: sie hat in M einen Doppelpunct.

Aus der Natur der Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Gröfsen geht unmittelbar hervor, dafs es überhaupt Curven gibt, welche Puncte von einer solchen Beschaffenheit haben, dafs jede beliebige, durch einen dieser Puncte gehende, gerade Linie eine Tangente der Curve ist, und dafs ein solcher Punct, ein Doppelpunct, jedesmal dann vorhanden ist, wenn auch nur irgend zwei durch denselben Punct einer Curve gehende gerade Linien zwei Tangenten der Curve in diesem Puncte sind. Wir bezeichnen hierbei als Tan-

---

Durchschnittspuncte, dadurch, dafs die bezüglichen Functionenwerthe unendlich werden, unserer analytischen Darstellungsweise entgehen, ist, von den Gleichungen der drei Hyperbeln, eine die algebraische Folge aus den beiden andern.

gente, ohne Beschränkung, jede solche gerade Linie, von deren Durchschnittspuncten mit der Curve zwei zusammenfallen. Wenn wir nemlich durch die beiden Gleichungen:

$$\eta = 0, \qquad \xi = 0, \tag{8}$$

irgend zwei gerade Linien darstellen, und irgend eine Curve durch den Durchschnittspunct dieser Linien gehen soll, und zwei ihrer Durchschnittspuncte mit jeder derselben in diesem Puncte zusammenfallen sollen, so mufs ihre Gleichung nothwendig folgende Form haben:

$$\Theta + A\eta^2 + B\eta\xi + C\xi^2 = 0,$$

indem wir, der Kürze halber, in Θ alle diejenigen Glieder zusammenfassen, welche η und ξ in einer höhern Potenz als der zweiten enthalten. Stellen wir neben die vorstehende Gleichung die folgende:

$$\eta = \lambda\xi, \tag{9}$$

welche, bei gehöriger Bestimmung von λ, alle möglichen geraden Linien darstellt, die durch den Durchschnitt der beiden Linien (8) gehen, so ist sogleich ersichtlich, dafs auf jeder solchen geraden Linie zwei Durchschnitte mit der Curve zusammenfallen. Zugleich wollen wir hier schon nicht unbemerkt vorübergehen lassen, dafs, im Allgemeinen, auf jeder von zwei der geraden Linien (9), deren Richtung durch die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

bestimmt werden, drei Durchschnittspuncte mit der Curve in einen einzigen Punct zusammenfallen.

Fassen wir, nach diesen allgemeinen Bemerkungen, wiederum blofs nur die Curven dritter Ordnung ins Auge, so ist offenbar, dafs der Punct M, wenn er eine solche Lage hat, wie wir zu Anfang dieser Nummer vorausgesetzt haben, wirklich ein Doppelpunct der bezüglichen Curve ist, und dafs diefs überdiefs schon dadurch bedingt wird, dafs er zugleich auf irgend zwei der drei Hyperbeln (3), (4) und (5) liegt (226). Wir sehen zugleich, dafs in diesen Betrachtungen der indirecte Beweis des Satzes der 227. Nummer, dafs die eben genannten drei Hyperbeln in denselben Puncten sich schneiden, enthalten ist.

Wenn die drei Asymptoten einer Curve dritter Ordnung und die Linie S gegeben sind, so kann, wenn die Curve überhaupt einen Doppelpunct hat, dieser Doppelpunct nur eine dreifache Lage haben. Es fällt derselbe mit einem ihrer drei Mittelpuncte zusammen.

230. Die Bestimmung der Mittelpuncte einer Curve dritter Ordnung, wenn ihre drei Asymptoten und die Linie S gegeben sind, fordert, im Allgemeinen, Constructionen, welche über die Elemente der Geometrie hinausgehen. Hingegen ist die Construction der Linie S, wenn die drei Asymptoten und ein Mittelpunct gegeben sind, eine blofs lineare, und die Construction der beiden übrigen Mittelpuncte entspricht alsdann der Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades. Die allgemeine Construction der Mittelpuncte gründet sich auf den Satz der 228. Nummer, die fragliche Construction der Linie S können wir auf folgenden Satz gründen, der die partielle Umkehrung des eben angezogenen ist.

Wenn irgend ein Dreieck und irgend ein Punct, O', gegeben sind, und man legt durch diesen Punct drei solche gerade Linien, auf welchen von den, paarweise zusammengestellten, Seiten des Dreiecks, Q und R, P und R, P und Q, drei Segmente bestimmt werden, deren Mitten in diesem Puncte zusammenfallen, so schneiden diese drei geraden Linien die Seiten des Dreiecks zum dritten Male in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen. Alle Curven dritter Ordnung, welche die drei Seiten des Dreiecks zu ihren Asymptoten und den gegebenen Punct zu einem ihrer Mittelpuncte

haben, schneiden diese Asymptoten in den drei eben bestimmten, in gerader Linie liegenden Puncten.

Wir wollen diesen Satz auf analytischem Wege direct beweisen, und hiermit zugleich, wenn die drei Asymptoten und ein Mittelpunct einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, die Gleichung der Linie S entwickeln.

Ohne alle Entwicklung, erhalten wir die Gleichungen der drei fraglichen geraden Linien, welche durch den gegebenen Punct, O, gehen, unmittelbar aus den Gleichungen (3), (4) und (5), wenn wir einerseits, statt der drei veränderlichen Functionen p, q und r, diejenigen besondern Werthe derselben, welche sich auf den gegebenen Punct beziehen, und die wir durch p_1, q_1 und r_1 unterscheiden wollen, einsetzen, und andrerseits die constanten Werthe dieser Functionen, welche in den genannten Gleichungen vorkommen, p' und p'', q^0 und q'', r^0 und r' als veränderlich betrachten und an ihrer Stelle wiederum p, q und r schreiben. Man erhält auf diese Weise die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} r_1q+q_1r-2q_1r_1 &= 0, \\ r_1p+p_1r-2p_1r_1 &= 0, \\ q_1p+p_1q-2p_1q_1 &= 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

Die erste dieser drei Gleichungen zum Beispiel stellt alsdann diejenige gerade Linie dar, welche durch den gegebenen Punct, O, geht, für welchen man hat:

$$p = p_1, \qquad q = q_1, \qquad r = r_1,$$

und welche überdiefs von den beiden gegebenen geraden Linien Q und R so geschnitten wird, dafs die Mitte des interceptirten Segmentes mit dem Puncte O zusammenfällt. Hiernach ist nur noch nachzuweisen, dafs die erste der vorstehenden drei Gleichungen (10) sich mit der Gleichung $p = 0$, die zweite derselben mit der Gleichung $q = 0$ und die dritte mit der Gleichung $r = 0$ algebraisch so verbinden lassen, dafs die drei resultirenden Gleichungen identisch dieselben sind. Man überzeugt sich sogleich, dafs diefs wirklich geschehen kann. Denn, wenn man die erste der Gleichungen (10) mit p_1, die zweite mit q_1, die dritte mit r_1 multiplicirt, dann von der ersten Gleichung q_1r_1p, von der zweiten p_1r_1q und von der dritten p_1q_1r abzieht, so ergibt sich, übereinstimmend, jedesmal:

$$q_1r_1p+p_1r_1q+p_1q_1r-2p_1q_1r_1 = 0. \qquad (11)$$

Diese Gleichung ist also keine andere, als die Gleichung der Linie S, wenn P, Q und R die Asymptoten und der Punct O ein Mittelpunct der Curve ist.

Fig. 11. **231.** Die geometrische Construction der Linie S ergibt sich, unter den Voraussetzungen der vorigen Nummer, eben so leicht. Es sei (Fig. 11.) ABC das von den drei Asymptoten P, Q und R gebildete Dreieck, und O der gegebene Punct. Man ziehe durch C und O die gerade Linie CI und nehme auf derselben IO gleich OC; man lege ferner durch I parallel mit der Asymptote P (der Dreiecksseite BC) eine gerade Linie, welche die Asymptoten Q und R bezüglich in den Puncten D und E schneide, und verbinde endlich diese beiden Durchschnittspuncte mit dem Puncte O durch zwei gerade Linien DO und EO. Von der ersten dieser beiden geraden Linien wird die Asymptote R in dem Puncte S″ und von der zweiten die Asymptote Q in dem Puncte S′ geschnitten. Durch S″ und S′ geht die zu construirende gerade Linie S.

232. Wenn eine Curve dritter Ordnung einen Doppelpunct hat und, aufser diesem Doppelpuncte, auch noch die drei Asymptoten der Curve gegeben sind, so können wir, indem wir denselben als einen Mittelpunct der Curve betrachten, nach der vorigen Nummer unmittelbar die Linie S bestimmen, und dann, nach den Methoden des vorigen Paragraphen, die Curve selbst construiren.

Wir können aber auch, bei denselben Voraussetzungen, nach dem Satze der 215. Nummer, unmittelbar auf jeder durch den gegebenen Doppelpunct, O, gehenden geraden Linie, denjenigen einzigen Punct bestimmen, in welchem diese gerade Linie aufserdem noch der Curve begegnet. Nennen wir nemlich die Mitte der drei Durchschnittspuncte einer solchen geraden Linie mit den drei gegebenen Asymptoten, N, und den gesuchten, auf dieser Linie liegenden, neuen Punct der Curve M_1, so ist, nach dem angeführten Satze:

$$NM_1 = 2ON.$$

233. Wir wollen in den nachfolgenden Nummern zu nähern Untersuchungen übe die Mittelpuncte der Curven dritter Ordnung übergehen. Zu diesem Ende wird es nöthig, die drei ganzen und linearen Functionen p, q und r, denen wir bisher ihre ganze Allgemeinheit gelassen haben, näher zu bestimmen. Wir könnten, um diefs zu erreichen, von der geometrischen Construction derselben ausgehen, und etwa die Voraussetzung machen, dafs diese drei Functionen die drei kürzesten Abstände des Punctes, auf den sie bezogen werden, von den drei gegebenen Asymptoten bedeuten. Die analytische Darstellung gewinnt aber ungemein an Eleganz, wenn wir statt von einer solchen geometrischen Bestimmung auszugehen, eine identische Gleichung zwischen den drei linearen Functionen zu Grunde legen. Wir wollen für diese Gleichung, wie in der 180. Nummer, die folgende nehmen:

$$p+q+r \equiv \beta, \qquad (1)$$

eine Gleichung, welche symmetrisch ist in Beziehung auf die drei Functionen p, q und r, während ihrerseits die Curve dritter Ordnung zu ihren drei Asymptoten P, Q und R in einer gleichmäfsigen und ausschliefslichen Beziehung steht. Es bedeutet alsdann β, wenn die drei Asymptoten gegeben sind, auf gleiche Weise, den Werth der Function p, welcher dem Durchschnittspuncte der beiden Asymptoten Q und R, den Werth von q, der dem Durchschnittspunte der Asymptoten P und R, so wie endlich den Werth von r, der dem Durchschnittspuncte der Asymptoten P und Q entspricht; wodurch, wenn β gegeben ist, die geometrische Construction der drei linearen Functionen durch die Vermittelung der drei Asymptoten bestimmt wird. Für diejenigen Puncte, welche innerhalb des von den drei Asymptoten gebildeten Dreiecks liegen, erhalten diese Functionen (wir setzen voraus, dafs β positiv sei) positive Werthe.

Weil die drei Puncte S, S' und S'' bezüglich auf den drei Asymptoten P, Q und R liegen, erhalten wir nach der identischen Gleichung (1) die folgenden drei Bedingungs-Gleichungen zwischen den dreimal zwei Constanten unserer frühern Bezeichnung:

$$q^0+r^0 = \beta, \qquad p'+r' = \beta, \qquad p''+q'' = \beta. \qquad (2)$$

Um ferner auszudrücken, dafs die drei Puncte S, S' und S'' in gerader Linie liegen, ohne diese Linie selbst näher zu bestimmen, haben wir in der 227. Nummer zwischen denselben sechs Constanten die drei Bedingungs-Gleichungen (6), von denen zwei die dritte bedingen, erhalten. Es reduciren sich diese drei Bedingungs-Gleichungen, wenn wir die vorstehenden drei berücksichtigen, auf eine einzige. Für diese können wir jede derselben und auch jede beliebige andere nehmen, welche aus ihnen folgt, und namentlich auch die nachstehende:

$$q^0r'p''+r^0p'q'' = 0, \qquad (3)$$

welche, ihrer Symmetrie wegen, sich auszeichnet, und die man erhält, wenn man zwischen den beiden Gleichungen (7) den Ausdruck (r^0-r') eliminirt.

Nach diesen vorläufigen Erörterungen wenden wir uns zum Gegenstande unserer Untersuchung zurück.

234. Wir wollen zuerst bei der Discussion über die Mittelpuncte der Curven dritter Ordnung die particulären Fälle hervorheben.

Jede der drei zur Bestimmung der Mittelpuncte dienenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2qr - r^0q - q^0r &= 0, \\ 2pr - r'p - p'r &= 0, \\ 2pq - q''p - p''q &= 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

kann sich nur in einem einzigen Falle auf den ersten Grad reduciren, nemlich dann nur, wenn die Constanten derselben beide unendlich werden, das heifst, dann nur, wenn die Linie S einer der drei Asymptoten der Curve dritter Ordnung parallel ist. Alsdann tritt an die Stelle der bezüglichen Hyperbel eine gerade Linie, oder, wenn wir Gränz-Betrachtungen festhalten wollen, das System dieser geraden Linie und einer andern, unendlich weit entfernten, vollkommen unbestimmten, deren Spur ganz aus der analytischen Bezeichnung verschwindet. In diesem Falle hat also die Curve dritter Ordnung nur zwei Mittelpuncte, weil der dritte unendlich weit liegt.

Wir wollen annehmen, es sei die Linie S der Asymptote P parallel, und also die Gleichung der Curve:

$$pqr + \mu(p + \varkappa) = 0. \qquad \text{I, 2.}$$

Alsdann ist $p' = p''$, folglich nach den Gleichungen (2) auch $q'' = r'$. Ferner sind alsdann q^0 und r^0 unendlich, aber zugleich ergibt sich aus der Bedingungs-Gleichung (3):

$$\frac{r^0}{q^0} = -\frac{r'p''}{q''p'} = -1.$$

Wenn wir hiernach die Gleichung (4) durch q^0 dividiren, verwandelt sich dieselbe in die nachstehende:

$$q = r. \qquad (5)$$

Diese Gleichung stellt, was unmittelbar aus ihrer Form hervorgeht, eine solche gerade Linie dar, die durch den Durchschnitt der beiden Asymptoten Q und R geht. Zur vollständigen Bestimmung dieser geraden Linie ist aufserdem nur noch erforderlich, dafs wir irgend einen Punct derselben kennen. Nehmen wir für diesen ihren Durchschnitt mit der Asymptote P, für welchen $p = 0$, so kommt, wenn wir zugleich die identische Gleichung (1) berücksichtigen, für denselben $q = r = \frac{1}{2}\beta$; woraus wir sehen, dafs die fragliche gerade Linie das auf der Asymptote P von den beiden andern Asymptoten Q und R interceptirte Segment halbirt.

Wir finden dieses Resultat durch eine einfache geometrische Betrachtung bestätigt, indem wir erwägen, dafs die erste der Gleichungen (4) überhaupt den geometrischen Ort für die Mitten derjenigen Segmente, die, auf solchen geraden Linien, die durch den Punct S gehen, von den beiden Asymptoten Q und R interceptirt werden, darstellt, und dafs solche gerade Linien in dem vorliegenden Falle der Asymptote P parallel werden.

In der dritten der Gleichungen (4) können wir bezüglich statt q'' und p'' die beiden Constanten der zweiten dieser Gleichungen r' und p' einsetzen. Wenn wir alsdann diese beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2pr - r'p - p'r &= 0, \\ 2pq - r'p - p'q &= 0, \end{aligned} \qquad (6)$$

von einander abziehen und die resultirende Gleichung durch $(2p - p')$ dividiren, so erhalten wir die Gleichung (5). Es schneiden sich also die durch die vorstehenden beiden Gleichungen dargestellten Hyperbeln auf der geraden Linie (5). Sie haben aufserdem die gerade Linie:

$$2p = p',$$

welche der osculirenden Asymptote der Curve dritter Ordnung parallel ist, und in der Mitte zwischen dieser Asymptote P und dem Durchschnitt der beiden andern Q und R hindurchgeht, gemeinschaftlich zu einer ihrer Asymptoten.

235. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, aus der Zusammenstellung der Gleichung (5) mit einer der beiden Gleichungen (6) die beiden Mittelpuncte der Curve dritter Ordnung selbst zu bestimmen und vor Allem diejenigen Fälle zu unterscheiden, wo diese Mittelpuncte reell oder imaginär sind. Die Gleichung (5) gibt, mit Berücksichtigung der identischen Gleichung (1): $r = \frac{1}{2}(\beta - p)$,
und nach der zweiten der drei Bedingungs-Gleichungen (2) ist:
$$r' = \beta - p'.$$
Substituiren wir diese Ausdrücke für r und r' in die erste der Gleichungen (6), so kommt:
$$2p^2 - 3p'p + \beta p' = 0. \qquad (7)$$
Diese Gleichung hat diejenigen Werthe der Function p, welche sich auf die beiden fraglichen Mittelpuncte beziehen, zu ihren beiden Wurzeln. Es hängen diese Werthe einerseits also von der Annahme der Constanten β und andrerseits von der Constanten p', oder, was dasselbe heifst, von der Lage der Linie S, die, bei unsern Voraussetzungen, durch die Gleichung $p = p'$
dargestellt wird, ab. Die Annahme von β hat bei dieser Mittelpunct-Bestimmung nur in sofern Einfluſs, als dadurch die Construction der Werthe der Function p angezeigt und bedingt wird, so daſs also, aus der Discussion der Gleichung (7), unmittelbar die gegenseitige Abhängigkeit zwischen der Lage der Linie S und der Lage und der Natur der beiden Mittelpuncte hervortreten wird. Bei dieser Discussion, welche für die Unterscheidung der verschiedenen Gestalten der hierher gehörigen Curven von Wichtigkeit ist, wollen wir, um uns kürzer ausdrücken zu können, von dem Asymptoten-Dreiecke ausgehen und die Asymptote P als die Basis, die beiden Asymptoten Q und R als die beiden Schenkel, und den Durchschnitt der letztgenannten beiden Asymptoten als den Scheitel dieses Dreiecks bezeichnen. Wenn die Function p kürzeste Abstände der bezüglichen Puncte von der Basis bedeuten soll, so müssen wir β der Höhe des Dreiecks gleich nehmen; für Puncte, die oberhalb der Basis liegen, sind die Werthe dieser Function positiv, für unterhalb derselben liegende Puncte negativ.

Die Discussion der Gleichung (7), für deren Wurzeln wir die nachstehenden Ausdrücke erhalten: $$p = \tfrac{3}{4}p'\left[1 \pm \sqrt{\left(1 - \tfrac{8}{9}\frac{\beta}{p'}\right)}\right], \qquad (8)$$
führt uns zu sechs verschiedenen Fällen, die wir in dem Nachstehenden hervorheben wollen.

1. Für $p' = 0$, das heifst, wenn die Linie S mit der Asymptote P zusammenfällt, und wir also, statt der Curve, das System dreier geraden Linien erhalten, ergibt sich $p^2 = 0$: es fallen die beiden Mittelpuncte auf der Linie S, und, wenn wir Gränz-Betrachtungen festhalten, in der Mitte der Basis zusammen. Diese Lage der Linie S bezeichnet eine Gränze für die Realität der beiden Mittelpuncte. Für jeden beliebigen negativen Werth von p' erhält man für p zwei reelle Werthe, und zwar ist der eine dieser Werthe immer positiv, der andere immer negativ. Der positive Werth von p wächst zugleich mit dem (negativen) Werthe von p', aber langsam; er nähert sich für immer gröfser werdende Werthe von p' der Gränze: $\frac{1}{3}\beta$. Diese letzte Behauptung ergibt sich unmittelbar, wenn wir in der Gleichung (7) p' unendlich grofs nehmen, und wir finden dieselbe auch dann bestätigt, wenn wir den zweiten Theil der Gleichung (8), indem wir das negative Zeichen nehmen, in eine Reihe, die nach steigenden Potenzen von $\frac{\beta}{p'}$ fortschreitet, entwickeln, wonach man erhält:

$$p = \tfrac{8}{4}\beta[\tfrac{4}{5} + \tfrac{8}{51}\cdot\frac{\beta}{p'} + \ldots],$$

und dann $p' = \infty$ setzt. Der negative Werth von p wächst zugleich mit p' über jede endliche Gränze hinaus, und zwar so, dafs der Quotient $\frac{p}{p'}$, indem er immer mehr abnimmt, sich der Gränze $\frac{3}{2}$ nähert. Wenn also die Linie S, von jener Lage aus, in der sie mit der Basis zusammenfällt, sich, indem sie immer mit sich selbst parallel bleibt, unterhalb der Basis immer weiter von derselben entfernt, so bleiben die beiden Mittelpuncte immer reell. Der eine derselben fällt innerhalb des Asymptoten-Dreiecks und rückt von der Mitte der Basis hinauf bis in den Schwerpunct des Dreiecks, während der andere auf der entgegengesetzten Seite der Linie S bleibt, und zwar so, dafs der Quotient des Abstandes dieses Mittelpunctes von der Basis durch den Abstand der Linie S von der Basis, indem er der Gränze $\frac{3}{2}$ sich nähert, immer mehr abnimmt.

2. Wenn p' durchs Unendliche hindurchgehend sein Zeichen ändert, mithin positiv wird, und dann allmälig bis $p' = \beta$ abnimmt, so bleiben die Werthe von p reell, aber werden alsdann beide positiv. Der kleinere dieser Werthe nimmt zu, und zwar von $p = \frac{1}{3}\beta$ bis $p = \frac{1}{2}\beta$, der gröfsere nimmt ab von $p = \infty$ bis $p = \beta$. Der Quotient $\frac{p}{p'}$ nimmt ebenfalls ab, von $\frac{8}{2}$ bis 1. Statt dieses Quotienten wollen wir hier den folgenden betrachten:

$$\frac{p-\beta}{p'-\beta} = \frac{3p' + \sqrt{(9p'^2 - 8\beta p')} - 4\beta}{4(p'-\beta)}.$$

Dieser Quotient wächst, wenn p' abnimmt, bei der Gränze $p' = \beta$ erscheint er unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, dann findet man aber, nach bekannter Methode, dafs der wahre Werth desselben gleich 2 ist. Wenn die Linie S also, nachdem sie durchs Unendliche hindurchgegangen ist, auf der andern Seite der Basis wiedererscheint, so dafs sie also die Schenkel des Asymptoten-Dreiecks, in ihren Verlängerungen über den Scheitel hinaus, schneidet, und alsdann sich diesem Scheitel immer mehr nähert, so bleiben die Mittelpuncte immer noch beide reell. Der eine derselben rückt innerhalb des Dreiecks, vom Schwerpuncte desselben aus, bis zur Hälfte der Höhe hinauf; der andere, weiter entfernte, nähert sich der Basis immer mehr, bleibt aber, bis zur angezeigten Gränze, immer auf der entgegengesetzten Seite der Linie S. Der Quotient des Abstandes dieses Mittelpunctes von dem Scheitel des Dreiecks durch den Abstand der Linie S von diesem Scheitel wächst von der Gränze $\frac{8}{2}$ bis zur Gränze 2.

3. Wenn $p' = \beta$, so erhält man für p die beiden Werthe $\frac{1}{2}\beta$ und β. Wenn also die Linie S durch den Scheitel des Asymptoten-Dreiecks geht, so liegt ein Mittelpunct in der Mitte der Höhe des Dreiecks, und der andere fällt auf der Linie S, mit dem Scheitel des Dreiecks, dem Durchschnitte der beiden Asymptoten Q und R zusammen.

4. Wenn der Werth von p' von β bis $\frac{8}{5}\beta$ abnimmt, so bleiben die beiden Werthe von r immer noch reell und positiv, der kleinere wächst von $\frac{1}{2}\beta$ bis $\frac{2}{3}\beta$, der gröfsere nimmt ab von β bis $\frac{2}{3}\beta$. Wenn also die Linie S, von ihrer Lage durch den Scheitel ausgehend, immer parallel mit sich selbst und der Basis bleibend, dieser sich allmälig bis auf $\frac{8}{5}$ der Höhe des Dreiecks nähert, so fallen beide Mittelpuncte beständig zwischen der Linie S und der Basis. Sie nähern sich einander immer mehr an, indem der eine von der Mitte der Höhe des Dreiecks bis zu $\frac{2}{3}$ derselben ansteigt, der andere aber, von dem Scheitel des Dreiecks aus, bis zu demselben Puncte herunterrückt.

5. Wenn $p' = \frac{8}{9}\beta$, so sind die beiden Werthe von p einander gleich und jeder gleich $\frac{4}{9}\beta$. Wenn die Linie S also um $\frac{8}{9}$ der Höhe des Asymptoten-Dreiecks von der Basis desselben entfernt ist, so fallen die beiden Mittelpuncte in $\frac{4}{9}$ der Höhe des Dreiecks zusammen.

6. Wenn p' kleiner als $\frac{8}{9}\beta$, aber immer positiv ist, so werden die beiden Werthe von p imaginär. Wenn also die Linie S die Schenkel des Asymptoten-Dreiecks in einer Entfernung von der Basis, welche weniger als $\frac{8}{9}$ der Höhe des Dreiecks beträgt, schneidet, so gibt es keine reellen Mittelpuncte.

236. In der vorigen Nummer haben wir denjenigen Fall, dafs die Linie S unendlich weit liegt, und die bezügliche Curve also drei osculirende Asymptoten hat, und durch nachstehende Gleichung:

$$pqr + \mu = 0, \qquad \text{I, 3.}$$

dargestellt werden, beiläufig schon als einen Gränzfall berührt. In diesem Falle reduciren sich, weil alsdann $\mp r' = \mp p' = \infty$, auch die beiden Gleichungen (6) auf den ersten Grad, und hiernach treten an die Stelle der Gleichungen (4) die folgenden:

$$q = r,$$
$$p = r,$$
$$p = q.$$

Von diesen drei Gleichungen wird jede durch die beiden übrigen bedingt. Es schneiden sich die bezüglichen drei geraden Linien in einem und demselben Puncte, für welchen:

$$p = q = r = \tfrac{1}{3}\beta.$$

Eine Curve dritter Ordnung mit drei osculirenden Asymptoten hat also, weil zwei Mittelpuncte derselben unendlich weit liegen, im engern Sinne nur einen einzigen Mittelpunct, und dieser fällt in die Mitte (den Schwerpunct) des von den drei Asymptoten gebildeten Dreiecks.

237. Die in den drei letzten Nummern betrachteten Fälle sind die einzigen, in welchen die Anzahl der Mittelpuncte sich reducirt. Aufserdem aber gibt es noch zwei besondere Fälle, wo die Bestimmung der Mittelpuncte, die, im Allgemeinen, auf die Auflösung einer Gleichung des dritten Grades sich gründet, blofs solche Constructionen fordert, welche über die Elemente der Geometrie nicht hinausgehen. Diese beiden Fälle sind diejenigen, in welchen ein Mittelpunct sich unmittelbar ergibt, und dadurch die Bestimmung der beiden andern nur noch von einer Gleichung des zweiten Grades abhängt. In dem einen dieser Fälle, die wir beide nach einander betrachten wollen, geht die Linie S durch den Durchschnittspunct zweier der drei Asymptoten; in dem andern schneiden sich die drei Asymptoten in demselben Puncte.

238. Wenn wir voraussetzen, dafs die Linie S durch den Durchschnitt der beiden Asymptoten Q und R geht, so ist:

$$p' = p'' = \beta, \qquad r' = 0, \qquad q'' = 0,$$

wonach die Gleichungen (4) in die folgenden übergehen:

$$\begin{aligned} 2qr - r^0q - q^0r &= 0, \\ r(2p - \beta) &= 0, \\ q(2p - \beta) &= 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Zuvörderst zeigen die letzten beiden dieser drei Gleichungen, und zwar in Uebereinstimmung mit der ersten, dafs ein Mittelpunct auf der Linie S mit dem Durchschnitte der beiden Asymptoten Q und R zusammenfällt. Dann zeigen diese beiden letzten Gleichungen ferner, dafs die beiden andern Mittelpuncte auf derjenigen geraden Linie liegen, welche der

Asymptote P parallel ist, und durch die halbe Höhe des Asymptoten-Dreiecks geht, ohne dafs indefs auf dieser geraden Linie die Lage der beiden Mittelpuncte durch die Gleichungen bestimmt würde. Zum Behuf dieser Bestimmung müssen wir die Gleichung:

$$2p-\beta=0,$$

an deren Stelle wir, nach der identischen Gleichung (1), auch folgende schreiben können:

$$q+r-\tfrac{1}{2}\beta=0, \qquad (10)$$

mit der ersten der Gleichungen (9) zusammenstellen. Wenn wir zwischen der letztgenannten Gleichung und der Gleichung (10) etwa q eliminiren, und zugleich berücksichtigen, dafs $q^0=\beta-r^0$, so finden wir

$$r^2-r^0r+\tfrac{1}{4}\beta r^0=0. \qquad (11)$$

Die Realität der beiden Wurzeln dieser Gleichung hängt von dem Zeichen, welches der Werth des Ausdrucks $r^0(r^0-\beta)$ erhält, ab. Diese beiden Wurzeln sind einander gleich, wenn entweder $r^0=0$, oder $r^0=\beta$,

dann aber fällt die Linie S mit der Asymptote R oder mit der Asymptote Q zusammen, und, im eigentlichen Sinne des Wortes, erhalten wir keine Curve. Die beiden Wurzeln sind reell, wenn $r^0<0$ oder $r^0>\beta$,

das heifst, wenn die Linie S der Basis des Asymptoten-Dreiecks in den Verlängerungen derselben begegnet. Sie sind imaginär, wenn

$$r^0>0<\beta,$$

das heifst, wenn die Linie S die Basis selbst trifft.

Die halbe Summe der beiden Wurzeln der Gleichung (11) ist gleich $\frac{1}{2}r^0$, also demjenigen Werthe der Function r, welcher dem in der halben Höhe des Asymptoten-Dreiecks liegenden Puncte der Linie S entspricht. Es liegen also die beiden Mittelpuncte zu beiden Seiten dieser Linie in gleicher Entfernung von derselben.

Wenn wir die Wurzeln der Gleichung (11) durch r_1 und r_2 unterscheiden, so ist ferner:

$$(r_1-\tfrac{1}{4}\beta)(r_2-\tfrac{1}{4}\beta)\equiv r_1r_2-\tfrac{1}{4}\beta(r_1+r_2)+\tfrac{1}{16}\beta^2=\tfrac{1}{16}\beta^2.$$

Die geometrische Deutung dieses Resultates zeigt uns, dafs die beiden Mittelpuncte auf derjenigen geraden Linie, welche der Basis des Dreiecks parallel ist und durch die Mitte der Höhe desselben geht, so liegen, dafs das Product ihrer Abstände von der Mitte des, auf dieser geraden Linie von den beiden Asymptoten Q und R interceptirten Segmentes dem Quadrate der Hälfte dieses Segmentes immer gleich bleibt, wie sich auch die Linie S um ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct mit den beiden Asymptoten Q und R drehen mag. Insbesondere finden wir hierin auch die Bestätigung, dafs, wenn die Linie S zugleich der Asymptote P parallel ist (ein Fall, den wir in der 235. Nummer unter 3. schon betrachtet haben), der eine Mittelpunct unendlich weit und der andere in gleichen Abständen von den beiden Asymptoten Q und R liegt.

239. Wenn die drei Asymptoten der Curve dritter Ordnung in einem und demselben Puncte sich schneiden, so müssen wir β gleich Null setzen, so dafs an die Stelle der identischen Gleichung (1) nun die folgende tritt:

$$p+q+r\equiv 0,$$

wonach insbesondere auch

$$q^0+r^0=0, \qquad p'+r'=0, \qquad p''+q''=0.$$

Die Gleichungen (4), welche wir hiernach auch auf folgende Weise schreiben können:

$$\begin{aligned} 2qr-q^0(r-q)&=0,\\ 2pr-p'(r-p)&=0,\\ 2pq-p''(q-p)&=0, \end{aligned} \qquad (12)$$

werden alle drei befriedigt, wenn wir zugleich $p = 0$ und $q = 0$ setzen, weil alsdann auch $r = 0$. Es fällt also ein Mittelpunct in den gemeinsamen Durchschnitt der drei Asymptoten.

Wenn wir die erste der vorstehenden drei Gleichungen (12) mit p' und die zweite derselben mit q^0 multipliciren, diese beiden Gleichungen addiren, und dann, indem wir zugleich berücksichtigen, dafs $r = -(p+q)$, durch $2r$ dividiren, so ergibt sich:

$$q^0p+p'q = \tfrac{3}{2}p'q^0. \qquad (13)$$

Es stellt diese Gleichung eine gerade Linie dar, welche mit der Linie S, deren Gleichung wir in der 227. Nummer schon unter folgender Form:

$$q^0p+p'q = p'q^0,$$

dargestellt haben, parallel ist und um die Hälfte weiter als diese von dem gemeinsamen Durchschnittspuncte der drei Asymptoten entfernt ist.

Wenn wir ferner die erste der Gleichungen (12) mit p, die zweite derselben mit q multipliciren und dann abziehen, so kommt:

$$q^0p^2+2(q^0-p')pq-p'q^2 = 0. \qquad (14)$$

Die beiden Mittelpuncte liegen also auch auf dem Systeme der beiden durch diese Gleichung dargestellten geraden Linien. Diese geraden Linien gehen durch den Durchschnittspunct der Asymptoten. Wenn die Linie S parallel mit sich selbst fortrückt, so bleibt das Verhältnifs der beiden Constanten q^0 und p' unverändert dasselbe und hiernach also auch die letzte Gleichung, welche, in Beziehung auf diese beiden Constanten, homogen ist. Verschiebt man also die Linie S parallel mit sich selbst, so bleiben die beiden Mittelpuncte auf zwei festen geraden Linien (14), und liegen überdiefs immer auf einer geraden Linie (13), die ebenfalls mit der Linie S parallel bleibt.

Um die Lage der beiden Mittelpuncte auf der geraden Linie (13) vollkommen zu bestimmen, wollen wir zwischen der Gleichung dieser geraden Linie und der letzten der drei Gleichungen (12) die Function q eliminiren. Auf diesem Wege finden wir, wenn wir zugleich berücksichtigen, dafs (227. Nummer (6)):

$$q^0p''+p'q'' = p'q^0,$$

die nachstehende Gleichung:

$$p^2-(p'+p'')p+\tfrac{3}{4}p'p''.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung können weder imaginär noch — den Fall, welchen wir am Ende dieser Nummer berühren werden, wo p' und p'' Null sind, ausgenommen — einander gleich sein. Ihre Summe ist gleich $(p'+p'')$. Man erhält hieraus sogleich für die Mitte (den Schwerpunct) der bezüglichen beiden Mittelpuncte und des dritten, in den gemeinsamen Durchschnitt der Asymptoten fallenden, Mittelpunctes:

$$p = \tfrac{1}{3}(p'+p'');$$

und derselbe Werth von p ergibt sich auch für die Mitte der drei Durchschnittspuncte der Linie S mit den drei Asymptoten P, Q und R. Es fallen, wie man leicht einsieht, die beiden Mitten in einen und denselben Punct zusammen.

Wenn insbesondere die Linie S einer der drei Asymptoten parallel ist, etwa der Asymptote P, so fällt ein Mittelpunct, wie in dem eben betrachteten Falle, in den gemeinsamen Durchschnittspunct der drei Asymptoten, ein zweiter liegt, wie in dem Falle der 234. Nummer, nach der Richtung der genannten Asymptote P unendlich weit. Der dritte Mittelpunct endlich liegt auf derjenigen geraden Linie, welche den Durchschnittspunct der Asymptoten mit der Mitte des, auf der Linie S, durch die beiden Asymptoten Q und R, interceptirten Segmentes verbindet, und zwar, auf entgegengesetzter Seite, von der Linie S

halb so weit entfernt, als von derselben geraden Linie der gemeinsame Durchschnittspunct der Asymptoten.

Wenn endlich die Linie S ebenfalls durch den gemeinsamen Durchschnitt der drei Asymptoten geht, so fallen alle drei Mittelpuncte in diesem Durchschnittspuncte zusammen. Jede durch denselben gehende, von der Curve begränzte, gerade Linie wird alsdann in eben diesem Puncte halbirt.

240. Nachdem wir in den letzten Nummern die ausgezeichneten besondern Fälle discutirt haben, wollen wir uns nun zu den allgemeinen Untersuchungen über die Mittelpuncte der Curven dritter Ordnung mit drei reellen Asymptoten zurückwenden. Hierbei mufs unsere nächste Aufgabe sein, diejenigen Fälle, wo die Mittelpuncte alle drei reell sind, von denjenigen, wo nur einer reell ist, zu unterscheiden, eine Aufgabe, welche sich an die Bestimmung des Uebergangs-Falles, wo zwei Mittelpuncte zusammenfallen, anknüpft. Wir wollen uns hiernach die Frage stellen: „wo mufs, wenn drei gerade Linien gegeben sind, ein Punct angenommen werden, wenn in diesem Puncte zwei Mittelpuncte einer Curve dritter Ordnung, welche die drei gegebenen geraden Linien zu ihren Asymptoten hat, zusammenfallen sollen." Jeder beliebig angenommene Punct ist der Mittelpunct nicht nur einer, sondern unendlich vieler solcher Curven dritter Ordnung; die Bedingung aber, dafs in den angenommenen Punct zwei Mittelpuncte zusammenfallen sollen, führt uns offenbar zu einem geometrischen Orte, auf welchem dieser Punct liegen mufs. Dieser geometrische Ort ist es, den wir jetzt bestimmen wollen.

Wenn zwei Mittelpuncte in einen einzigen Punct zusammenfallen sollen, so müssen die drei, durch die Gleichungen (4) der 234. Nummer dargestellten, Hyperbeln sich in diesem Puncte berühren. Es ist hinreichend, irgend zwei dieser drei Hyperbeln zu betrachten; wir wollen hier etwa diejenigen beiden nehmen, welche durch die beiden ersten jener drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2qr - r^0q - q^0r &= 0, \\ 2pr - r'p - p'r &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

dargestellt werden. Wenn wir voraussetzen, dafs die vier Constanten in diesen beiden Gleichungen, welche schon durch die beiden-Bedingungs-Gleichungen:

$$q^0 + r^0 = \beta, \qquad p' + r' = \beta, \tag{2}$$

mit einander verbunden sind, so bestimmt werden, dafs die fraglichen beiden Hyperbeln sich berühren, so müssen, in Beziehung auf den Berührungspunct, zugleich mit den beiden Gleichungen (1), auch die beiden Differential-Gleichungen derselben befriedigt werden. Wenn wir differentiiren, ergibt sich:

$$\begin{aligned} (2r - r^0)\,dq + (2q - q^0)\,dr &= 0, \\ (2r - r')\,dp + (2p - p')\,dr &= 0, \end{aligned}$$

und wenn wir die ursprünglichen Gleichungen zugleich berücksichtigen:

$$\begin{aligned} q^0r^2dq + r^0q^2dr &= 0, \\ p'r^2dp + r'p^2dr &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ueberdiefs ist:

$$dp + dq + dr = 0. \tag{4}$$

Um hiernach die Gleichung des gesuchten Ortes zu erhalten, wollen wir zuvörderst zwischen den letzten drei Gleichungen die Differentialien eliminiren. Auf diesem Wege gelangen wir sogleich zu der Gleichung:

$$\frac{r'}{p'} \cdot p^2 + \frac{r^0}{q^0} \cdot q^2 - r^2 = 0. \tag{5}$$

Dann bleibt uns blofs noch übrig, zwischen dieser resultirenden Gleichung und den beiden

Gleichungen (1) die Elimination der Constanten, deren Anzahl sich nach den obigen beiden Bedingungs-Gleichungen (2) auf zwei reducirt, zu bewerkstelligen. Es ist

$$\frac{r^0}{q^0} = \frac{\beta}{q^0} - 1, \qquad \frac{r'}{p'} = \frac{\beta}{p'} - 1,$$

wonach die Gleichung (5) zunächst in die folgende übergeht:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \beta\left[\frac{p^2}{p'} + \frac{q^2}{q^0}\right];$$

und diese Gleichung verwandelt sich wiederum, da sich aus den Gleichungen (1):

$$q^0 = \frac{2r-\beta}{r-q}\cdot q, \qquad p' = \frac{2r-\beta}{r-p}\cdot p,$$

ergibt, nach einer einfachen Reduction in die nachstehende:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \tfrac{1}{2}\beta(p+q+r).$$

Diese Gleichung ist die Gleichung des gesuchten Ortes. Wir können dieselbe, indem wir berücksichtigen, dafs

$$p + q + r = \beta, \tag{6}$$

auch unter jeder der folgenden beiden einfachern Formen schreiben:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \tfrac{1}{2}\beta^2, \tag{7}$$

$$pq + pr + qr = \tfrac{1}{4}\beta^2. \tag{8}$$

Wir sehen zuvörderst, dafs der gesuchte Ort von der zweiten Ordnung und zwar nothwendig eine Ellipse ist. Die vollständige geometrische Bestimmung derselben knüpft sich, mit gleicher Leichtigkeit, an jede der beiden letzten Gleichungen an. Jede derselben wird befriedigt, wenn wir, in Uebereinstimmung mit der Gleichung (6):

$$\begin{aligned} p &= 0 \quad \text{und zugleich} \quad q = r = \tfrac{1}{2}\beta, \\ q &= 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad p = r = \tfrac{1}{2}\beta, \\ r &= 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad p = q = \tfrac{1}{2}\beta, \end{aligned} \tag{9}$$

setzen. Es geht also die fragliche Ellipse durch die drei Mitten der drei Seiten des von den drei Asymptoten der Curven dritter Ordnung gebildeten Dreiecks. Differentiiren wir ferner etwa die Gleichung (7), so kommt:

$$pdp + qdq + rdr = 0.$$

Um diese Gleichung zugleich mit der ebengenannten Gleichung zu befriedigen, können wir

$$\begin{aligned} p &= 0 \quad \text{und zugleich} \quad dp = 0, \\ q &= 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad dq = 0, \\ r &= 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad dr = 0, \end{aligned}$$

setzen. Denn diese Gleichungen-Paare geben bezüglich die nachstehenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} qdq + rdr &= 0, \\ pdp + rdr &= 0, \\ pdp + qdq &= 0, \end{aligned}$$

welche als Folge der Gleichungen (9) und der Bedingungs-Gleichung (4) befriedigt werden. Es wird also die fragliche Ellipse von den drei Asymptoten berührt.

Wenn irgend drei gerade Linien gegeben sind, so ist der geometrische Ort für diejenigen Puncte, in welche zwei Mittelpuncte solcher Curven dritter Ordnung, welche die drei gegebenen geraden Linien zu ihren Asymptoten haben, zusammenfallen, eine Ellipse, welche die Seiten des von den gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks in ihren Mitten berührt.

Es ist bekannt, dafs diese Ellipse unter allen Ellipsen, die demselben Dreieck eingeschrieben sind, diejenige ist, welche die gröfste Fläche umschliefst, und dafs ihr Mittel-

punct in die Mitte (den Schwerpunct) des Dreiecks fällt. Wenn wir den Berührungspunct auf der Basis (einer beliebigen Seite) dieses Dreiecks mit dem gegenüberliegenden Winkelpuncte durch eine gerade Linie verbinden, so geht diese gerade Linie durch den Mittelpunct und begegnet der Ellipse zum zweiten Male in zwei Drittheil der Höhe des Dreiecks. Hiernach stimmt mit dem vorstehenden allgemeinen Satze das unter 5. in der 235. Nummer erhaltene Resultat überein.

241. Wenn wir einen der drei Mittelpuncte einer Curve dritter Ordnung, deren drei Asymptoten gegeben sind, ebenfalls als gegeben betrachten, so können wir die Gleichung derjenigen geraden Linie entwickeln, auf welcher die beiden andern Mittelpuncte liegen. Für den gegebenen Mittelpunct sei:

$$p = p_1, \qquad q = q_1, \qquad r = r_1.$$

Es findet alsdann zwischen diesen Functionen-Werthen zunächst die Bedingungs-Gleichung:

$$p_1 + q_1 + r_1 = \beta,$$

Statt. Da ferner dieser Mittelpunct zugleich auf den, durch die Gleichungen (1):

$$\begin{aligned} 2qr - r^0q - q^0r &= 0, \\ 2pr - r'p - p'r &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

dargestellten Hyperbeln liegt, so ergeben sich aufserdem auch noch die folgenden beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2q_1r_1 - r^0q_1 - q^0r_1 &= 0, \\ 2p_1r_1 - r'p_1 - p'r_1 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Wenn wir hiernach die erste der beiden Gleichungen (1) mit q_1r_1, die erste der Gleichungen (10) mit qr multipliciren und dann abziehen, wenn wir ferner die zweite der Gleichungen (1) mit p_1r_1, die zweite der Gleichungen (10) mit pr multipliciren und dann wiederum abziehen, so kommt:

$$\begin{aligned} r^0(r - r_1)q_1q + q^0(q - q_1)r_1r &= 0, \\ r'(r - r_1)p_1p + p'(p - p_1)r_1r &= 0, \end{aligned}$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man sogleich:

$$(r - r_1)\{p_1p + q_1q\} + \left(\frac{q^0}{r^0}(q - q_1) + \frac{p'}{r'}(p - p_1)\right)r_1r = 0.$$

Diese Gleichung nimmt, wenn wir statt q^0 und p' ihre Werthe $(\beta - r^0)$ und $(\beta - r')$ einsetzen und zugleich berücksichtigen, dafs

$$-(q - q_1) - (p - p_1) = (r - r_1),$$

die nachstehende Form an:

$$(r - r_1)\{p_1p + q_1q + r_1r\} + \beta\left(\frac{r_1 \cdot qr - r \cdot q_1r_1}{r^0} + \frac{r_1 \cdot pr - r \cdot p_1r_1}{r'}\right) = 0.$$

Substituiren wir ferner im zweiten Gliede dieser Gleichung für die Ausdrücke $\frac{qr}{r^0}$, $\frac{pr}{r'}$, $\frac{q_1r_1}{r^0}$ und $\frac{p_1r_1}{r'}$ ihre Werthe aus den vier Gleichungen (1) und (10), so ergibt sich:

$$(r - r_1)\{p_1p + q_1q + r_1r\} + \tfrac{1}{2}\beta\{r_1(p + q) - r(p_1 + q_1)\} = 0,$$

und endlich, da

$$\begin{aligned} p + q &= \beta - r, \\ p_1 + q_1 &= \beta - r_1, \end{aligned}$$

die nachstehende einfache und symmetrische Gleichung:

$$(r - r_1)\{p_1p + q_1q + r_1r - \tfrac{1}{2}\beta^2\} = 0.$$

Die Form dieser End-Gleichung haben wir zum Theil voraussehen und darnach die vor-

vorstehenden Entwicklungen anlegen können. Denn da die beiden Hyperbeln (1) sich nur in drei Puncten schneiden, während der vierte Durchschnittspunct nach der Richtung der Asymptote R unendlich weit liegt, so müssen ihre Gleichungen sich nothwendig zu der Gleichung eines Systemes solcher zwei gerader Linien verbinden lassen, von welchen die eine durch einen beliebigen der drei Mittelpuncte, denjenigen, welchen wir als gegeben betrachten, geht und der Asymptote R parallel ist; während die andere die beiden übrigen Mittelpuncte verbindet. Indem wir also in der letzten Gleichung den Factor $(r-r_1)$ unterdrücken, erhalten wir für die zu bestimmende gerade Linie folgende Gleichung:

$$p_1p+q_1q+r_1r = \tfrac{1}{2}\beta^2. \qquad (11)$$

In dieser Gleichung erkennen wir sogleich die Polare des gegebenen Mittelpunctes, dem die Functionen-Werthe p_1, q_1 und r_1 entsprechen, in Beziehung auf die, durch die Gleichung (7) der vorigen Nummer dargestellte Ellipse. Und, da wir nach einander jeden der drei Mittelpuncte als den gegebenen ansehn können, gelangen wir also zu dem nachstehenden Satze:

Wenn drei beliebige gerade Linien gegeben sind, so sind die drei Mittelpuncte jeder beliebigen Curve dritter Ordnung, welche die gegebenen geraden Linien zu ihren Asymptoten hat, drei zugeordnete Pole in Beziehung auf diejenige Ellipse, welche die drei Seiten des von diesen geraden Linien gebildeten Dreiecks in ihren drei Mitten berührt.

Wenn insbesondere also zwei Mittelpuncte in irgend einen Punct der fraglichen Ellipse zusammenfallen (240), so liegt der dritte Mittelpunct auf der Tangente der Ellipse in diesem Puncte. Die Polare dieses dritten Mittelpunctes ist eine gemeinschaftliche Tangente derjenigen drei Hyperbeln, durch welche wir, nach der 226. Nummer, die drei Mittelpuncte bestimmen, und auf dieser gemeinschaftlichen Tangente ist jener Punct der gemeinschaftliche Berührungspunct.

242. Wenn wir in die erste der beiden Gleichungen (1):

$$2qr-r^0q-q^0r = 0,$$

für q und q^0 die gleichgeltenden Ausdrücke $(\beta-p-r)$ und $(\beta-r^0)$ einsetzen, und dann in dieser Gleichung p absondern, so finden wir:

$$p = -\frac{2r^2-(\beta+2r^0)r+r^0\beta}{2r-r^0},$$

und wenn wir dann diesen Ausdruck von p, an die Stelle dieser Function, in der zweiten der Gleichungen (1), die wir auch folgendergestalt schreiben können:

$$(2r-r')p-(\beta-r')r = 0,$$

substituiren, so enthält die resultirende Gleichung nur noch die Function r. Wir erhalten auf diese Weise, indem wir nach abnehmenden Potenzen dieser Function ordnen, ohne uns um die spätern Glieder zu kümmern:

$$r^3-(r^0+r')r^2+\ldots = 0.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung dritten Grades beziehen sich auf die drei fraglichen Mittelpuncte; wenn wir dieselben durch r_1, r_2 und r_3 bezeichnen, so gibt die allgemeine Theorie der Gleichungen: $r_1+r_2+r_3 = r^0+r'$.

Da r^0 und r' sich auf die beiden Durchschnitte, S und S', der Linie S mit den beiden Asymptoten P und Q beziehen, und $r = 0$ dem Durchschnitte S'' dieser Linie mit der dritten Asymptote R entspricht, so ist ersichtlich, dafs, einerseits, der Mitte (dem Schwerpuncte) der drei Mittelpuncte und, andrerseits, der Mitte der drei in gerader Linie liegenden Durchschnittspuncte der Curve mit ihren drei Asymptoten, derselbe Werth der

Function r entspricht; und da hiernach, bei unserer symmetrischen Bezeichnung, diesen beiden Mitten auch gleiche Werthe der beiden andern linearen Functionen p und q entsprechen, so tritt uns der folgende neue Satz entgegen:

„Wenn drei beliebige gerade Linien gegeben sind, so fällt die Mitte der drei Mittelpuncte jeder beliebigen Curve dritter Ordnung, welche die drei gegebenen geraden Linien zu ihren Asymptoten hat, mit der Mitte ihrer drei Durchschnittspuncte mit diesen drei geraden Linien zusammen."

Fig. 12. 243. Wenn einer der drei Mittelpuncte einer Curve dritter Ordnung und ihre drei Asymptoten gegeben sind, so erhalten wir sogleich die Linie S (231) und demnächst die Mitte ihrer drei Durchschnittspuncte S, S′ und S″ mit den drei Asymptoten P, Q und R. Nennen wir den gegebenen Mittelpunct O und diese Mitte W, so geht die gerade Linie OW, welche diese beiden Puncte verbindet, genugsam verlängert, durch die Mitte, V, der beiden übrigen Mittelpuncte O′ und O″ (242). Der Punct V ist durch diese gerade Linie und (241) die Polare des gegebenen Mittelpunctes O in Beziehung auf diejenige Ellipse, welche die drei Seiten des Asymptoten-Dreiecks in ihren Mitten berührt, vollkommen bestimmt. Ueberdiefs ist der Punct V unmittelbar dadurch bestimmt (242), dafs $VW = \frac{1}{2}WO$.

Die Bestimmung der beiden Mittelpuncte O′ und O″ selbst, nachdem ihre Mitte V bekannt ist, ergibt sich leicht nach dem Satze der 241. Nummer. Denn, nach diesem Satze, liegen sie auf der Polaren des Punctes O, und zwar so, dafs sie mit den beiden Durchschnittspuncten dieser Polaren und der fraglichen Ellipse vier harmonische Theilungspuncte bilden. Wenn wir diese beiden Durchschnittspuncte durch N und N′ und ihre Mitte durch L bezeichnen, so ist hiernach auch:

$$VN \cdot VN' = \tfrac{1}{4}\overline{O'O''}^2, \qquad LO' \cdot LO'' = \tfrac{1}{4}\overline{NN'}^2.$$

Legen wir etwa die zweite dieser Bestimmungen zu Grunde, und setzen, der Kürze halber, $LV = a$ und $\frac{1}{4}\overline{NN'}^2 = b$, so stellen sich die beiden Segmente LO′ und LO″ als die beiden Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichung dar:

$$z^2 - 2az + b = 0.$$

Es bedarf wohl kaum einer besondern Erinnerung, dafs diese Gleichung auch für den Fall, dafs die Durchschnittspuncte N und N′ imaginär sind, ihre volle Anwendbarkeit behält.

Wenn insbesondere zwei Mittelpuncte in irgend einen Punct der Ellipse, welche die drei Seiten des Asymptoten-Dreiecks in ihren Mitten berührt, zusammenfallen, so liegt auf der Tangente an die Ellipse in diesem Puncte der dritte Mittelpunct von der Linie S, auf entgegengesetzter Seite, doppelt so weit entfernt als die beiden zusammenfallenden. (241, 242.)

Wir sehen endlich auch, dafs, wenn ein Mittelpunct nach der Richtung einer der drei Asymptoten unendlich weit liegt, die Polare desselben derjenige Durchmesser der Ellipse ist, welcher den Punct, in welchem jene Asymptote von dieser Ellipse berührt wird, mit dem Durchschnitte der beiden andern Asymptoten verbindet. In diesem Falle gründet sich die Bestimmung der Mittelpuncte unmittelbar auf eine Gleichung zweiten Grades (235), die wir ohne Mühe auch aus der letzten Gleichung ableiten können.

244. Wir sind schon früher (229) durch allgemeine Betrachtungen zu dem Resultate gelangt, dafs, wenn eine Curve dritter Ordnung durch die Gleichung

$$pqr + \mu s = 0 \qquad \text{I.}$$

dargestellt wird, in der wir, nachdem die drei Asymptoten und die Linie S gegeben sind, den unbestimmten Coefficienten μ so bestimmen, dafs die Curve durch einen der drei

Mittelpuncte geht: dieser Mittelpunct ein Doppelpunct der Curve ist. Wir wollen dieses Resultat durch eine directe analytische Nachweisung bestätigen und zugleich auf die Unterscheidung der verschiedenen Arten solcher Puncte eingehen.

Indem wir die auf einen beliebigen der drei Mittelpuncte sich beziehenden Werthe der drei Functionen p, q und r durch unten angehängte Marken, wie früher schon, unterscheiden, ist die Gleichung der Linie S die nachstehende (230):

$$q_1r_1p + p_1r_1q + p_1q_1r - 2p_1q_1r_1 = 0.$$

Hiernach können wir die Gleichung I. auf folgende Weise schreiben:

$$pqr + \mu(q_1r_1p + p_1r_1q + p_1q_1r - 2p_1q_1r_1) = 0.$$

Es stellt diese Gleichung, wenn wir, nach einander, für μ alle möglichen Werthe einsetzen, unendlich viele Curven dritter Ordnung dar, welche alle dieselben Asymptoten und überdiefs dieselben drei Mittelpuncte, oder, was hiermit gleichgeltend ist, dieselbe Linie S haben. Durch irgend einen Punct der Curve ist μ, und somit die Curve selbst, vollkommen bestimmt. Indem wir $\mu = -1$ nehmen, wonach wir folgende Gleichung erhalten:

$$pqr - (q_1r_1p + p_1r_1q + p_1q_1r) + 2p_1q_1r_1 = 0, \qquad (12)$$

unterwerfen wir die Curve der Bedingung, durch jenen Mittelpunct zu gehen, für welchen:

$$p = p_1, \qquad q = q_1, \qquad r = r_1. \qquad (13)$$

Denn, wenn diese drei Gleichungen zu gleicher Zeit bestehen, wird die vorhergehende Gleichung (12) befriedigt. Es stellt also die letztgenannte Gleichung, nach dem Obigen, eine solche Curve dar, die einen Doppelpunct hat, und dieser fällt in denjenigen Punct, der durch die letzten Gleichungen (13) bestimmt wird.

Wenn wir, um uns hiervon nach der bekannten Verfahrungsweise zu überzeugen, die Gleichung (12) differentiiren, so finden wir:

$$(qr - q_1r_1)dp + (pr - p_1r_1)dq + (pq - p_1q_1)dr = 0. \qquad (14)$$

Beziehen wir diese Gleichung auf den Punct (13), so wird der Coefficient jedes der drei Differentialien gleich Null, und es drückt diese Gleichung also durchaus keine Relation zwischen diesen Differentialien aus. Auf jeder geraden Linie, welche durch den fraglichen Punct geht, fallen in diesem Puncte zwei Durchschnitte mit der Curve zusammen; jede solche gerade Linie ist, in dieser Beziehung, eine Tangente der Curve.

Wenn wir die letzte Gleichung von Neuem differentiiren, so kommt:

$$(qr - q_1r_1)d^2p + (pr - p_1r_1)d^2q + (pq - p_1q_1)d^2r + 2\{pdqdr + qdpdr + rdpdq\} = 0.$$

Beziehen wir diese neue Differential-Gleichung wiederum auf den Punct (13), so geht dieselbe in die folgende über:

$$p_1dqdr + q_1dpdr + r_1dpdq = 0,$$

und diese verwandelt sich, weil

$$dr = -(dp + dq),$$

in die nachstehende:

$$q_1dp^2 + (p_1 + q_1 - r_1)\,dpdq + p_1dq^2 = 0. \qquad (15)$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt für $\frac{dp}{dq}$, im Allgemeinen, zwei verschiedene Werthe. Diesen entsprechen zwei gerade Linien, auf welchen die Durchschnittspuncte mit der Curve alle drei zusammenfallen, und welche aufserdem folglich der Curve in keinem Puncte mehr begegnen. Es ist jede dieser beiden geraden Linien eine Tangente (im engern Sinne des Wortes) an einen Zweig der Curve, welche im Berührungspuncte von einem andern Zweige der Curve geschnitten wird.

Die beiden Werthe von $\frac{dp}{dq}$ sind einander gleich, wenn

$$p_1q_1+p_1r_1+q_1r_1 = \tfrac{1}{4}(p_1+q_1+r_1)^2,$$

oder wenn

$$p_1q_1+p_1r_1+q_1r_1 = \tfrac{1}{4}\beta^2.$$

Diese Bedingung wird dann und nur dann erfüllt, wenn der Punct (13) auf der durch die Gleichung:

$$pq+pr+qr = \tfrac{1}{4}\beta^2, \qquad (8)$$

dargestellten Curve, also (240) auf derjenigen Ellipse liegt, welche die drei Seiten des von den Asymptoten gebildeten Dreiecks in ihren Mitten berührt. Der Doppelpunct, der in diesem Falle eine Spitze bildet, erhält den Namen Rückkehrpunct.

Die beiden Werthe von $\frac{dp}{dq}$ sind reell, und folglich auch die beiden im fraglichen Puncte (13) sich schneidenden Zweige der Curve, wenn

$$p_1q_1+p_1r_1+q_1r_1 > \tfrac{1}{4}\beta^2,$$

oder auch, was dasselbe heifst (240), wenn

$$p_1^2+q_1^2+r_1^2 > \tfrac{1}{4}\beta^2,$$

woraus man sogleich sieht, dafs der Punct (13) — der alsdann ein Doppelpunct im engern Sinne des Wortes ist, ein Punct, in welchem zwei reelle Zweige der Curve I. sich schneiden — aufserhalb der eben bezeichneten Ellipse liegt.

Die beiden Werthe von $\frac{dp}{dq}$ sind endlich imaginär, wonach der fragliche Punct (13) ein isolirter, der Curve conjugirter, Punct ist, wenn

$$p_1q_1+p_1r_1+q_1r_1 < \tfrac{1}{4}\beta^2,$$

und dann liegt dieser Punct innerhalb der Ellipse (8).

Wir werden im 6. Paragraphen ausführlich auf die Theorie der Doppelpuncte zurückkommen. Hier ist unsere Absicht, überhaupt blofs diejenigen Fälle zu unterscheiden und zu bestimmen, in welchen solche Puncte bei Curven dritter Ordnung vorkommen. Das vollständige Resultat, zu dem wir in dieser Nummer gekommen sind, können wir in dem nachstehenden Satze zusammenfassen.

Wenn irgend eine Curve dritter Ordnung mit drei reellen Asymptoten einen Rückkehrpunct hat, so liegt dieser Punct nothwendig auf dem Umfange derjenigen Ellipse, welche die drei Seiten des von den Asymptoten gebildeten Dreiecks in ihren Mitten berührt. Wenn zwei Zweige einer solchen Curve dritter Ordnung sich schneiden, so fällt der Durchschnittspunct derselben aufserhalb dieser Ellipse; wenn die Curve einen isolirten conjugirten Punct hat, so liegt dieser Punct innerhalb der Ellipse.

245. Es gibt nur einen einzigen, früher schon erwähnten Fall, in welchem die drei Mittelpuncte der Curve dritter Ordnung in einen einzigen Punct zusammenfallen; es ist derjenige, wo die drei Asymptoten und die Linie S durch einen und denselben Punct gehen. Eben in diesem Puncte vereinigen sich alsdann auch die drei Mittelpuncte. Wenn überhaupt die Linie S durch den Durchschnittspunct zweier Asymptoten geht, so berührt sie in diesem Puncte die bezügliche Curve dritter Ordnung; in dem vorliegenden besondern Falle vereinigen sich also die drei Durchschnittspuncte der Linie S mit der Curve zu einem Berührungspuncte höherer Ordnung. Nach der im zweiten Paragraphen mehrmals angewandten Bestimmungsweise des allgemeinen Laufes der Curven dritter Ordnung erkennen wir unmittelbar, dafs die Linie S alsdann im fraglichen Puncte die Curve zugleich berührt

und schneidet. Dieser Punct ist ein Wendungspunct. Auch auf solche Puncte werden wir, in späteren Paragraphen, ausführlich zurückkommen.

246. Wir haben alle Entwicklungen dieses Paragraphen bisher ausschliefslich auf die Gleichungen (3), (4) und (5) der 226. Nummer gegründet, und diese Gleichungen schliefsen sich wiederum an die, in der 211. Nummer des vorigen Paragraphen aufgestellte, erste allgemeine Construction der Curven dritter Ordnung an. Wir gelangen aber auch zu denselben Resultaten, wenn wir an die Stelle der eben genannten drei Gleichungen andere setzen, welche aus der zweiten allgemeinen Construction der Curven dritter Ordnung (220) auf eine gleiche Weise hervorgehen, als jene drei Gleichungen aus der ersten. Diese zweite Construction beruht darauf, dafs jede gerade Linie, die einer Asymptote einer gegebenen Curve dritter Ordnung, etwa P, parallel ist, die Curve in solchen zwei Puncten schneidet, welche zugleich auf einer Hyperbel liegen, die durch die beiden Durchschnittspuncte S′ und S″ auf den beiden andern Asymptoten der Curve Q und R geht und deren eigene Asymptoten den beiden letztgenannten Q und R parallel sind. Eine solche Tangente der gegebenen Curve dritter Ordnung, welche ihrer Asymptote P parallel ist, berührt also ebenfalls eine auf diese Art näher bestimmte Hyperbel, in der Art, dafs die beidesmaligen Berührungspuncte zusammenfallen. Wenn die Curve dritter Ordnung insbesondere einen Doppelpunct hat, so ist derselbe also nothwendig auch der Berührungspunct auf einer der Asymptote P parallelen Tangente irgend einer solchen Hyperbel. Diese Hyperbel können wir, wenn wir durch ξ einen gehörig bestimmten Coefficienten bezeichnen, durch die Gleichung

$$qr+\xi s = 0 \qquad (1)$$

darstellen. Legen wir jenem Coefficienten, nach einander, alle möglichen Werthe bei, so stellt diese Gleichung, nach einander, unendlich viele Hyperbeln dar. Die Berührungspuncte auf den mit P parallelen Tangenten aller dieser verschiedenen Hyperbeln bestimmen eine neue Curve. Diese neue Curve ist zugleich der geometrische Ort für die Berührungspuncte auf denjenigen Tangenten der, bei beliebiger Annahme von μ, durch die allgemeine Gleichung:

$$pqr+\mu s = 0, \qquad \text{I.}$$

dargestellten Curven dritter Ordnung, welche der Asymptote P parallel sind. Im Allgemeinen gibt es unter diesen Curven dritter Ordnung, welche alle dieselben drei Mittelpuncte haben, drei mit einem Doppelpuncte, der jedesmal in einen jener gemeinschaftlichen drei Mittelpuncte fällt. Jeder solche Doppelpunct, oder jeder Mittelpunct überhaupt, liegt also nothwendig auf der fraglichen Curve. Noch mehr, wir können den Gesichtspunct noch erweitern: es bleibt die fragliche Curve auch dann offenbar noch dieselbe, wenn an die Stelle der Asymptote P, irgend eine andere, ihr parallele, tritt. Und hiernach stellt sich diese Curve auch als der geometrische Ort für die Mittelpuncte solcher Curven dritter Ordnung dar, welche dieselben beiden Asymptoten Q und R haben und diese in denselben beiden Puncten S′ und S″ schneiden, während ihre dritte Asymptote P nur der Richtung nach gegeben ist.

247. Wir können die Gleichung (1), indem wir s als Function von q und r, mit Beibehaltung der frühern Bezeichnung, einführen (227), auf folgende Weise schreiben:

$$qr+\xi(r'q+q''r-q''r') = 0. \qquad (2)$$

In Beziehung auf den Berührungspunct auf einer mit der Asymptote P parallelen geraden Linie ist

$$dp = 0, \qquad dr = -dq. \qquad (3)$$

Wir finden, wenn wir hiernach die Gleichung (2) differentiiren, für einen solchen Punct:

$$q-r+\xi(q''-r') = 0, \qquad (4)$$

und erhalten alsdann die gesuchte Gleichung desjenigen Ortes, mit dem wir uns in der vo-

rigen Nummer beschäftigt haben, wenn wir zwischen der letzten Gleichung und der Gleichung (2) den unbestimmten Coefficienten ξ, durch welchen die einzelnen durch (1) dargestellten Hyperbeln sich unterscheiden, eliminiren. Auf diese Weise ergibt sich:

$$r'q^2 - q''r^2 - q''r'(q-r) = 0. \qquad (5)$$

Zu derselben Gleichung müssen wir auch dann gelangen, wenn wir direct den geometrischen Ort für die Berührungspuncte auf den mit P parallelen Tangenten derjenigen Curven dritter Ordnung suchen, die, indem man μ als unbestimmten Coefficienten betrachtet, durch die allgemeine Gleichung I. dargestellt werden. Schreiben wir diese Gleichung unter folgender Form:

$$pqr + \mu(r'q + q''r - q''r') = 0, \qquad (6)$$

und differentiiren alsdann, unter denselben Voraussetzungen als eben, so ergibt sich:

$$p(q-r) + \mu(q''-r') = 0. \qquad (7)$$

Diese beiden letzten Gleichungen gehen in die Gleichungen (2) und (4) über, wenn wir $\frac{\mu}{p}$ mit ξ vertauschen, woraus unmittelbar folgt, dafs die Elimination von $\frac{\mu}{p}$ zwischen jenen Gleichungen ebenfalls die Gleichung (5) gibt.

Wir erkennen sogleich, dafs die Gleichung (5) eine Curve zweiter Ordnung darstellt, deren zwei zugeordnete Durchmesser den beiden Asymptoten Q und R parallel sind, und deren Mittelpunct, für welchen sich sogleich

$$q = \tfrac{1}{2}q'', \qquad r = \tfrac{1}{2}r',$$

ergibt, auf der Linie S, in der Mitte zwischen den beiden Puncten S' und S'' liegt. Diese Curve geht durch den Durchschnitt der beiden Asymptoten Q und R und zugleich durch die beiden Puncte S' und S'', für welche bezüglich $q = 0$, $r = r'$ und $r = 0$, $q = q''$ ist. Ob die Curve eine Hyperbel oder Ellipse ist, hängt davon ab, ob die Functionen-Werthe r' und q'' im Zeichen übereinstimmen oder nicht, und dieſs geht unmittelbar aus der Lage der beiden Puncte S' und S'' hervor. Wenn nemlich etwa der zweite Fall eintreten soll, so mufs jede der beiden Asymptoten Q und R von der Linie S und der dritten Asymptote so geschnitten werden, dafs die beiden Durchschnittspuncte beide Male auf derselben oder beide Male auf entgegengesetzter Seite des Durchschnittspunctes jener beiden Asymptoten Q und R liegen.

Wir bemerken endlich noch, dafs der Mittelpunct der Curve (5) auf der ersten der drei Hyperbeln (4) der 234. Nummer liegt. Denn, wenn wir in die Gleichung dieser Hyperbel:

$$2qr - r^0q - q^0r = 0$$

die vorstehenden Functionen-Werthe für jenen Mittelpunct der Curve (5) einsetzen, so kommt:

$$q''r' - r^0q'' - q^0r' = 0,$$

eine Gleichung, die befriedigt wird, weil sie mit der letzten der drei Bedingungs-Gleichungen (6) der 227. Nummer übereinstimmt. Die fragliche Hyperbel geht also durch den Mittelpunct des Kegelschnittes (5), das heifst durch die Mitte der beiden Puncte S' und S''.

In der 12. Figur ist die fragliche Curve eine Hyperbel und ihr Lauf durch Puncte angedeutet.

248. Es ist leicht, analytisch direct zu zeigen, dafs die durch die Gleichung (5) dargestellte Curve zweiter Ordnung durch die drei Mittelpuncte der Curve I. geht. Indem wir nemlich, wie früher, durch p_1, q_1 und r_1, die auf einen beliebigen dieser drei Mittelpuncte sich beziehenden besondern Werthe der Functionen p, q und r bezeichnen, können wir die Gleichung I. auf folgende Weise schreiben (244):

$$pqr + \mu(q_1r_1p + p_1r_1q + p_1q_1r - 2p_1q_1r_1) = 0.$$

Diese Gleichung ist, bei gehöriger Bestimmung von μ, mit der Gleichung (6) identisch, und der Gleichung (7) entspricht alsdann die folgende:

$$p(q-r)+\mu p_1(q_1-r_1) = 0.$$

Wir kommen also auch zu einer Gleichung, die mit der Gleichung (5) identisch ist, wenn wir zwischen den vorstehenden beiden Gleichungen μ eliminiren. Diese Elimination gibt sogleich, ohne dafs wir reduciren, die folgende Gleichung:

$$p_1(q_1-r_1)qr-(q-r)\{q_1r_1p+p_1r_1q+p_1q_1r-2p_1q_1r_1\} = 0,$$

von der in die Augen fällt, dafs sie befriedigt wird, wenn wir zugleich:

$$p = p_1, \qquad q = q_1, \qquad r = r_1,$$

setzen. Es geht also die durch (5) dargestellte Curve zweiter Ordnung durch den fraglichen Mittelpunct; sie geht durch alle drei Mittelpuncte, weil wir jeden derselben für den durch jene Functionen-Werthe bezeichneten nehmen können.

249. Wenn wir in den vorstehenden Entwicklungen nach einander jede der beiden Asymptoten Q und R an die Stelle der Asymptote P setzen, so erhalten wir zwei neue Curven, die mit der Curve (5) eine analoge geometrische Bedeutung haben. Dieser Vertauschung der Asymptoten entspricht in den bezüglichen Gleichungen eine blofse Buchstaben-Vertauschung. Aus der blofsen Gleichung (5) erhalten wir hiernach die folgenden drei:

$$\begin{aligned} r'q^2-q''r^2-q''r'(q-r) &= 0, \\ r^0p^2-p''r^2-p''r^0(p-r) &= 0, \\ q^0p^2-p'q^2-p'q^0(p-q) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Die vorstehenden drei Gleichungen stellen also drei neue Curven zweiter Ordnung dar, welche wie die drei früher betrachteten, durch die Gleichungen (4) der 234. Nummer dargestellten, Hyperbeln durch die drei Mittelpuncte der Curve I. gehen.

Um diese Mittelpuncte zu bestimmen, sind irgend zwei der fraglichen sechs Curven hinreichend, und diese können wir beliebig aus der zuerst betrachteten Gruppe dreier Hyperbeln, oder aus der Gruppe der drei Curven (8) oder endlich aus beiden Gruppen zugleich auswählen. Im ersten Falle erhalten wir einen, nach der Richtung einer Asymptote unendlich weit entfernt liegenden, der Mittelpunct-Bestimmung fremden Durchschnittspunct; im zweiten Falle stellt sich einer der drei Puncte S, S' und S'' als fremder Punct dar; im dritten Falle endlich erscheint als fremder Punct, entweder der Durchschnittspunct zweier Asymptoten (wenn wir nemlich in den beiden Gruppen dreier Curven die erste mit der ersten, die zweite mit der zweiten, oder der dritte mit der dritten zusammenstellen) oder (in den übrigen sechs Zusammenstellungen) einer der drei Puncte S, S' und S''.

250. Wenn insbesondere die Linie S einer Asymptote, etwa der Asymptote P, parallel ist, so ist (234):

$$q^0 = \infty, \qquad r^0 = \infty, \qquad p' = p'', \qquad q'' = r',$$

wonach die Gleichungen (8) der vorigen Nummer in die nachstehenden übergehen:

$$\begin{aligned} (q+r-r')(q-r) &= 0, \\ p^2-p'(p-r) &= 0, \\ p^2-p'(p-q) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Die erste dieser Gleichungen stellt, wenn wir von dem ersten Factor derselben, welcher auf die Linie S sich bezieht, und einen nach der Richtung dieser Linie oder der Asymptote P, unendlich weit entfernt liegenden Mittelpunct anzeigt, abstrahiren, diejenige gerade Linie dar, welche auf allen der Asymptote P parallelen geraden Linien die von den beiden übrigen Asymptoten Q und R interceptirten Segmente halbirt. Die beiden letzten Gleichun-

gen stellen zwei Parabeln dar, deren geometrische Bestimmung durch die Form dieser Gleichungen unmittelbar angezeigt wird.

Wenn endlich die Linie S unendlich weit liegt, so sind die ihren Durchschnittspuncten mit den drei Asymptoten entsprechenden Functionen-Werthe alle unendlich, wonach die vorstehenden drei Gleichungen (9) in die folgenden sich verwandeln:

$$q = r,$$
$$p = r,$$
$$p = q;$$

welche dieselben sind, als die Gleichungen der 236. Nummer, und drei gerade Linien darstellen, welche in der Mitte des Asymptoten-Dreiecks, dem einzigen Mittelpuncte der bezüglichen Curve dritter Ordnung, sich schneiden.

251. Nachdem wir in Rücksicht auf die eine der beiden Haupt-Classen von Curven dritter Ordnung in ein ausführlicheres Detail eingegangen sind, können wir nun mit der gröfsten Leichtigkeit auch die andern dieser beiden Haupt-Classen, wo zwei Asymptoten imaginär sind, behandeln. Die ganze Aufgabe besteht in einer Uebertragung und der Discussion analytischer Formen für den Fall, dafs Constante, die wir bisher als reell betrachtet haben, nun imaginäre Werthe erhalten.

Wenn wir (180) von der Gleichung:

$$pqr+\mu s = 0, \qquad \text{I.}$$

vermittelst der beiden Gleichungen:

$$q = t+w\sqrt{-1}, \qquad r = t-w\sqrt{-1}, \qquad (1)$$

zu der Gleichung: $p(t^2+w^2)+\mu s = 0,$ I, a.

übergehen, so stellt die Gleichung

$$t^2+w^2 = 0$$

den an die Stelle der beiden reellen Asymptoten Q und R tretenden Asymptotenpunct dar. Wir wollen denselben durchgehends durch A bezeichnen. Die beiden Gleichungen:

$$t = 0, \qquad w = 0, \qquad (2)$$

stellen zwei zugeordnete Durchmesser desselben dar (180). Um diese zugeordneten Durchmesser von den übrigen unterscheiden zu können, müssen wir eine nähere Functionen-Bestimmung machen. Legen wir dieser, um die frühern Resultate unmittelbar übertragen zu können, wiederum die identische Gleichung der 233. Nummer, welche hier folgende Form annimmt:

$$p+2t \equiv \beta, \qquad (3)$$

zu Grunde, so sehen wir, dafs alsdann der erste der beiden zugeordneten Durchmesser (2) des Asymptotenpunctes der Asymptote P parallel ist. β bedeutet denjenigen Werth der Function p, welcher sich auf den Asymptotenpunct bezieht, wonach dieser Werth die geometrische Construction dieser Function, so wie (nach der letzten Gleichung) der Function t bestimmt.

Wenn wir diejenigen Werthe der beiden neuen Functionen t und w, welche dem Puncte S auf der Asymptote P, dem einzigen reellen Puncte, in welchem die Linie S der Curve I, a. begegnet, entsprechen, durch t^0 und w^0 unterscheiden, so ist also, mit Bezugnahme auf die frühere Bezeichnung dieses Punctes:

$$q^0 = t^0+w^0\sqrt{-1}, \qquad r^0 = t^0-w^0\sqrt{-1}, \qquad (4)$$

und die Gleichung (3) gibt: $t^0 \equiv \frac{1}{2}\beta.$ (5)

Ueberdiefs ist jede in Beziehung auf q, r und q^0, r^0 symmetrische Function reell; so zum Beispiel, folgt aus (1) und (4):

$$r^0q+q^0r = 2(t^0t+w^0w). \qquad (6)$$

252.

252. Von den drei Gleichungen (4) der 234. Nummer, die uns zur Construction der Mittelpuncte der Curven dritter Ordnung mit drei reellen und geradlinigen Asymptoten gedient haben, stellt in dem Falle, dafs zwei dieser drei Asymptoten, Q und R, imaginär sind, nur noch die erste:

$$2qr - r^0q - q^0r = 0,$$

eine reelle Curve dar. Diese Gleichung nimmt hier sogleich die folgende Form an:

$$t^2 + w^2 - t^0t - w^0w = 0, \qquad (7)$$

und kann auch auf folgende Weise:

$$(t - \tfrac{1}{2}t^0)^2 + (w - \tfrac{1}{2}w^0)^2 = \tfrac{1}{4}(t^{0^2} + w^{0^2}),$$

oder, indem wir $\frac{1}{2}\beta$ für t^0 substituiren, auf folgende Weise:

$$(t - \tfrac{1}{4}\beta)^2 + (w - \tfrac{1}{2}w^0)^2 = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}\beta^2 + w^{0^2}), \qquad (8)$$

geschrieben werden.

Es stellt diese Gleichung nun, nicht mehr wie in dem frühern Falle eine Hyperbel, sondern eine Ellipse dar. Diese Ellipse geht durch den Asymptotenpunct, A, $[t = 0,\ w = 0]$, durch den Punct S $[t = t^0 = \frac{1}{2}\beta,\ w = w^0]$ und durch denjenigen Punct $[t = \frac{1}{2}\beta,\ w = 0]$, in welchem derjenige Durchmesser des Asymptotenpunctes, dessen zugeordneter der Asymptote P parallel ist, diese Asymptote schneidet. Ihr Mittelpunct, für welchen

$$t = \tfrac{1}{4}\beta, \qquad w = \tfrac{1}{2}w^0,$$

fällt in die Mitte zwischen den beiden ersten dieser drei Puncte. Ueberdiefs ist die fragliche Ellipse dem Asymptotenpuncte ähnlich und hat mit demselben eine ähnliche Lage.

In der 13. Figur ist angenommen, dafs die Curve dritter Ordnung imaginäre Kreis- Fig. 13.
Asymptoten habe. Alsdann ist die zu bestimmende Ellipse der über AS, als Durchmesser, beschriebene Kreis.

253. Wir haben, in dem Falle dreier reeller Asymptoten, aufser den in der vorigen Nummer erwähnten drei Hyperbeln, noch drei andere Curven zweiter Ordnung (249 (8)) zur Bestimmung der Mittelpuncte erhalten. Aber von diesen drei neuen Curven bleibt für den jetzt vorliegenden Fall wiederum nur eine einzige reell, diejenige nemlich, welche durch die Gleichung:

$$r'q^2 - q''r^2 - q''r'(q - r) = 0,$$

dargestellt wird. Es ist dieselbe der geometrische Ort für die Berührungspuncte auf den der Asymptote P parallelen Tangenten aller solcher Curven dritter Ordnung, welche, bei beliebiger Annahme von μ, durch die allgemeine Gleichung I. dargestellt werden können.

Statt aber der vorstehenden Gleichung für den Fall zweier imaginären Asymptoten, Q und R, eine reelle Form zu geben, wollen wir, nach den vorstehenden Bestimmungen, die Gleichung des fraglichen Ortes für den vorliegenden Fall unmittelbar herleiten. Namentlich wenden wir dieses Verfahren hier auch aus dem Grunde an, weil die frühere Constanten-Bestimmung hier ebenfalls imaginär wird, und wir zur geometrischen Bestimmung der Linie S eine neue einführen müssen. Bezeichnen wir demnach die beiden Durchschnittspuncte dieser Linie mit den beiden Durchmessern (2) des Asymptotenpunctes auf folgende Weise:

$$[t = 0,\ w = w'] \quad \text{und} \quad [t = t',\ w = 0],$$

so erhalten wir die Gleichung: $w't + t'w = t'w', \qquad (9)$

für die Linie S. Da diese gerade Linie durch den Punct S auf der Asymptote P geht, so ergibt sich folgende Relation zwischen den beiden in dieser Nummer eingeführten Constanten t' und w' und der Constanten w^0 der vorigen Nummer:

$$\tfrac{1}{2}\beta w' + t'w^0 = t'w'. \qquad (10)$$

Die allgemeine Gleichung I, a. können wir hiernach auf folgende Weise schreiben:

$$p(t^2+w^2)+\mu(w't+t'w-t'w')=0. \qquad (11)$$

Für den Berührungspunct auf einer der Asymptote P parallelen Tangente irgend einer der durch diese Gleichung dargestellten Curven dritter Ordnung ist:

$$dp=0,$$

folglich ist alsdann auch nach der, unserer näheren Functionen-Bestimmung zu Grunde liegenden, identischen Gleichung (3): $dt=0$.

Wir erhalten also für einen solchen Berührungspunct, wenn wir mit Bezugnahme hierauf die allgemeine Gleichung (11) differentiiren:

$$2pw+\mu t'=0,$$

und wenn wir zwischen dieser Gleichung und der ursprünglichen μ eliminiren, so kommt

$$t't^2-2w'tw-t'w^2+2t'w'w=0. \qquad (12)$$

Diese Gleichung stellt im vorliegenden Falle immer eine Hyperbel dar, während sie, in dem Falle dreier reellen Asymptoten, entweder eine Hyperbel oder eine Ellipse darstellt (247). Man sieht sogleich, dafs diese Hyperbel durch den Asymptotenpunct geht und in diesem Puncte den zweiten der beiden Durchmesser desselben (2) berührt. Wenn man die Gleichung (12) nach einander in Beziehung auf w und t differentiirt, so erhält man folgende Gleichung für diejenigen beiden Durchmesser der bezüglichen Hyperbel, deren zugeordnete bezüglich den beiden geraden Linien

$$t=0, \qquad w=0, \qquad (2)$$

parallel sind:

$$w't+t'w=t'w', \qquad (13)$$

$$t't-w'w=0. \qquad (14)$$

Der erste dieser beiden Durchmesser ist die Linie S, der zweite geht durch den Asymptotenpunct A. Man kann leicht direct nachweisen, dafs der Mittelpunct der Hyperbel (12), der durch den Durchschnitt dieser beiden Durchmesser bestimmt ist, auf dem ersten derselben, der Linie S, in der Mitte zwischen den beiden imaginären Durchschnittspuncten dieser Linie und der Curve, oder, was dasselbe heifst, dieser Linie und des Asymptotenpunctes liegt: ein Resultat, das wir aber auch ohne Weiteres aus der 247. Nummer herübernehmen können; so wie aus dieser Nummer auch unmittelbar folgt, dafs der fragliche Mittelpunct ein Punct des Umfanges der in der vorigen Nummer bestimmten, durch die Gleichung (8) dargestellten, Ellipse ist.

Die in dieser Nummer bestimmte Hyperbel (12) ist zugleich der geometrische Ort für die Berührungspuncte auf den beiden, der reellen Asymptote P parallelen Tangenten jeder solchen Ellipse, welche dem Asymptotenpuncte A ähnlich und ähnlich liegend ist und mit demselben die Linie S zur gemeinschaftlichen Chorde hat (246).

Im dem Falle imaginärer Kreis-Asymptoten (Fig. 13.) ist die Hyperbel (12) eine gleichseitige. Ihr Mittelpunct ist in der Figur S_1 genannt.

Fig. 13.

254. Da, in dem Falle dreier reellen Asymptoten, die Linie S auf lineare Weise sich bestimmen läfst, wenn diese drei Asymptoten und ein Mittelpunct gegeben sind, so mufs auch für den Fall, dafs zwei dieser drei Asymptoten imaginär werden, die analoge Construction eine lineare bleiben. Eine solche Construction wollen wir in dieser Nummer entwickeln. Der gegebene Asymptotenpunct sei A, die gegebene reelle Asymptote PP und der gegebene Mittelpunct O.

Man erhält zuvörderst, nach der 252. Nummer, den Punct S, in welchem die Asymptote P von der Linie S geschnitten wird. Wenn man nemlich eine Ellipse beschreibt, welche dem Asymptotenpuncte ähnlich ist und welche durch A, O und den Punct G geht,

in welchem derjenige Durchmesser des Asymptotenpunctes, dessen zugeordneter der Asymptote P parallel ist, diese Asymptote schneidet, so ist der zweite Durchschnittspunct der so bestimmten Ellipse und der Asymptote P der gesuchte Punct S. Ohne diese Ellipse selbst zu beschreiben, brauchen wir hier indefs blofs den Mittelpunct derselben, den Punct L, zu bestimmen, und dann eine gerade Linie durch diesen Punct und den Asymptotenpunct A zu legen. Diese gerade Linie AL schneidet alsdann die Asyptote P in dem Puncte S.

Ferner ist, nach der Schlufs-Bemerkung der vorigen Nummer, der gegebene Mittelpunct O der Berührungspunct auf einer mit der gegebenen Asymptote P parallelen Tangente, Os, einer solchen Ellipse, welche dem gegebenen Asymptotenpuncte ähnlich und ähnlich liegend ist, und mit demselben die Linie S zur gemeinschaftlichen Chorde hat. Man erhält hiernach bekanntermafsen einen Punct dieser gemeinschaftlichen Chorde, wenn man durch den Asymptotenpunct die gerade Linie AO legt, und durch die Mitte derselben, den Punct I, eine neue Linie IL, parallel demjenigen Durchmesser des Asymptotenpunctes, dessen zugeordneter AO ist. Die gerade Linie IL schneidet alsdann die Linie Os in dem gesuchten Puncte s auf der zu construirenden Linie S, welche hiernach vollkommen bestimmt ist.

Die Construction der 13. Figur bezieht sich auf die Voraussetzung imaginärer Kreis-Asymptoten. Vom Asymptotenpuncte A ist ein Perpendikel AG auf die Asymptote PP gefällt, dieses Perpendikel halbirt und durch den Halbirungspunct K eine gerade Linie KL parallel mit PP gezogen. Es ist ferner AO gezogen, in der Mitte dieser Linie, im Puncte I, ein Perpendikel IL errichtet; dann ist die gerade Linie AL durch A und den Durchschnitt L von KL und IL, und die gerade Linie Os, parallel mit PP, durch den Punct O gelegt. AL und PP schneiden sich im Puncte S, und IL und Os im Puncte s. Diejenige gerade Linie, welche die beiden Puncte S und s verbindet, ist alsdann die Linie S.

255. Durch die beiden Gleichungen:

$$(t-\tfrac{1}{4}\beta)^2+(w-\tfrac{1}{2}w^0)^2 = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}\beta^2+w^{0^2}), \qquad (8)$$

$$t't^2-2w'tw-t'w^2+2t'w'w = 0, \qquad (12)$$

sind die drei Mittelpuncte solcher Curven dritter Ordnung, deren Asymptotenpunct A, deren Asymptote P und deren Linie S gegeben sind, vollkommen bestimmt. Die durch diese beiden Gleichungen dargestellte Ellipse und Hyperbel gehen beide durch den Asymptotenpunct A; ihre drei übrigen Durchschnittspuncte (in der 13. Figur O, O' und O'') sind die zu bestimmenden Mittelpuncte. Von diesen Mittelpuncten können zwei imaginär sein. Den Uebergang von ihrer Realität zu ihrer Imaginärität bezeichnet ein Zusammenfallen derselben, und diesem entspricht eine Berührung der beiden Curven (8) und (12) unter einander. Hiernach könnten wir, nach demselben Verfahren als früher (240), denjenigen geometrischen Ort bestimmen, in dem zwei Mittelpuncte solcher Curven dritter Ordnung, deren reelle Asymptote und deren Asymptotenpunct (was so viel bedeutet als deren beide imaginären Asymptoten) gegeben sind, zusammenfallen. Wir erhalten aber wiederum die Gleichung desselben Ortes auch unmittelbar, wenn wir die Gleichung:

$$pq+pr+qr = \tfrac{1}{4}\beta^2,$$

die wir in der eben genannten Nummer, für den Fall dreier reeller Asymptoten, entwikkelt haben, durch Hülfe der Gleichungen (1) umformen. Hiernach erhalten wir zunächst:

$$2pt+t^2+w^2 = \tfrac{1}{4}\beta^2,$$

und dann, wenn wir zugleich berücksichtigen, dafs $p \equiv \beta-2t$ (3):

$$3(t-\tfrac{1}{3}\beta)^2-w^2 = \tfrac{1}{12}\beta^2. \qquad (15)$$

Für den Fall zweier imaginären Asymptoten erhalten wir also an die Stelle der frühern Ellipse, welche die drei Seiten des Asymptoten-Dreiecks in ihren drei Mitten berührt, die durch die vorstehende Gleichung (15) dargestellte Hyperbel. Diese Hyperbel geht durch den Durchschnitt der Linie W und der Asymptote P, denn für diesen Durchschnittspunct ist: $t = \frac{1}{2}\beta, \qquad w = 0,$
und diese Functionen-Werthe befriedigen die letzte Gleichung. Ihr Mittelpunct liegt auf der zweiten der beiden geraden Linien (2), und zwar, auf dieser geraden Linie W, vom Asymptotenpuncte A doppelt so weit entfernt, als von dem Puncte G, in welchem diese Linie die Asymptote P schneidet. Derjenige (imaginäre) Durchmesser der Hyperbel, dessen zugeordneter eben diese gerade Linie W ist, ist der ersten der beiden geraden Linien (2) und folglich also auch der reellen Asymptote P parallel. Es springt endlich aus der letzten Gleichung in die Augen, dafs das Verhältnifs der beiden Längen dieser zugeordneten Durchmesser gleich ist dem Verhältnifs der beiden ihnen parallelen zugeordneten (verschwindenden) Durchmesser des Asymptotenpunctes, multiplicirt mit $\sqrt{-3}$; wonach man auch die beiden Asymptoten der fraglichen Hyperbel leicht erhält.

Um den Asymptotenpunct, dessen Gleichung:

$$t^2 + w^2 = 0,$$

geometrisch zu bestimmen, können wir uns irgend einer ihm ähnlichen, ähnlich liegenden und concentrischen Ellipse bedienen. Nehmen wir für diese Ellipse insbesondere diejenige, welche die Asymptote P, und zwar nothwendig alsdann im Puncte G, berührt, so ist ihre Gleichung die folgende: $t^2 + w^2 = \frac{1}{4}\beta^2.$ (16)
Setzen wir einerseits in der Gleichung (15) und andrerseits in der vorstehenden Gleichung t gleich Null, so kommt beide Male:

$$w = \pm\tfrac{1}{2}\beta.$$

Die Ellipse (16) schneidet also diejenige gerade Linie, T, welche parallel mit der Asymptote P durch den Asymptotenpunct A gelegt wird, in solchen zwei Puncten, welche zugleich auf der Hyperbel (15) liegen und ebenfalls zur Construction derselben angewandt werden können.

In der Construction der 13. Figur, der die Voraussetzung imaginärer Kreis-Asymptoten zu Grunde liegt, ist A der Asymptotenpunct und PP die reelle Asymptote. AG ist die Axe der fraglichen Hyperbel, und auf derselben C der Mittelpunct, wenn dieser Punct so bestimmt worden ist, dafs AN = NC = CG. Zugleich sind alsdann G und N die beiden Scheitel der Axe. Die beiden Asymptoten der Hyperbel bilden mit dieser Axe Winkel, deren trigonometrische Tangenten $\pm\sqrt{3}$ sind; diese Winkel sind also von 60°, wonach der Asymptoten-Winkel ein Winkel von 120° ist. Man erhält diese Asymptoten hiernach sogleich, wenn man um C, als Mittelpunct, mit CA, als Radius, einen Kreis schlägt und die beiden Durchschnittspuncte E und F dieses Kreises und der Asymptote P durch zwei gerade Linien mit dem Puncte C verbindet. Ferner erhält man noch zwei Puncte, D und H, der zu bestimmenden Hyperbel, wenn man auf der durch A parallel mit P gezogenen geraden Linie TT die beiden Durchschnittspuncte mit einem aus A, als Mittelpuncte, und mit AG, als Radius, beschriebenen Kreise bestimmt.

In der gemachten Voraussetzung imaginärer Kreis-Asymptoten erhalten wir endlich noch für die Quadrate der beiden halben Axen der fraglichen Hyperbel (15) die Werthe $\frac{1}{16}\beta^2$ und $\frac{1}{12}\beta^2$, wonach man für den Abstand der Brennpuncte von dem Mittelpuncte der Hyperbel sogleich $\frac{1}{2}\beta$ findet. Hieraus folgt, dafs einer dieser beiden Brennpuncte mit dem Asymptotenpuncte A zusammenfällt. Die Polare dieses Punctes, die Directrix ZZ, ist der

reellen Asymptote PP parallel und geht in der Mitte zwischen dieser Asymptote und dem Asymptotenpuncte hindurch, wovon man sich unmittelbar überzeugt, wenn man zum Beispiel erwägt, dafs $CK.CA = \overline{CN}^2$.

256. Nach den vorigen Nummern können wir eine Reihe von Sätzen, die wir früher für den Fall dreier reellen Asymptoten bewiesen haben, unmittelbar auf den vorliegenden Fall, dafs zwei Asymptoten imaginär sind, übertragen.

Der geometrische Ort, auf welchem zwei Mittelpuncte solcher Curven dritter Ordnung, welche eine gemeinschaftliche reelle Asymptote und einen gemeinschaftlichen Asymptotenpunct haben, zusammenfallen können, ist eine Hyperbel (240). Auf demselben geometrischen Orte liegen auch die Rückkehrpuncte solcher Curven dritter Ordnung. Wenn zwei reelle Zweige einer solchen Curve sich schneiden, so liegt der Durchschnittspunct derselben aufserhalb, wenn sie einen conjugirten isolirten Punct hat, so liegt derselbe innerhalb dieser Hyperbel (244). Die drei Mittelpuncte irgend einer beliebigen solchen Curve dritter Ordnung sind drei zugeordnete Pole in Beziehung auf diese Hyperbel (241). Ihre Mitte fällt überdiefs auf der Linie S in einen solchen Punct, der halb so weit von der Mitte S_1 zwischen den beiden imaginären Durchschnittspuncten dieser Linie und der Curve als von dem reellen Durchschnittspuncte S entfernt ist (242).

257. Wir wollen uns nun zu der Discussion der verschiedenen Fälle wenden, welche einer besondern Annahme über die Lage der Linie S entsprechen. Wenn diese gerade Linie der reellen Asymptote P parallel ist, so versagen die beiden Gleichungen:

$$t^3 + w^2 - \tfrac{1}{2}\beta t - w^0 w = 0, \qquad (7)$$

$$t't^2 - 2w'tw - t'w^2 + 2t'w'w = 0, \qquad (12)$$

zur unmittelbaren Bestimmung der Mittelpuncte ihren Dienst. Es reduciren sich dieselben nemlich, wenn wir, diesem Falle entsprechend, w^0 und w' unendlich nehmen, auf die folgenden:

$$w = 0,$$

$$w(t - t') = 0.$$

Der Factor $(t - t')$ der letzten dieser beiden Gleichungen bezieht sich auf den, nach der Richtung der Asymptote P unendlich weit liegenden Mittelpunct, und zur Bestimmung der beiden übrigen Mittelpuncte bleibt uns blofs die einzige Gleichung:

$$w = 0.$$

So viel ergibt sich indefs hieraus schon, dafs diese Mittelpuncte auf derjenigen geraden Linie liegen, welche durch die vorstehende Gleichung dargestellt wird, das heifst also auf demjenigen Durchmesser des Asymptotenpunctes, dessen zugeordneter der Asymptote P parallel ist.

Wir erkennen den Grund dieser anscheinenden Unbestimmtheit sogleich darin, dafs in den beiden Gleichungen (7) und (12) die Producte w^0w und $w'w$ in dem vorliegenden Falle dadurch, dafs wir w auf die fraglichen Mittelpuncte beziehen, unter der unbestimmten Form $\infty . 0$ sich darstellen, wonach alsdann die unmittelbare Bestimmung der diesen Mittelpuncten entsprechenden Werthe der Function t nicht Statt finden kann. Zugleich wird uns auf diese Weise der Weg gezeigt, wie wir zur Bestimmung dieser Werthe gelangen können. Wir brauchen zu diesem Ende blofs, mit Zuziehung der Bedingungs-Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\beta w' + t'w^0 = t'w' \qquad (10)$$

zwischen den beiden Gleichungen (7) und (12) die beiden Producte w^0w und $w'w$ zu

eliminiren und dann w gleich Null zu setzen. Aus den eben genannten Gleichungen ergibt sich mit Vernachlässigung von w^2:

$$2w^0w = (2t-\beta)t, \qquad 2w'w = \frac{t't^2}{t-t'},$$

und hieraus:

$$\frac{w^0}{w'} = \frac{2t-\beta}{t't}(t-t').$$

Nach der eben angezogenen Bedingungs-Gleichung aber ist

$$\frac{w^0}{w'} = \frac{2t'-\beta}{2t'},$$

und folglich findet man:

$$2(2t-\beta)(t-t') = (2t'-\beta)t. \qquad (16)$$

Die beiden gesuchten Mittelpuncte sind durch die beiden Wurzeln dieser Gleichung des zweiten Grades in t vollkommen bestimmt. Wenn wir von der Function t durch die Vermittelung der beiden Gleichungen:

$$p = \beta-2t, \qquad p' = \beta-2t',$$

wiederum zur Function p zurückgehen, so verwandelt sich die obige Gleichung (16) in die folgende:

$$2p^2-3p'p+\beta p' = 0;$$

also gerade in dieselbe Gleichung, welche wir auf anderm Wege in der 235. Nummer für den Fall dreier reellen Asymptoten gefunden haben. Wir hätten dieses Resultat voraussehen können, weil alle Gröfsen, die in der vorstehenden Gleichung vorkommen, auch dann reell bleiben, wenn zwei Asymptoten der Curve dritter Ordnung imaginär werden.

Hiernach können wir alle die einzelnen Resultate, die wir in der angezogenen Nummer aus der Discussion der vorstehenden Gleichung gezogen haben, indem wir *blofs* die Art des Ausdrucks ändern, unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen.

Wenn die Linie S in dem Falle zweier imaginärer Asymptoten der einzigen reellen Asymptote parallel ist, so haben die bezüglichen Curven dritter Ordnung, weil ein Mittelpunct unendlich weit liegt, nur zwei Mittelpuncte, und diese liegen auf demjenigen Durchmesser des Asymptotenpunctes, dessen zugeordneter der reellen Asymptote parallel ist. Wir haben auch hier sechs Fälle zu unterscheiden.

1. Wenn die Linie S mit dem Asymptotenpuncte auf entgegengesetzter Seite der reellen Asymptote P liegt, so sind die Mittelpuncte beide reell, der eine derselben liegt, auf der eben bezeichneten geraden Linie, zwischen der Asymptote und dem Asymptotenpuncte, und zwar so, dafs in Beziehung auf denselben $p < \frac{1}{3}\beta$, und der andere liegt auf der andern Seite der Asymptote, weiter von dieser entfernt, als die Linie S.

2. Wenn die Linie S eine solche Lage hat, dafs der Asymptotenpunct zwischen dieselbe und die Asymptote P fällt, so bleiben die Mittelpuncte reell. Sie liegen zu beiden Seiten der Linie S, der eine zwischen der Asymptote und dem Asymptotenpuncte, und zwar so, dafs für denselben $p > \frac{1}{3}\beta$ zugleich aber $p < \frac{1}{2}\beta$, der andere weiter von der Asymptote entfernt, als die Linie S.

3. Wenn die Linie S durch den Asymptotenpunct geht, so entspricht einer der beiden Mittelpuncte: $p = \frac{1}{2}\beta$, und der andere fällt auf der Linie S mit dem Asymptotenpuncte zusammen.

4. Wenn die Linie S zwischen dem Asymptotenpuncte und der Asymptote hindurchgeht, und zwar so, dafs $p' > \frac{8}{9}\beta$, so bleiben beide Mittelpuncte immer noch reell. Sie fallen beide zwischen der Asymptote P und der Linie S, so dafs für den einen $p > \frac{1}{2}\beta$ und $p < \frac{2}{3}\beta$ und für den andern $p > \frac{2}{3}\beta$.

5. Wenn die Linie S zwischen dem Asymptotenpuncte und der Asymptote so hindurchgeht, dafs $p' = \frac{8}{9}\beta$, so fallen beide Mittelpuncte in einen einzigen Punct zusammen, und diesem entspricht: $p = \frac{3}{4}\beta$.

6. Wenn die Linie S zwischen dem Asymptotenpuncte und der Asymptote so hindurchgeht, dafs $p' < \frac{8}{9}\beta$, so sind die beiden Mittelpuncte imaginär.

Derjenige Fall, dafs die Linie S unendlich weit liegt, ist als ein Gränzfall zwischen den beiden ersten der vorstehenden sechs Fälle anzusehen. Weil zwei Mittelpuncte unendlich weit liegen, haben alsdann die bezüglichen Curven dritter Ordnung nur einen einzigen Mittelpunct, und diesem entspricht: $p = \frac{1}{3}\beta$.

258. Wenn die Linie S, bei beliebiger Richtung, durch den Asymptotenpunct geht, so ist $t' = 0$ und $w' = 0$. Hiernach gibt die Bedingungs-Gleichung (10) zwischen den drei Constanten t', w' und w^0, wenn wir blofs das Product $t'w'$ vernachlässigen:

$$\frac{w'}{t'} = -\frac{2w^0}{\beta}. \tag{17}$$

Gleichermafsen folgt aus der Gleichung (12) zunächst:

$$t't^2 - 2w'tw - t'w^2 = 0,$$

und dann, mit Berücksichtigung der vorstehenden Bedingungs-Gleichung:

$$\beta t^2 - 4w^0tw - \beta w^2 = 0. \tag{18}$$

Diese Gleichung stellt ein System zweier, immer reellen, durch den Asymptotenpunct gehenden geraden Linien dar.

Zur vollständigen Bestimmung der Mittelpuncte müssen wir diese letzte Gleichung (18) mit der Gleichung:

$$t^2 + w^2 - \tfrac{1}{2}\beta t - w^0w = 0, \tag{7}$$

zusammenstellen. Wenn wir die vorstehende Gleichung mit β multipliciren und sie dann zur vorhergehenden Gleichung (18) addiren, so gelangen wir zu einer Gleichung, die wir unter folgende Form bringen können:

$$(\beta t + 2w^0w)(t - \tfrac{1}{4}\beta) = 0,$$

und die also ein System von zwei geraden Linien darstellt. Die eine dieser geraden Linien, diejenige, auf welche sich der erste Factor dieser Gleichung bezieht, geht durch den Asymptotenpunct, in welchem die beiden geraden Linien (18) sich schneiden, und berührt in diesem Puncte die Curve (7). Diese gerade Linie zeigt einen Mittelpunct an, welcher mit dem (als fremden Punct sich darstellenden (255)) Asymptotenpuncte zusammenfällt. Die andere gerade Linie ist der reellen Asymptote P parallel und geht in der Mitte zwischen ihr und dem Asymptotenpuncte hindurch. Die Durchschnitte dieser geraden Linie mit den beiden leicht zu construirenden geraden Linien (18) sind die beiden übrigen Mittelpuncte. Diese sind also, im vorliegenden Falle, immer reell.

259. Wenn endlich der Asymptotenpunct auf der reellen Asymptote liegt, so verwandeln sich die beiden Gleichungen (7) und (12), indem wir $\beta = 0$ und $w^0 = w'$ setzen, in die nachstehenden beiden:

$$t^2 + w^2 - w'w = 0, \tag{19}$$

$$t't^2 - 2w'tw - t'w^2 + 2t'w'w = 0. \tag{12}$$

Ziehen wir von der ersten dieser beiden Gleichungen, nachdem wir sie zuvor mit t' multiplicirt haben, die zweite derselben ab, so ergibt sich

$$w(2w't + 2t'w - 3t'w') = 0.$$

Der erste Factor dieser Gleichung zeigt an, dafs in dem vorliegenden Falle ein Mittelpunct auf der reellen Asymptote mit dem Asymptotenpuncte zusammenfällt; der zweite, dafs die

beiden übrigen Mittelpuncte auf einer solchen geraden Linie liegen, die der Linie S parallel ist, und um die Hälfte weiter als diese Linie vom Asymptotenpuncte entfernt liegt. Dieses Resultat hätten wir, von dem Falle dreier reellen Asymptoten her, unmittelbar entnehmen können.

Wenn wir ferner die beiden Gleichungen (19) und (12) addiren, nachdem wir die erste derselben zuvor mit $2t'$ multiplicirt haben, so finden wir:

$$3t't^2 - 2w'tw + t'w^2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt ein System zweier im Asymptotenpuncte sich schneidenden geraden Linien dar. Je nachdem diese beiden geraden Linien reell sind, zusammenfallen oder imaginär sind, sind diejenigen beiden Mittelpuncte, die nicht in dem Asymptotenpuncte liegen, ebenfalls reell, fallen zusammen oder sind imaginär. Es hängt dieſs also davon ab, ob der Ausdruck:

$$w'^2 - 3t'^2 \qquad (20)$$

positiv, Null oder negativ ist.

Um geometrisch zu deuten, wollen wir uns zu der Gleichung (15) der 255. Nummer, welche überhaupt denjenigen Ort darstellt, auf welchem, bei gegebenem Asymptotenpuncte und gegebener Asymptote, zwei Mittelpuncte zusammenfallen können, zurückwenden, und in dieser Gleichung, dem vorliegenden Falle entsprechend, $\beta = 0$ setzen. Diese Gleichung reducirt sich alsdann auf

$$w^2 - 3t^2 = 0, \qquad (21)$$

und stellt also ein System zweier geraden Linien dar. Während also, in dem analogen Falle dreier in demselben Puncte sich schneidenden Asymptoten, niemals zwei Mittelpuncte zusammenfallen oder imaginär werden können (239), erhalten wir hier den folgenden Satz:

Der geometrische Ort, zwei, in denselben Punct zusammenfallende, Mittelpuncte solcher Curven dritter Ordnung, welche dieselbe reelle Asymptote und denselben Asymptotenpunct haben, ist, wenn dieser insbesondere auf jener liegt, ein System von zwei geraden Linien. Eine solche Curve kann einen Rückkehrpunct haben; derselbe liegt alsdann in einer derselben beiden geraden Linien.

Der Ausdruck (20) verschwindet, wenn die Linie S einer der beiden durch die Gleichung (21) dargestellten geraden Linien parallel ist, in der Art, dafs

$$w' = \pm\sqrt{3}\cdot t',$$

wenn die Linie S bezüglich mit den folgenden beiden

$$w = \mp\sqrt{3}\cdot t, \qquad (22)$$

parallel ist. In diesem Falle fallen also die beiden Mittelpuncte in einem Puncte zusammen. Sie sind, was hiernach sogleich sich ergibt, reell oder imaginär, je nachdem eine durch den Asymptotenpunct der Linie S parallel gezogene gerade Linie zwischen einer der beiden fraglichen geraden Linien (22) und der reellen Asymptote oder zwischen diesen beiden Linien selbst, hindurchgeht.

Wenn insbesondere die Linie S durch den Asymptotenpunct geht, so fallen die Mittelpuncte der Curve alle drei in diesem Puncte zusammen. Dieser Punct ist ein Wendungspunct der Curve.

260. Wir wollen nun zur genaueren Unterscheidung der Curven dritter Ordnung mit parabolischen Asymptoten übergehen. Die allgemeine Gleichung dieser Curven ist:

$$(p+\varkappa)\{q^2+\lambda p\}+\mu(q+\sigma) = 0, \qquad \text{III.}$$

indem die osculirende parabolische Asymptote durch die Gleichung:

$$q^2+\lambda p = 0,$$

dar-

dargestellt wird. Die Linie $q = 0$ ist derjenige Durchmesser dieser Parabel, dessen zugeordnete Chorden der geradlinigen Asymptote:

$$p + \varkappa = 0,$$

parallel sind. Die Linie S, welche hier durch die Gleichung:

$$q + \sigma = 0,$$

dargestellt wird, ist ebenfalls ein Durchmesser jener Parabel.

Nachdem wir diese Beziehungen wieder ins Gedächtnifs zurückgerufen haben, wollen wir nun auch, bei den durch die Gleichung III. dargestellten Curven dritter Ordnung, nach den Mittelpuncten derselben fragen. Indem wir die frühere Bedeutung dieser Puncte auch auf diesen Uebergangsfall übertragen, erhalten wir sogleich, zur Bestimmung derselben, zwei Curven, in deren Durchschnitte diese Mittelpuncte liegen. Wir brauchen zu diesem Ende blofs die beiden geometrischen Oerter für die Berührungspuncte auf solchen Tangenten der durch die Gleichung III, bei beliebiger Annahme von μ, dargestellten Curven dritter Ordnung zu bestimmen, welche einerseits den Durchmessern der parabolischen Asymptote und andrerseits der geradlinigen Asymptote parallel sind.

Die erste der hiernach bestimmten beiden Curven ist zugleich der geometrische Ort für die Mitten derjenigen Segmente der Durchmesser der parabolischen Asymptote, welche zwischen dieser und der geradlinigen Asymptote liegen. Wir erhalten ihre Gleichung unmittelbar, wenn wir die Gleichung III. unter der Voraussetzung, dafs $dq = 0$, differentiiren, und finden auf diesem Wege:

$$q^2 + 2\lambda(p + \tfrac{1}{2}\varkappa) = 0. \qquad (1)$$

Wir finden die Gleichung der zweiten eben bestimmten Curve, wenn wir, unter der Voraussetzung, dafs $dp = 0$, die Gleichung III. differentiiren und zwischen der resultirenden Gleichung: $2(p + \varkappa)q + \mu = 0$,
und der ursprünglichen μ eliminiren. Auf diese Weise kommt:

$$q^2 - \lambda p + 2\sigma q = 0, \qquad (2)$$

oder nach einer einfachen Form-Aenderung:

$$(q + \sigma)^2 - \lambda(p + \frac{\sigma^2}{\lambda}) = 0. \qquad (3)$$

Die Gleichung (1) stellt eine Parabel dar, welche, wie die parabolische Asymptote, die gerade Linie: $q = 0$, zu demjenigen ihrer Durchmesser hat, dessen zugeordnete Chorden der geradlinigen Asymptote parallel sind. Der Scheitel dieses Durchmessers liegt in der Mitte seiner beiden Durchschnittspuncte mit der geradlinigen und parabolischen Asymptote. Die Parabel geht durch die beiden Durchschnittspuncte der beiden eben genannten Asymptoten; ihr Parameter ist doppelt so grofs, als der Parameter der zweiten derselben, der parabolischen Asymptote.

Die Gleichungen (2) oder (3) stellen ebenfalls eine Parabel dar, welche die Linie S zu einem ihrer Durchmesser hat; der Scheitel dieses Durchmessers ist der Punct S', in welchem die Linie S der parabolischen Asymptote begegnet und für welchen

$$q + \sigma = 0, \qquad \lambda p + \sigma^2 = 0.$$

Die Tangente in diesem Scheitel ist der geradlinigen Asymptote parallel. Es hat überdiefs die fragliche Parabel mit der parabolischen Asymptote gleichen Parameter, öffnet sich aber nach entgegengesetzter Seite.

Da die Mittelpuncte der Curven dritter Ordnung, mit denen wir uns jetzt beschäftigen, hiernach als die Durchschnittspuncte zweier Parabeln mit gleicher Durchmesser-Richtung bestimmt sind, so gibt es solcher Mittelpuncte, im Allgemeinen, zwei.

261. Wenn wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander abziehen, so erhalten wir:

$$3\lambda p - 2\sigma q + \lambda x = 0, \qquad (4)$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche ebenfalls durch die beiden Mittelpuncte geht, und welche wir zur Bestimmung derselben an die Stelle einer der beiden obigen Parabeln setzen können. Nehmen wir aus der vorstehenden Gleichung den Ausdruck für p und substituiren ihn in die Gleichung (2), so kommt:

$$q^2 + \tfrac{4}{3}\sigma q + \tfrac{1}{3}\lambda x = 0. \qquad (5)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind diejenigen Werthe der Function q, welche sich auf die beiden zu bestimmenden Mittelpuncte beziehen; sie sind reell, einander gleich oder imaginär, je nachdem

$$4\sigma^2 - 3\lambda x > 0, \qquad 4\sigma^2 - 3\lambda x = 0, \qquad 4\sigma^2 - 3\lambda x < 0. \qquad (6)$$

Wenn also die osculirende parabolische und die geradlinige Asymptote einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, so gibt es im Allgemeinen zwei bestimmte Lagen der Linie S, für welche die beiden Mittelpuncte zusammenfallen; und diesen beiden Lagen entsprechen gleiche und entgegengesetzte Werthe von x. Die beiden Mittelpuncte bleiben indefs immer reell und können nie zusammenfallen, wenn x negativ ist, und also die parabolische Asymptote von der geradlinigen nicht geschnitten wird. Wenn aber x positiv ist, und demnach die Durchschnittspuncte der parabolischen und der geradlinigen Asymptote reell sind, so hängt die Realität der beiden Mittelpuncte von der Lage der Linie S ab. Um hierüber in einige nähere Bestimmungen einzugehen, wollen wir, was unbeschadet der Allgemeinheit erlaubt ist, den beiden Functionen p und q die Bedeutung von Parallel-Coördinaten unterlegen. Indem wir alsdann die Hälfte desjenigen Segmentes, das auf der geradlinigen Asymptote von der parabolischen interceptirt wird, durch q' bezeichnen, ergibt sich

$$q'^2 = \lambda x,$$

wonach wir die Gleichung (5) auch unter der folgenden Form schreiben können:

$$q^2 + \tfrac{4}{3}\sigma q + \tfrac{1}{3}q'^2 = 0, \qquad (7)$$

und dann, statt der Bedingungen (6), die folgenden erhalten:

$$\sigma^2 > \tfrac{3}{4}q'^2, \qquad \sigma^2 = \tfrac{3}{4}q'^2, \qquad \sigma^2 < \tfrac{3}{4}q'^2.$$

In denjenigen beiden Lagen der Linie S also, welche durch die beiden Gleichungen:

$$\sigma = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.q',$$

angezeigt werden, fallen die beiden Mittelpuncte zusammen, und zwar in denjenigen Punct, für welchen man, nach einander, aus den Gleichungen (7) und (4):

$$q = -\tfrac{2}{3}\sigma = \mp\tfrac{1}{3}\sqrt{3}.q', \qquad p = -\tfrac{2}{3}x,$$

erhält.

Wenn die Linie S zwischen den eben bestimmten beiden Lagen hindurchgeht, so sind die beiden Mittelpuncte imaginär, wo nicht, so sind sie reell. Findet das Letztere Statt, so können wir wiederum einen doppelten Fall unterscheiden: es wird das auf der geradlinigen Asymptote von der parabolischen interceptirte Segment entweder selbst oder in seiner Verlängerung von der Linie S geschnitten. Den Uebergang zwischen diesen beiden Fällen bildet derjenige, dafs die Linie S durch einen der beiden Endpuncte dieser Chorde geht. Alsdann ist

$$\sigma = \pm q',$$

wonach für die beiden bezüglichen Mittelpuncte sich folgende Functionen-Werthe ergeben ((7) und (4)):

$$q = \begin{cases} \mp\tfrac{1}{3}q', \\ \mp q', \end{cases} \qquad p = \begin{cases} \mp\tfrac{1}{3}x, \\ \mp x. \end{cases}$$

Wir sehen hieraus, dafs, in diesem Uebergangsfalle, einer der beiden Mittelpuncte in jenen Durchschnittspunct der geradlinigen und parabolischen Asymptote fällt, durch welchen ebenfalls die Linie S geht; und der andere, dessen Bestimmung auf rationale Weise vermittelst q' und $\varkappa$ sich ergibt, innerhalb des von jenen beiden Asymptoten nach allen Seiten hin begränzten Flächenraumes liegt. Wenn die beiden Mittelpuncte überhaupt reell sind, so zeigt die Gleichung (7), dafs die bezüglichen Werthe der Function q beide nothwendig mit $(-\varkappa)$ im Zeichen übereinstimmen: es liegen also die beiden Mittelpuncte, mit der Linie S, immer auf derselben Seite des Parabel-Durchmessers: $q = 0$; das Product der Abstände der Mittelpuncte von demselben bleibt für alle Lagen der Linie S unverändert dasselbe. Wenn $\sigma^2 < q'^2$, so sind die Werthe von q, welche auf die beiden Mittelpuncte sich beziehen, abgesehen vom Zeichen, beide kleiner als q' und zugleich kleiner als σ. Wenn $\sigma^2 > q'^2$, so ist einer jener beiden Werthe von q, vom Zeichen wiederum abgesehen, gröfser und der andere kleiner als q' und σ. Wenn hiernach also die Linie S das von der parabolischen Asymptote auf der geradlinigen interceptirte Segment selbst schneidet, so liegen die beiden Mittelpuncte, wenn es überhaupt reelle Mittelpuncte gibt, beide in dem von jenen Asymptoten umschlossenen Flächenraum, zwischen der Linie S und dem Durchmesser $q = 0$. Wenn hingegen die Linie S jenes Segment nur in seiner Verlängerung schneidet, so liegt nur ein Mittelpunct in jenem umschlossenen Flächenraume, während der andere weiter als die Linie S von jenem Durchmesser entfernt liegt.

In demjenigen Falle, den wir bisher noch unberücksichtigt gelassen haben, dafs die osculirende parabolische Asymptote von der geradlinigen berührt wird, reducirt sich die Gleichung (7) auf die folgende:

$$q(q+\tfrac{4}{3}\sigma) = 0,$$

und zeigt an, dafs ein Mittelpunct der fraglichen Curven alsdann mit dem Berührungspuncte der beiden Asymptoten zusammenfällt, und der andere auf derselben Seite mit der Linie S, um ein Drittel weiter als diese, von dem Durchmesser: $q = 0$, entfernt ist.

Wenn insbesondere, in dem eben bezeichneten Falle die Linie S ebenfalls durch den Berührungspunct der beiden Asymptoten geht, so fallen auch die beiden Mittelpuncte in eben diesem Puncte zusammen.

262. Bei denjenigen Curven dritter Ordnung, die eine nach höherer Ordnung osculirende parabolische Asymptote haben, und deren allgemeine Gleichung die nachstehende ist:

$$(p+\varkappa)(q^2+\lambda p)+\mu = 0, \qquad \text{II, 8.}$$

während diese Asymptote selbst durch die Gleichung:

$$q^2+\lambda p = 0,$$

dargestellt wird, ist die Linie S unendlich weit gerückt. Hiernach folgt schon aus der vorigen Nummer durch die Anwendung von Gränz-Betrachtungen, dafs die neuen Curven nur einen einzigen Mittelpunct haben, und dafs dieser auf dem Durchmesser: $q = 0$, in der Mitte seiner beiden Durchschnitte mit den beiden Asymptoten liegt. Wir finden diefs unmittelbar bestätigt, wenn wir die Gleichung II, 8. nach einander in Beziehung auf p und q differentiiren, wodurch μ sogleich ausfällt. Es ergeben sich auf diesem Wege sogleich die folgenden beiden Gleichungen:

$$q = 0,$$
$$q^2+2\lambda p+\lambda\varkappa = 0,$$

welche nun an die Stelle der beiden Gleichungen (1) und (2) treten, und aus deren Zusammenstellung sich sogleich

$$p = -\tfrac{1}{2}\varkappa$$

ergibt.

263. Die letzten drei Nummern enthalten die Unterscheidung der verschiedenen Arten der Curven dritter Ordnung mit parabolischen Asymptoten, welche derjenigen bei Curven derselben Ordnung mit drei geradlinigen Asymptoten analog ist. Diese Unterscheidung ist hier vollständig, ohne dafs es nothwendig gewesen wäre, zum Behuf derselben, in alle Untersuchungen, die den frühern analog sind, einzugehen. Wir wollen aber dennoch, um keine Analogie unerörtert zu lassen, in Untersuchungen dieser Art in der vorliegenden in dieser Nummer eingehen. Früher haben wir nemlich denjenigen geometrischen Ort bestimmt, auf welchem zwei Mittelpuncte solcher Curven dritter Ordnung, welche drei gegebene gerade Linien zu ihren Asymptoten haben, zusammenfallen können, und diese Bestimmung auf beide Fälle, dafs einmal alle drei Asymptoten reell und das andere Mal zwei derselben imaginär sind, ausgedehnt. In dem vorliegenden Uebergangsfalle, wo zwei der drei gegebenen Asymptoten unendlich weit liegen, ist die analoge Untersuchung: „denjenigen geometrischen Ort zu bestimmen, auf welchem zwei Mittelpuncte solcher Curven dritter Ordnung, welche eine gegebene gerade Linie und eine gegebene Parabel zu ihren Asymptoten haben, zusammenfallen können." Da wir hierbei keinesweges voraussetzen, dafs die parabolische Asymptote eine osculirende sei, und eine solche Asymptote auch dann noch eine Asymptote der Curve bleibt, wenn sie beliebig, parallel mit sich selbst, nach der Richtung ihrer Durchmesser, verschoben wird, so erhalten wir immer dieselbe Gruppe von Curven dritter Ordnung, gleichviel von was für einer solchen Lage der gegebenen Parabel wir ausgehen. Insbesondere können wir die gegebene Parabel auf die angezeigte Weise so verschieben, dafs sie die gegebene gerade Linie berührt und, hiermit in Uebereinstimmung, für die allgemeine Gleichung der den obigen Bedingungen unterworfenen Curven die folgende nehmen:

$$p(q^2+\lambda p)+\mu s = 0, \qquad (1)$$

indem wir durch μ einen unbestimmten Coefficienten und durch s irgend eine beliebige lineare Function bezeichnen. Die beiden Gleichungen:

$$p = 0, \qquad q^2+\lambda p = 0,$$

stellen hierbei die gegebene geradlinige und parabolische Asymptote dar, und $q = 0$ ist die Gleichung desjenigen Durchmessers dieser letztern, welcher durch den Berührungspunct geht. Indem wir s als Function von p und q betrachten, können wir, bei Einführung zweier neuen unbestimmten Coefficienten a und b, der allgemeinen Gleichung die nachstehende Form geben:

$$p(q^2+\lambda p)+\mu(p+aq+b) = 0. \qquad (2)$$

Indem wir diese Gleichung alsdann, nach einander in Beziehung auf p und q, differentiiren, erhalten wir für die Berührungspuncte auf denjenigen Tangenten der bezüglichen Curve dritter Ordnung, welche einerseits der gegebenen Asymptote P und andrerseits den Durchmessern der parabolischen Asymptote parallel sind, die beiden Gleichungen:

$$2pq+\mu a = 0,$$
$$q^2+2\lambda p+\mu = 0.$$

Eliminiren wir hiernach den unbestimmten Coefficienten μ zwischen jeder dieser beiden Gleichungen und der ursprünglichen Gleichung (2), so kommt:

$$\begin{aligned} a(q^2+\lambda p)-2q(p+aq+b) &= 0, \\ p(q^2+\lambda p)-(q^2+2\lambda p)(p+aq+b) &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Diese beiden Gleichungen sind die Gleichungen zweier Curven, deren Durchschnittspuncte die gemeinsamen Mittelpuncte aller, bei beliebiger Annahme von μ, durch die allgemeine Gleichung (2) dargestellten Curven dritter Ordnung sind. Aus der Zusammenstellung der

beiden Gleichungen (3) können wir einfachere Gleichungen herleiten, und diese stellen alsdann Curven dar, welche ebenfalls durch jene Mittelpuncte gehen. Wir können nemlich zwischen diesen Gleichungen die Factoren $(q^2+\lambda p)$ und $(p+aq+b)$ beide zugleich eliminiren und erhalten alsdann die neue Gleichung:

$$aq^2-2pq+2\lambda ap=0. \qquad (4)$$

Wir können ferner die erste der beiden Gleichungen (3) auf folgende Weise schreiben:

$$aq^2+2pq-\lambda ap+2bq=0,$$

dieselbe mit 2 multipliciren, und dann zur vorhergehenden addiren; alsdann stellt sich q als gemeinschaftlicher Factor heraus, und, mit Vernachlässigung desselben, finden wir die folgende lineare Gleichung: $p+\frac{3}{2}aq+2b=0.$ (5)

Die Mittelpuncte der fraglichen Curven dritter Ordnung stellen sich hiernach als die Durchschnitte der geraden Linie (5) mit der Hyperbel (4) dar. Hiernach gibt es, im Allgemeinen, für eine beliebige Annahme der Linie S, zwei Mittelpuncte. Wenn die Linie S so angenommen worden ist, dafs diese beiden Mittelpuncte in denselben Punct zusammenfallen, so berührt die gerade Linie (5) die Hyperbel (4), und für den Berührungspunct erhält man alsdann, indem man die beiden, den bezüglichen Gleichungen entsprechenden, Differential-Coefficienten einander gleichsetzt:

$$\frac{aq-p}{q-\lambda a}=-\tfrac{3}{2}a,$$

woraus sich ergibt: $p-\frac{5}{2}aq+\frac{3}{2}\lambda a^2=0.$ (6)

Wenn wir aus der Gleichung (4) den Werth für a nehmen und ihn dann in die letzte Gleichung substituiren, so finden wir, nach einer einfachen Reduction:

$$q^4-\lambda^2p^2=0.$$

Der erste Theil dieser Gleichung besteht aus zwei Factoren des zweiten Grades; der eine Factor, welcher die gegebene parabolische Asymptote anzeigt, ist hiernach offenbar ein fremder Factor; mit Vernachlässigung desselben vereinfacht sich die letzte Gleichung in die folgende: $q^2-\lambda p=0.$ (7)

Diese Gleichung, aus welcher jede Spur der geraden Linie S verschwunden ist, stellt den gesuchten Ort dar. Hiernach gelangen wir zu dem nachstehenden Satze:

Wenn eine Parabel und eine gerade Linie gegeben sind, so ist der geometrische Ort zweier zusammenfallenden Mittelpuncte solcher Curven dritter Ordnung, welche jene Parabel und diese gerade Linie zu ihren Asymptoten haben, eine zweite Parabel, welche der gegebenen gleich ist und mit ihr dieselbe Axe hat, sich aber nach entgegengesetzter Seite öffnet und überdiefs die gegebene gerade Linie berührt.

Ohne dafs eine neue Erörterung nöthig wäre, knüpft an den vorstehenden Satz sich sogleich der folgende:

Wenn irgend eine Curve dritter Ordnung, die eine gegebene Parabel und eine gegebene gerade Linie zu ihren Asymptoten hat, einen Rückkehrpunct hat, so liegt dieser Rückkehrpunct auf der im vorigen Satze bestimmten Parabel. Wenn zwei reelle Zweige einer solchen Curve sich schneiden, so liegt der Durchschnittspunct der beiden Zweige aufserhalb dieser Parabel; wenn sie einen conjugirten isolirten Punct hat, so liegt derselbe innerhalb der Parabel.

264. In der 14. Figur, die ich, der Anschaulichkeit wegen, hinzufüge, ist PP die gegebene geradlinige Asymptote und die punctirte Curve LL diejenige der gegebenen para- Fig. 14.

bolischen Asymptoten, welche die geradlinige berührt. Die am stärksten ausgedrückte Parabel, welche die geradlinige Asymptote in demselben Puncte berührt, sich aber nach entgegengesetzter Seite öffnet, ist der geometrische Ort der Rückkehrpuncte, welcher in der vorigen Nummer durch die Gleichung (7) dargestellt worden ist. KK ist irgend eine der unendlich vielen parabolischen Asymptoten, die man erhält, wenn man eine derselben, parallel mit sich selbst, nach der Richtung ihrer Durchmesser verschiebt. Soll diese Parabel eine osculirende sein, so schneidet jede bezügliche Curve dritter Ordnung diese Parabel und die geradlinige Asymptote PP in solchen zwei Puncten S' und S, welche auf einem Durchmesser der Parabel liegen. Ist dieser Durchmesser, oder (nach der 260. Nummer) mit andern Worten, die Linie S gegeben, so sind es auch die beiden gemeinsamen Mittelpuncte O und O' aller bezüglichen Curven dritter Ordnung. Es liegen diese beiden Mittelpuncte zugleich auf den beiden Parabeln OO'G und OO'H, welche in der eben angeführten Nummer bezüglich durch die Gleichungen (1) und (3) dargestellt worden sind.

265. Es bleiben uns jetzt nur noch die Mittelpuncte derjenigen Curven näher zu betrachten übrig, welche semicubische Parabeln zu ihren Asymptoten haben, und welche in dem Vorhergehenden durch folgende Gleichung dargestellt worden sind:

$$p^3 + \lambda q^2 + \mu(p + x) = 0. \qquad \text{IV.}$$

Differentiiren wir diese Gleichung in Beziehung auf p und eliminiren alsdann zwischen der resultirenden Gleichung und der ursprünglichen den unbestimmten Coefficienten μ, so kommt:

$$2p^3 + 3xp^2 - \lambda q^2 = 0. \qquad (1)$$

Differentiiren wir ferner dieselbe Gleichung in Beziehung auf q, so kommt unmittelbar:

$$q = 0. \qquad (2)$$

Zur Bestimmung der Mittelpuncte (und insbesondere der Doppelpuncte) erhalten wir also die beiden Gleichungen (1) und (2), woraus sich sogleich

$$p^2(2p + 3x) = 0$$

ergibt. Wir sehen hieraus, dafs die fraglichen Curven drei Mittelpuncte haben, von welchen zwei immer in die Spitze derjenigen semicubischen Parabel fallen, welche die osculirende Asymptote derselben ist, und von welchen der dritte auf der Doppel-Tangente in jener Spitze der semicubischen Parabel, und zwar so liegt, dafs derselbe von der bezüglichen Linie S, welche durch die Gleichung:

$$p + x = 0,$$

dargestellt wird, auf entgegengesetzter Seite halb so weit entfernt ist, als die Spitze der semicubischen Parabel.

Wenn die Linie S unendlich weit liegt, und die bezügliche Curve also eine, nach höchster Ordnung osculirende, semicubische Parabel zur Asymptote hat, so liegt der dritte Mittelpunct ebenfalls unendlich weit, und die Curve behält blofs ihre beiden zusammenfallenden Mittelpuncte.

Die semicubische Parabel selbst ist endlich die einzige hierher gehörige Curve, welche einen Rückkehrpunct hat, weil nur auf ihr, wenn sie als Asymptote einer solchen Curve betrachtet wird, zwei Mittelpuncte dieser letztern zusammenfallen.

266. Den Schlufs dieses Paragraphen mögen einige Untersuchungen über die Durchmesser der Curven dritter Ordnung bilden: Untersuchungen, die, wie wir bald sehen werden, mit den vorhergehenden Entwicklungen in genauer Verbindung stehen.

Schon früher, in der 215. Nummer, bei Gelegenheit der Construction der Curven dritter Ordnung, haben wir nachgewiesen, dafs die Mitte der drei Durchschnittspuncte einer beliebigen geradlinigen Transversalen und einer solchen Curve mit der Mitte der drei

Durchschnittspuncte derselben Transversalen und den Asymptoten dieser Curve in einen und denselben Punct zusammenfallen. **Euler** hat im zweiten Bande seiner *Introductio ad Anal. infin.* gezeigt, dafs, wenn die obige Transversale parallel mit sich selbst fortrückt, dieser Punct eine gerade Linie beschreibt, und schon er hat eine solche gerade Linie einen **Durchmesser der Curve** genannt.

Es sei: $$pqr+\mu s = 0, \qquad \text{I.}$$
die Gleichung einer gegebenen Curve dritter Ordnung, wonach man für die Gleichung des Systems der drei Asymptoten dieser Curve die folgende Gleichung erhält:
$$pqr = 0.$$
Wir wollen, wie früher, die nähere Functionen-Bestimmung auf die identische Gleichung:
$$p+q+r \equiv \beta, \qquad (1)$$
gründen, wonach wir die Gleichung des Systems der drei Asymptoten auch unter folgender Form schreiben können:
$$pq(\beta-p-q) = 0.$$
Es sei ferner: $$q = \varkappa p+\gamma \qquad (2)$$
die Gleichung einer beliebigen geradlinigen Transversalen. Wenn diese, parallel mit sich selbst, fortrückt, so bleibt in ihrer Gleichung der Werth von $\varkappa$ unverändert derselbe, während γ, nach einander, alle möglichen Werthe erhält. Wenn wir aus dieser letzten Gleichung den Ausdruck für q nehmen und ihn in die vorhergehende Gleichung einsetzen, so finden wir, zur Bestimmung von p, eine Gleichung des dritten Grades, deren drei Wurzeln sich auf die drei Durchschnittspuncte der Transversalen (1) mit den drei Asymptoten der Curve I. beziehen. Diese Gleichung ist die folgende:
$$[\varkappa(\varkappa+1)]p^3+[(2\varkappa+1)\gamma-\varkappa\beta]p^2+(\gamma-\beta)p = 0.$$
Nach einem Blick auf die beiden ersten Glieder dieser Gleichung, erhalten wir, wenn wir denjenigen Werth der Function p, welcher sich auf die Mitte der eben bezeichneten drei Durchschnittspuncte bezieht, durch (p) unterscheiden, sogleich:
$$3(p) = -\frac{(2\varkappa+1)\gamma-\varkappa\beta}{\varkappa(\varkappa+1)}.$$
Wenn wir aus dieser Gleichung, durch die Vermittelung der Gleichung der Transversalen, γ eliminiren, indem wir für diese Constante den Ausdruck: $(q-\varkappa p)$, einsetzen und nach dieser Substitution auch (p) als veränderlich betrachten und dem entsprechend die Umklammerung fortlassen, so ergibt sich:
$$\varkappa(\varkappa+2)p+(2\varkappa+1)q-\varkappa\beta = 0. \qquad (3)$$
Es ist diese Gleichung die Gleichung desjenigen Durchmessers der Curve I., welcher der durch $\varkappa$ bestimmten Richtung der durch die Gleichung (2), bei beliebigen Werthen von γ, dargestellten Transversalen (2) entspricht. Wenn diese Richtung sich ändert, so ändert sich im Allgemeinen die Lage dieses Durchmessers: es umhüllt derselbe im Allgemeinen alsdann eine Curve. Die Gleichung dieser Curve ist es, die wir jetzt bestimmen wollen.

267. Wenn wir in Beziehung auf $\varkappa$ ordnen, so nimmt die vorstehende Gleichung folgende Form an: $$p\varkappa^2+(2p+2q-\beta)\varkappa+q = 0. \qquad (4)$$
Um hiernach, der bekannten Verfahrungsweise gemäfs, die Gleichung der gesuchten Curve zu erhalten, brauchen wir blofs die letzte Gleichung (4) in Beziehung auf $\varkappa$ zu differentiiren, wonach sich ergibt: $2p\varkappa+(2p+2q-\beta) = 0,$
und dann zwischen dieser resultirenden Gleichung und der ursprünglichen (4) die Constante $\varkappa$ zu eliminiren. Aus dieser Elimination geht die folgende Gleichung hervor:

$$(2p+2q-\beta)^2-4pq=0,$$

und diese können wir endlich auch, wenn wir wiederum auf die identische Gleichung (1) Rücksicht nehmen, auf folgende Form bringen:

$$p^2+q^2+r^2=\tfrac{1}{2}\beta^2,$$

in welcher wir die Gleichung (7) der 240. Nummer wiederfinden. Hiernach sind wir zu nachstehendem Satze gelangt:

Die Durchmesser einer gegebenen Curve dritter Ordnung mit drei reellen Asymptoten umhüllen diejenige Ellipse, welche die drei Seiten des von den Asymptoten gebildeten Dreiecks in ihren Mitten berührt.

In dem Falle, dafs zwei Asymptoten der Curve dritter Ordnung imaginär sind, erhalten wir für die von ihren Durchmessern umhüllte Curve, statt der Ellipse, die in der 255. Nummer bestimmte Hyperbel.

Wenn $\beta=0$, das heifst, wenn die drei Asymptoten durch einen und denselben Punct gehen, oder, in dem Falle, dafs zwei Asymptoten imaginär sind, wenn der Asymptotenpunct auf der reellen Asymptote liegt, so gehen alle Durchmesser durch denselben Punct, den gemeinschaftlichen Durchschnitt der drei Asymptoten.

268. Wenn wir die Resultate der vorigen und der 240. Nummer zusammenstellen, so sehen wir, dafs eine und dieselbe Curve, einerseits, der geometrische Ort für die möglichen Rückkehrpuncte socher Curven dritter Ordnung, deren drei Asymptoten gegeben sind, ist und, andrerseits, von den Durchmessern aller dieser Curven umhüllt wird. Wir können uns leicht von der Nothwendigkeit dieser Uebereinstimmung Rechenschaft geben. Wenn nemlich eine Curve dritter Ordnung einen Doppelpunct hat, so schneidet jede ihrer beiden Tangenten sie aufserdem in keinem andern Puncte mehr, weil die beidesmaligen Durchschnitte alle drei in den Doppelpunct fallen. Diejenigen beiden Durchmesser der Curve dritter Ordnung, welche der Richtung dieser beiden Tangenten entsprechen, sind also die beiden in diesem Doppelpuncte sich schneidenden Tangenten des fraglichen geometrischen Ortes. Der Doppelpunct aber geht in einen Rückkehrpunct über, wenn die beiden Tangenten der Curve dritter Ordnung, in diesem Puncte, zusammenfallen; dann fallen also auch die ihren Richtungen entsprechenden beiden Durchmesser, welche den fraglichen Ort berühren, zusammen, und an die Stelle ihres früheren Durchschnittspunctes tritt nun derjenige Punct, in dem sie diesen Ort berühren.

269. Wir wollen nun die Durchmesser solcher Curven dritter Ordnung betrachten, welche eine gegebene Parabel und irgend eine gegebene gerade Linie, welche jedoch kein Durchmesser der Parabel ist, zu Asymptoten haben. Das Asymptoten-System können wir alsdann, bei einer schicklichen Functionen-Bestimmung, immer durch die Gleichung:

$$(p+\sigma)(q^2+\lambda p)=0,$$

darstellen, und hierbei nach den Bemerkungen der 263. Nummer, unbeschadet der Allgemeinheit, die Constante σ auch unterdrücken. Für die Gleichung desjenigen Durchmessers irgend einer bezüglichen Curve dritter Ordnung, der die Mitten der drei Durchschnittspuncte dieser Curve mit jeder der geraden Linie (2) parallelen Transversalen, erhalten wir, nach denselben Betrachtungsweisen als in der 266. Nummer, indem wir blofs die vorstehende Gleichung an die Stelle der Gleichung der drei geradlinigen Asymptoten setzen, sogleich die nachstehende Gleichung:

$$(p+\sigma)x^2+2qx+\lambda=0.$$

Wenn wir diese Gleichung in Beziehung auf x differentiiren:

$$(p+\sigma)+q=0,$$

und

und dann x eliminiren, so ergibt sich:

$$q^2 - \lambda(p + \sigma) = 0.$$

Wir erkennen in dieser Gleichung die durch die Gleichung (7) der 262. Nummer dargestellte Parabel sogleich wieder, welche der geometrische Ort für die möglichen Rückkehrpuncte und zusammenfallenden Mittelpuncte aller solcher Curven dritter Ordnung ist, welche die gegebene gerade Linie und die gegebene Parabel zu ihren Asymptoten haben: ein Resultat, das wir nach der vorigen Nummer vorhersehen konnten.

Die Durchmesser einer gegebenen Curve dritter Ordnung mit parabolischen Asymptoten umhüllen eine Parabel, welche den parabolischen Asymptoten gleich ist und mit ihnen eine gemeinschaftliche Axe hat, sich aber nach entgegengesetzter Seite öffnet und überdiefs die geradlinige Asymptote berührt.

270. Der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung mit zwei parallelen Asymptoten haben wir folgende Form gegeben:

$$p(q^2 - \vartheta^2) + \mu(q + \sigma) = 0, \qquad \text{III.}$$

wonach die beiden parallelen Asymptoten reell sind, zusammenfallen oder imaginär sind, je nachdem ϑ einen positiven, verschwindenden oder negativen Werth hat. Für denjenigen Durchmesser der durch die vorstehende Gleichung dargestellten Curve, welcher der Richtung der Transversalen (2) entspricht, erhalten wir ohne Mühe die Gleichung:

$$xp + 2q = 0,$$

welche, weil sie befriedigt wird, wenn p und q beide zugleich verschwinden, eine solche gerade Linie darstellt, die durch die Mitte des von beiden parallelen Asymptoten auf der dritten Asymptote P interceptirten Segmentes geht.

Die Durchmesser einer gegebenen Curve dritter Ordnung mit zwei parallelen Asymptoten gehen alle durch einen und denselben Punct *).

271. Die Gleichung: $p^3 + \lambda q^2 = 0,$

stellt eine semicubische Parabel dar. Für denjenigen Durchmesser derselben, welcher durch die Richtung der Transversalen (2) bestimmt wird, finden wir unmittelbar die Gleichung:

$$p + \tfrac{1}{3}\lambda x^2 = 0.$$

Dieser Durchmesser ist also der geraden Linie: $p = 0$, parallel, welche durch den Rückkehrpunct der Parabel geht und diejenige Richtung hat, nach welcher dieselbe durch eine gerade Linie nur einmal geschnitten wird, weil ein Durchschnittspunct unendlich weit liegt.

Die Durchmesser der semicubischen Parabel und jeder Curve dritter Ordnung, welche eine solche Parabel zu ihrer Asymptote hat, sind unter einander parallel.

272. Die Gleichung: $p(p^2 + \lambda q) + \mu = 0,$ V.

*) Um dieses Resultat aus dem allgemeinen Falle irgend dreier reellen Asymptoten durch Gränz-Betrachtungen auf geometrischem Wege abzuleiten, müssen wir die Ellipse, welche in diesem Falle die drei Seiten des von den Asymptoten gebildeten Dreiecks in ihren Mitten berührt, als einen Kegelschnitt, der durch seine Tangenten bestimmt wird, als eine Curve zweiter Classe, betrachten. Sie geht, wenn wir uns etwa denken, dafs zwei Asymptoten, indem sie sich um ihre Durchschnitte mit der dritten Asymptote drehen, bis sie parallel werden, offenbar in eine gerade Linie über, welche von dieser dritten Asymptote nach einer Seite hin begränzt wird, und parallel mit den beiden parallelen Asymptoten in der Mitte zwischen denselben hindurchgeht; oder, was dasselbe heifst, sie artet in ein System von zwei Puncten aus, von welchen einer in die Mitte des auf der dritten Asymptote von den beiden parallelen interceptirten Segmentes fällt, und der andere nach der Richtung der letztgenannten beiden Asymptoten unendlich weit liegt.

stellt eine Trident-Curve dar, die eine Parabel und einen Durchmesser dieser Parabel zu ihren Asymptoten hat. Für die Gleichung desjenigen Durchmessers derselben, welcher der Richtung der Transversalen entspricht, erhält man sogleich die folgende:

$$p+\tfrac{1}{3}\lambda x = 0,$$

welche einen Durchmesser der Parabel darstellt.

Die Durchmesser der Trident-Curve sind unter einander parallel und zugleich Durchmesser ihrer parabolischen Asymptoten und also auch ihrer geradlinigen Asymptote parallel.

273. Für die Durchmesser der durch die Gleichung:

$$p^3+\lambda q = 0,$$

dargestellten cubischen Parabel ergibt sich endlich, unabhängig von der Richtung der Transversalen (2), unmittelbar die Gleichung:

$$p = 0.$$

Die Durchmesser einer gegebenen cubischen Parabel fallen alle in eine einzige gerade Linie zusammen.

274. Da bei den Curven der zweiten Ordnung derjenige Durchmesser, welcher den zugeordneten Chorden eines gegebenen Durchmessers parallel ist, seinerseits wiederum diejenigen Chorden zu zugeordneten hat, welche dem gegebenen parallel sind, so liegt die Frage nah, ob es bei den Curven der dritten Ordnung ebenfalls solche zugeordnete Durchmesser gibt, in der Art nemlich, dafs denjenigen Transversalen, welche man einem beliebigen der beiden Durchmesser parallel zieht, der andere Durchmesser entspricht.

Indem wir, der Kürze halber,

$$-\frac{\varkappa(\varkappa+2)}{2\varkappa+1} = \varkappa', \tag{5}$$

setzen, können wir der Gleichung (3), welche denjenigen Durchmesser, welcher der durch $\varkappa$ angezeigten Richtung entspricht, darstellt, folgende Form geben:

$$q = \varkappa' p+\gamma'. \tag{6}$$

Für die Gleichung desjenigen Durchmessers, welcher der durch $\varkappa'$ angezeigten Richtung entspricht, erhalten wir, indem wir wiederum, der Kürze halber:

$$-\frac{\varkappa'(\varkappa'+2)}{2\varkappa'+1} = \varkappa'', \tag{7}$$

setzen, die folgende:

$$q = \varkappa'' p+\gamma''. \tag{8}$$

γ' und γ'' bedeuten zwei Constanten, die wir hier unbestimmt lassen können. Wenn hiernach die beiden zugeordneten Durchmesser (6) und (8) zugeordnete sein sollen, so müssen $\varkappa''$ und $\varkappa$ einander gleich sein. Schreiben wir in der Gleichung (7) statt $\varkappa''$ das ursprüngliche $\varkappa$ und statt $\varkappa'$ seinen Werth in $\varkappa$ aus (5), so finden wir:

$$\varkappa^3+2\varkappa^2+2\varkappa+1 = 0. \tag{9}$$

Wenn es also überhaupt zugeordnete Durchmesser gibt, so wird ihre Richtung durch die Wurzeln der vorstehenden Gleichung bestimmt. Eine einzige Wurzel dieser Gleichung ist reell, und zwar gleich (-1). Diese Wurzel zeigt die Richtung der Asymptote R an; denn es ist die Gleichung dieser Asymptote:

$$r \equiv -(p+q-\beta) = 0.$$

Alsdann aber ist auch

$$\varkappa' = \varkappa = -1,$$

und es fallen die beiden zugeordneten Durchmesser in jener Asymptote zusammen, in deren Gleichung die Gleichung (3) übergeht. Auf ähnliche Weise fallen in jede Asymptote der gewöhnlichen Hyperbel zwei zugeordnete Durchmesser derselben zusammen.

Es kann uns nicht befremden, dafs die Gleichung (9) nur die Richtung der einen Asymptote anzeigt. Denn die den beiden andern Asymptoten entsprechenden Werthe von x sind 0 und ∞, und diese Werthe geben auch x' gleich 0 und ∞.

Die Gleichung (9) hat aufserdem noch zwei imaginäre Wurzeln, welche durch die nachstehende quadratische Gleichung gegeben sind:

$$x^2+x+1 = 0.$$

Den beiden imaginären Werthen von x entsprechen zwei imaginäre Werthe für x' (5), diese Werthe sind ebenfalls die beiden Wurzeln der vorstehenden Gleichung, in der Art, dafs wir die beiden Wurzeln dieser Gleichung in beliebiger Ordnung für die beiden zusammengehörigen Werthe von x und x', wodurch die Richtungen zweier zugeordneten Durchmesser dritter Ordnung gegeben sind, nehmen können. Wenn diese Curve also, den obigen Voraussetzungen gemäfs, drei reelle Asymptoten hat, so gibt es zwar ein System zweier zugeordneten Durchmesser, diese sind aber imaginär. Die drei Paare zusammenfallender zugeordneter Durchmesser können wir ganz aufser Acht lassen; sie verlieren ihre geometrische Bedeutsamkeit. Nur so viel können wir bemerken, dafs, je mehr sich die Richtung der Transversalen der Richtung einer Asymptote nähert, desto mehr auch der entsprechende Durchmesser derselben Asymptote näher rückt.

275. Wir wollen auf directem Wege untersuchen, welche Modificationen die Resultate der vorigen Nummer erleiden, wenn zwei der drei Asymptoten imaginär sind. Das System der reellen und der beiden imaginären Asymptoten können wir alsdann durch die nachstehende Gleichung darstellen (251):

$$p(t^2+w^2) = 0,$$

und diese, unbeschadet der Allgemeinheit, auch auf folgende Weise particularisiren:

$$(t+\sigma)(t^2+w^2) = 0.$$

Die Gleichungen der beiden imaginären Asymptoten sind alsdann in der folgenden enthalten:

$$w = \pm\sqrt{-1}\cdot t.$$

Wenn wir hiernach eine beliebige Transversale durch die Gleichung

$$w = xt+\gamma \qquad (10)$$

darstellen, so erhalten wir zur Bestimmung ihrer drei Durchschnitte mit der bezüglichen Curve dritter Ordnung:

$$(1+x^2)t^3+(\sigma+2\gamma x+\sigma x^2)t^2+(\gamma^2+\sigma x\gamma)t+\sigma\gamma^2 = 0,$$

und zur Bestimmung ihrer Mitte:

$$3t = -\frac{\sigma+2\gamma x+\sigma x^2}{1+x^2}.$$

Um endlich zu der Gleichung des von der Richtung der Transversalen (10) abhängigen Durchmessers zu gelangen, brauchen wir blofs zwischen der Gleichung (10) dieser Transversalen und der letzten Gleichung γ zu eliminiren. Wir finden auf diese Weise:

$$2xw+(3+x^2)t+\sigma(1+x^2) = 0. \qquad (11)$$

Setzen wir, der Kürze halber, $\quad -\frac{3+x^2}{2x} = x',$

so erhalten wir für denjenigen Durchmesser, der von der durch x' angezeigten Richtung abhängt, folgende Gleichung:

$$2x'w+(3+x'^2)t+\sigma(1+x^2) = 0, \qquad (12)$$

und wenn die beiden Durchmesser (11) und (12) zugeordnete sein sollen, wonach der letztere derselben der Transversalen (10) parallel sein mufs, ergibt sich:

$$-\frac{3+x'^2}{2x'} = x,$$

und wenn wir für x' seinen Werth in x einsetzen, nach einer einfachen Reduction:

$$x^4 - 2x^3 - 3 = 0.$$

Zwei der vier Wurzeln dieser Gleichung sind $\pm\sqrt{-1}$, und ihnen entsprechen dieselben Werthe von x'. Sie beziehen sich auf die Richtungen der beiden imaginären Asymptoten: ein Resultat, das wir nach der vorigen Nummer zu erwarten berechtigt waren. Die beiden andern Wurzeln der letzten Gleichung sind reell und zwar gleich $\pm\sqrt{3}$. Wir erkennen sogleich, dafs hierdurch die Richtung der beiden Asymptoten der durch die Gleichung (15) der 255. Nummer dargestellten Hyperbel angezeigt wird, und da diese Hyperbel von den Durchmessern der bezüglichen Curve umhüllt wird (267), so sind wir zu folgendem Satze gelangt:

Eine Curve dritter Ordnung mit imaginären Asymptoten hat immer ein einziges Paar zugeordneter Durchmesser. Es sind dieselben die beiden Asymptoten derjenigen Hyperbel, welche von ihren Durchmessern umhüllt wird.

§. 5.

Aufzählung der verschiedenen Arten der Curven dritter Ordnung.

I. Erster und allgemeiner Fall.

Es lassen sich die hierher gehörigen Curven dritter Ordnung durch die allgemeine Gleichung:

$$pqr + \mu s = 0$$

darstellen, sie haben drei geradlinige Asymptoten P, Q und R und werden von diesen in solchen drei Puncten geschnitten, welche auf der Linie S liegen. Nach der vorstehenden Gleichung werden die Curven dritter Ordnung durch die gegenseitige Lage von vier geraden Linien (den drei Asymptoten und der Linie S) und durch die constanten Coefficienten μ vollkommen bestimmt. Wir begegnen hierbei zwei Haupt-Abtheilungen: entweder sind die Asymptoten alle drei reell oder zwei derselben sind imaginär.

I. Curven mit drei reellen geradlinigen Asymptoten, von welchen nicht zwei parallel sind. Den weitern Eintheilungsgrund für diese Curven wollen wir aus ihrer Bestimmung durch vier gerade Linien und einen constanten Coefficienten hernehmen, und zwar so, dafs wir nach der gegenseitigen Lage jener vier geraden Linien verschiedene Gruppen von Curven dritter Ordnung bestimmen, und dann, in jeder Gruppe, die Bestimmung der einzelnen Arten von den verschiedenen Werthen des Coefficienten μ abhängig machen wollen *). Die verschiedenen Gruppen ordnen sich in die drei Unter-Abtheilungen von Curven, welche wir im 2. Paragraphen schon unterschieden haben, und die sich auf die Richtung der Linie S in Beziehung auf die Richtung der Asymptoten beziehen.

I, 1. Die Curve wird von ihren drei reellen Asymptoten in solchen drei Puncten geschnitten, von welchen keiner unendlich weit liegt. Sie hat mit ihren Asymptoten einen gewöhnlichen hyperbolischen Contact und nähert sich jeder derselben auf den beiden entgegengesetzten Seiten.

*) Ein ganz analoges Verfahren werden wir auch in der zweiten Haupt-Abtheilung, wo ein Asymptotenpunct, und in den spätern Fällen, wo krummlinige Asymptoten an die Stelle geradliniger treten, beobachten.

A. Die drei Asymptoten gehen nicht durch denselben Punct, sondern bilden irgend ein Dreieck. Wir unterscheiden hier fünf Gruppen von Curven.

α. Erste Gruppe. Die Linie S begegnet den Seiten des von den drei Asymptoten P, Q und R gebildeten Dreiecks allen dreien in ihrer Verlängerung. Die Mittelpuncte sind alle drei reell; der eine derselben, O, liegt innerhalb des Asymptoten-Dreiecks, die beiden andern, O′ und O″, aufserhalb desselben und auf entgegengesetzterSeite der Linie S *). Es treten uns in dieser Gruppe acht Arten entgegen. Unter diesen acht Arten befinden sich drei Uebergangs-Arten, die dadurch bestimmt sind, dafs, bei gehöriger Bestimmung von μ, jeder der drei Mittelpuncte auch zum Doppelpuncte der bezüglichen Curve werden kann **). Zwei andere Gränzen bilden einerseits das System der drei Asymptoten und andrerseits die Linie S; jenem entspricht $\mu = 0$, dieser $\mu = \infty$. Es hat μ in den fünf ersten der nachstehenden Arten überall dasselbe Zeichen, und, indem der Werth desselben, abgesehen vom Zeichen, von einer Art zur andern wächst, entfernt sich die Curve dritter Ordnung immer mehr von ihren Asymptoten; μ ändert sein Zeichen, indem es durchs Unendliche hindurchgeht, und die Curve tritt alsdann auf die entgegengesetzten Seiten der drei Asymptoten und der Linie S hinüber. Während bei den drei letzten Arten der negative Werth von μ allmälig abnimmt, nähert sich die Curve ihrer Asymptote immer mehr.

Die 1. Art. Fig. I, 1. Die Curve besteht aus zwei Theilen. Der eine Theil nä- Taf. II.
hert sich allen drei Asymptoten und ist als eine ununterbrochene krumme Linie zu betrachten, wenn man in Erwägung zieht, dafs jeder Zweig, welcher an einer Asymptote sich immer weiter hinzieht, durch das Unendliche hindurchgehend, auf der andern Seite der Asymptote und nach ihrer entgegengesetzten Erstreckung wiedererscheint ***). Dieser Theil der Curve schneidet jede der drei Asymptoten und hat drei Wendungspuncte ****). Der andere Theil der Curve ist ein, innerhalb des Asymptoten-Dreiecks, um den Mittelpunct O sich schlingendes Oval.

Die 2. Art. Fig. I, 2. Der eine Theil der vorigen Curve hat sich weiter von seinen Asymptoten entfernt, der andere auf den conjugirten isolirten Punct O reducirt.

Die 3. Art. Fig. I, 3. Der eine Theil hat sich noch weiter von seinen Asymptoten entfernt, der andere ist verschwunden (imaginär geworden).

Die 4. Art. Fig. I, 4. Zwei Zweige der vorigen Curve sind einander immer näher gerückt und schneiden sich nun in dem Doppelpuncte O′. Zwei Wendungspuncte sind verschwunden, und nur derjenige Zweig, welcher die beiden Asymptoten Q und R schneidet, hat einen Wendungspunct behalten.

Die 5. Art. Fig. I, 5. Die Curve trennt sich wieder in zwei Theile. Der eine Theil

---

*) In allen Figuren ist die Linie S punctirt.

**) Solche Uebergangs-Arten sind in den beigefügten Figuren stärker ausgedrückt.

***) Auf gleiche Weise ist die gewöhnliche Hyperbel als eine ununterbrochene krumme Linie anzusehen.

****) Wenn ein Zweig einer Curve eine gerade Linie schneidet und nachher an derselben als seiner Asymptote sich hinzieht, so hat er nothwendig einen Wendungspunct. Denn für denselben gibt es, nachdem er die Asymptote geschnitten hat, offenbar ein Maximum der Entfernung von dieser Asymptote, und diesem Maximum entspricht, dafs die Tangente der Curve der Asymptote parallel ist. Rückt die Tangente, von dieser Lage aus, immer weiter fort, bis sie endlich mit der Asymptote zusammenfällt, so erreicht sie, zwischen diesen beiden parallelen Gränz-Lagen, wenigstens einmal, eine solche Lage, in der ihre Neigung gegen die Asymptote ein Maximum ist. Ihr Fortrücken wird in dieser Lage gehemmt und erfolgt nachher in entgegengesetztem Sinne. Die Tangente in dieser Lage berührt die Curve in einem Wendungspuncte.

hat Q zur Asymptote, schneidet alle drei Asymptoten und hat drei Wendungspuncte. Der andere Theil, mit den beiden Asymptoten P und Q, ist hyperbelartig.

Die 6. Art. Fig. I, 6. Die Curve besteht, wie die vorige, aus zwei Theilen. Der eine Theil hat P zur Asymptote, schneidet alle drei Asymptoten und hat drei Wendungspuncte. Der andere Theil, mit den beiden Asymptoten Q und R, ist hyperbelartig.

Die 7. Art. Fig. I, 7. Die beiden Theile der vorigen Curve sind einander näher gerückt, und bilden nun, während zwei Wendungspuncte verschwunden sind, einen Doppelpunct O''. Der erste Theil hat nur einen Wendungspunct behalten.

Die 8. Art. Fig. I, 8. Die Curve besteht nur aus einem einzigen Theile, der seinen drei Asymptoten so nahe rücken kann, dafs er zuletzt in diese Asymptoten selbst übergeht.

β. Zweite Gruppe. Die Linie S geht durch den Durchschnitt jener Asymptoten, Q und R. Ein Mittelpunct, O'', fällt alsdann in eben diesen Durchschnitt, die beiden andern, O und O', liegen auf einer geraden Linie, die der Asymptote P parallel ist und in der Mitte zwischen dieser Asymptote und dem Durchschnitte der beiden andern hindurchgebt. Wir müssen hier zwei Fälle unterscheiden, entweder schneidet die durch einen Winkelpunct des Asymptoten-Dreiecks gehende Linie S die, diesem Winkelpuncte gegenüberliegende Seite in einer ihrer beiden Verlängerungen, oder sie schneidet diese Seite selbst. In dem ersten Falle, in welchem die beiden Mittelpuncte O und O' reell sind, gibt es sechs verschiedene Arten; dadurch nemlich, dafs die Gränz-Curve mit dem Doppelpuncte O'' hier in das System der drei Asymptoten selbst übergeht, verschwinden die letzten beiden Arten der vorigen Gruppe. In dem zweiten Falle sind die beiden Mittelpuncte O und O' imaginär, und es gibt nur eine einzige Art. Dem ersten Falle entspricht:

Die 9. Art. Fig. II, 1. Die Curve besteht aus zwei Theilen. Der eine Theil zieht sich an den Asymptoten hin, schneidet sie und hat drei Wendungspuncte. Der zweite Theil ist ein um den Mittelpunct O sich schlingendes Oval.

Die 10. Art. Fig. II, 2. Das Oval der vorigen Curve hat sich auf den Punct O, der hiernach ein conjugirter isolirter Punct der Curve wird, reducirt.

Die 11. Art. Fig. II, 3. Das Oval der 9. Art ist ganz verschwunden; ihr erster Theil, mit drei Wendungspuncten, ist blofs noch übrig geblieben.

Die 12. Art. Fig. II, 4. Zwei Zweige der vorigen Curve sind einander immer näher gerückt und schneiden sich nun im Doppelpuncte O'. Zwei Wendungspuncte sind verschwunden.

Die 13. Art. Fig. II, 5. Die Curve besteht aus zwei Theilen, von welchen einer Q zur Asymptote hat, und der andere, hyperbelartig, den beiden Asymptoten P und R sich nähert.

Die 14. Art. Fig. II, 6. Die Curve besteht aus zwei Theilen, von welchen einer P zur Asymptote hat, und der andere, hyperbelartig, den beiden Asymptoten Q und R sich nähert.

Dem zweiten Falle entspricht:

Die 15. Art. Fig. III. Die Curve besteht aus zwei Theilen, von welchen einer R (oder Q) zur Asymptote hat, und der andere, hyperbelartig, an den beiden Asymptoten P und Q (oder P und R) sich hinzieht.

γ. Dritte Gruppe. Es liegen zwei Mittelpuncte, O und O'', innerhalb des Asymptoten-Dreiecks, der dritte Mittelpunct O' liegt aufserhalb des Dreiecks auf entgegengesetzter Seite der Linie S. Diese Linie schneidet zwei Seiten der Dreiecks. Wir begegnen hier, weil, ganz analog wie in der ersten Gruppe, fünf Uebergangs-Bestimmungen Statt finden,

acht verschiedenen Fällen. Die Ordnung der Aufeinanderfolge der fünf Uebergänge ist eine andere. Den sieben ersten der nachstehenden acht Arten entsprechen, in Beziehung auf das Vorzeichen, übereinstimmende Werthe der Constanten μ, mit deren Zunahme, von einer dieser Arten zur folgenden, die Curve weiter von den Asymptoten sich entfernt. Nur der letzten der neuen acht Arten entspricht ein Werth von μ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen.

Die 16. Art. Fig. IV, 1. Die Curve besteht nur aus einem Theile. Ein Zweig desselben mit zwei Wendungspuncten erstreckt sich beutelförmig in das Asymptoten-Dreieck und schlingt sich, innerhalb desselben, um die beiden Mittelpuncte O und O''; ein zweiter Zweig mit einem Wendungspuncte nähert sich den beiden Asymptoten P und Q, und zwar der ersten derselben, nachdem er sie zuvor geschnitten; der dritte Zweig liegt, wie ein Hyperbelzweig, in einem der von den beiden Asymptoten P und R gebildeten Scheitelwinkel.

Die 17. Art. Fig. IV, 2. An die Stelle des ersten Zweiges der vorigen Curve ist eine Schleife getreten, die sich um den Mittelpunct O schlingt und im Puncte O'' ihren Doppelpunct hat. Dieser Zweig hat seine beiden Wendungspuncte verloren.

Die 18. Art. Fig. IV, 3. Die Curve besteht aus zwei Theilen. Vom ersten Zweige der beiden vorhergehenden Curven hat sich ein Oval abgelöset, das sich um den Mittelpunct O zieht, wonach dieser Zweig die beiden Doppelpuncte, die er bei der vorigen Art verloren hat, nun wiedererhält.

Die 19. Art. Fig. IV, 4. An die Stelle des Ovals ist der Punct O, als conjugirter isolirter Punct, getreten.

Die 20. Art. Fig. IV, 5. Das Oval ist ganz verschwunden.

Die 21. Art. Fig. IV, 6. Der zweite Zweig der 16. Art, der sich, bei den folgenden Arten, immer weiter von den Asymptoten entfernt und dem ersten Zweige sich immer mehr genähert hat, bildet nun mit diesem Zweige einen Doppelpunct in O'. Er verliert hierbei seinen Wendungspunct, so wie auch der erste Zweig nur einen einzigen Doppelpunct behält.

Die 22. Art. Fig. IV, 7. Die Curve besteht aus zwei Theilen. Der eine Theil, mit drei Wendungspuncten, hat Q zur Asymptote, der andere Theil, mit den beiden Asymptoten P und R, ist hyperbelartig, einer seiner beiden Zweige ist der dritte Zweig der 16. Art, welcher sich in den folgenden Arten immer weiter von seinen Asymptoten entfernt hat.

Die 23. Art. Fig. IV, 8. Die Curve besteht aus einem Theile mit drei Wendungspuncten und der Asymptote P, und einem hyperbelartigen Theile mit den Asymptoten Q und R.

δ. *Vierte Gruppe.* Es fallen zwei Mittelpuncte O und O'' in einem einzigen Puncte, welcher auf dem Umfange der, die Seiten des Asymptoten-Dreiecks in ihren Mitten berührenden Ellipse liegt, zusammen. Es ergeben sich hier nur sechs Arten, weil die beiden Uebergangs-Arten der vorigen Gruppe mit Doppelpuncten in O'' und O (die 17. und 19. Art) hier identisch werden, und folglich mit ihnen auch die zwischenliegende Art zusammenfällt.

Die 24. Art. Fig. V, 1. Die Curve hat nur einen einzigen Theil, welcher aus drei unendlichen Zweigen, ähnlich wie bei der 16. Art, besteht.

Die 25. Art. Fig. V, 2. Die Curve hat einen Rückkehrpunct in O. Der beutelförmig in das Asymptoten-Dreieck sich erstreckende Zweig der vorigen Art hat seine beiden Wendungspuncte verloren und bildet nun eine Spitze.

Die 26. Art. Fig. V, 3. Der beutelförmige Zweig der 24. Art hat seine beiden Wendungspuncte wiedererhalten, schlingt sich nun aber nicht mehr um den Mittelpunct O.

Die 27. Art. Fig. V, 4. Die Curve hat in O' einen Doppelpunct.

Die 28. Art. Fig. V, 5. Die Curve hat sich in zwei Theile getrennt. Der eine Theil, mit drei Wendungspuncten, hat Q zu seiner Asymptote; der andere, mit den beiden Asymptoten P und R, ist hyperbelartig.

Die 29. Art. Fig. V, 6. Die Curve besteht ebenfalls aus zwei Theilen, von welchen der eine P zur Asymptote hat, und der andere hyperbelartige den Asymptoten Q und R sich nähert.

ε. Fünfte Gruppe. Es sind zwei Mittelpuncte O und O'' imaginär. Hiernach fällt die Uebergangs-Bestimmung zwischen der 24. und 26. Art der vorigen Nummer ganz weg, und hiernach bleiben blofs vier Arten zu unterscheiden übrig.

Die 30. Art. Fig. VI, 1. Die Curve besteht aus einem Zweige mit drei unendlichen Zweigen.

Die 31. Art. Fig. VI, 2. Die Curve hat in O' einen Doppelpunct.

Die 32. Art. Fig. VI, 3. Die Curve hat sich in zwei Theile getrennt. Der eine Theil hat Q zu seiner Asymptote, der andere hyperbelartige nähert sich den beiden Asymptoten P und R.

Die 33. Art. Fig. VI, 4. Die Curve besteht, wie die vorige, aus zwei Theilen, nur hat der eine P und der andere Q und R zu Asymptoten.

B. Die Asymptoten der Curve gehen alle drei durch denselben Punct. Wir unterscheiden hier zwei Gruppen, je nachdem die Linie S durch eben diesen Punct geht oder nicht.

α. Erste Gruppe. Die Linie S geht nicht durch den gemeinsamen Durchschnittspunct der Asymptoten. Die drei Mittelpuncte sind immer reell. Einer derselben, O, fällt ebenfalls in jenen gemeinsamen Durchschnittspunct; die beiden andern, O' und O'', liegen auf einer geraden Linie S parallel und um die Hälfte weiter, als diese von dem Puncte O entfernt ist. Wenn wir diese Gruppe als eine Particularisation der zuerst betrachteten Gruppe ansehen, so ist zuvörderst klar, dafs dadurch, dafs die Curve mit dem conjugirten Puncte in O, hier in das System der drei Asymptoten ausartet, die beiden ersten Arten der letztgenannten Gruppe ganz wegfallen. Die noch übrigen sechs Arten beziehen sich hier, wo einer Vertauschung der beiden Mittelpuncte blofs eine Vertauschung der Asymptoten entspricht, paarweise (die 3. und 6. Art, die 4. und 7. Art, die 5. und 8. Art) auf denselben Fall, so dafs uns blofs hier drei verschiedene Arten entgegentreten.

Die 34. Art. Fig. VII, 1. Die Curve besteht aus einem Theile mit drei unendlichen Zweigen.

Die 35. Art. Fig. VII, 2. Die Curve hat in O'' einen Doppelpunct.

Die 36. Art. Fig. VII, 3. Die Curve hat sich in zwei Teile getreont. Der eine Theil hat drei Wendungspuncte und P zur Asymptote; des andere Theil ist ein hyperbelartiger, mit den beiden Asymptoten Q und R.

β. Zweite Gruppe. Die Linie S geht durch den gemeinsamen Durchschnitt der drei Asymptoten. In demselben Puncte fallen die Mittelpuncte alle drei zusammen. Jede von der Curve begränzte gerade Linie wird in diesem Puncte halbirt. Dieser Punct ist ein Wendungspunct der Curve. Es gibt hier nur eine einzige Art.

Die 37. Art. Fig. VIII. Die Curve besteht aus einem Theile mit der Asymptote R und mit drei Wendungspuncten, von welchen der eine in O auf der Asymptote liegt, und einem andern, hyperbelartigen Theile mit den beiden Asymptoten P und Q.

I, 2. Die Curven haben drei reelle geradlinige Asymptoten und unter diesen eine

osculirende, P, der sie sich beide Male auf derselben Seite annähern. Die Linie S ist dieser osculirenden Asymptote parallel. Ein Mittelpunct liegt nach der Richtung dieser Asymptote unendlich weit. Ebenso einer der drei Wendungspuncte, die uns in den frühern allgemeinen Fällen entgegengetreten sind. Die Mitten aller Chorden der Curve, welche der osculirenden Asymptote parallel sind, liegen in einer geraden Linie, und auf dieser geraden Linie liegen auch die beiden Mittelpuncte O und O'.

A. Die drei Asymptoten gehen nicht durch denselben Punct, sondern bilden irgend ein Dreieck. Die osculirende Asymptote P wollen wir als die Basis, den Durchschnitt der beiden andern als den Scheitel dieses Dreiecks bezeichnen. Es treten uns hier sechs verschiedene Gruppen entgegen. Die erste und letzte dieser Gruppen entsprechen der ersten der fünf Gruppen der Curven I, 1.

α. Erste Gruppe. Die Linie S schneidet die Scheitel des Asymptoten-Dreiecks in ihren Verlängerungen über den Scheitel hinaus. Die beiden Mittelpuncte sind reell; einer derselben, O, liegt innerhalb des Asymptoten-Dreiecks in einem Abstande von der Basis, der gröfser als ein Drittel und kleiner als die Hälfte der Höhe des Dreiecks ist, der andere, O', liegt weiter als die Linie S von der Basis entfernt. Zur Bestimmung der verschiedenen Arten erhalten wir eine Uebergangs-Bestimmung, der die 4. Art entspricht, weniger als in der zuerst betrachteten Gruppe. Es gibt sechs Arten.

Die 38. Art. Fig. IX, 1. Die Curve besteht aus zwei Theilen. Der eine Theil hat drei Asymptoten und zerfällt in drei Zweige, von denen einer zwei Wendungspuncte hat. Der andere ist ein Oval um den Mittelpunct O, im Innern des Asymptoten-Dreiecks.

Die 39. Art. Fig. IX, 2. An die Stelle des zweiten Theiles ist der conjugirte blofse Punct O getreten.

Die 40. Art. Fig. IX, 3. Der zweite Theil ist ganz verschwunden.

Die 41. Art. Fig. IX, 4. Die Curve ist auf die entgegengesetzte Seite ihrer Asymptoten getreten. Sie besteht aus zwei Theilen, von welchen einer P zur osculirenden Asymptote hat, und der andere, hyperbelartig, den beiden Asymptoten Q und R sich nähert.

Die 42. Art. Fig. IX, 5. Die Curve hat in O' einen Doppelpunct; die beiden Wendungspuncte sind verschwunden.

Die 43. Art. Fig. IX, 6. Die Curve besteht nur aus einem Theile, der in drei Zweige, von welchen zwei einen Wendungspunct haben, zerfällt.

β. Zweite Gruppe. Die Linie S geht durch den Scheitel des Asymptoten-Dreiecks und wird in diesem Puncte von der Curve berührt. Der Mittelpunct O' fällt in eben diesen Punct, der andere Mittelpunct O liegt auf derjenigen geraden Linie, welche durch die Mitte der Höhe des Asymptoten-Dreiecks der Basis desselben parallel gezogen wird. Von dieser geraden Linie wird jede Chorde der Curve, welche verlängert durch den Punct O' geht, halbirt. Es gibt hier nur vier verschiedene Arten, weil die der 42. Art entsprechende Uebergangs-Curve in das System der drei Asymptoten ausgeartet ist.

Die 44. Art. Fig. X, 1. Die Curve besteht aus zwei Theilen, der eine zerfällt in drei unendliche Zweige, von welchen einer zwei Wendungspuncte hat, der andere ist ein Oval im Innern des Asymptoten-Dreiecks.

Die 45. Art. Fig. X, 2. Das Oval hat sich auf den conjugirten isolirten Punct O reducirt.

Die 46. Art. Fig. X, 3. Das Oval ist ganz verschwunden.

Die 47. Art. Fig. X, 4. Die Curve besteht aus einem Theile mit zwei Wendungs-

puncten und der osculirenden Asymptote P und einem andern hyperbelartigen Zweige mit den beiden Asymptoten Q und R.

γ. Dritte Gruppe. Die Linie S schneidet die beiden Schenkel des Asymptoten-Dreiecks so, dafs der Scheitel dieses Dreiecks von der Basis mehr als neun Mal so weit entfernt liegt, als von der Linie S. Die Mittelpuncte bleiben reell und liegen beide innerhalb des Asymptoten-Dreiecks zwischen der Basis und der Linie S. Der Abstand des einen, O, von der Basis, ist gröfser als $\frac{1}{2}$ und kleiner als $\frac{2}{3}$ der Höhe des Dreiecks; der Abstand des andern gröfser als $\frac{2}{3}$ der Höhe. Wir finden hier sechs verschiedene Arten.

Taf. III. Die 48. Art. Fig. XI, 1. Die Curve besteht nur aus einem Theile; dieser hat einen Zweig mit zwei Wendungspuncten, welcher sich beutelförmig innerhalb des Asymptoten-Dreiecks um die beiden Mittelpuncte zieht.

Die 49. Art. Fig. XI, 2. An die Stelle des beutelförmig in das Asymptoten-Dreieck hineintretenden Zweiges ist eine Schleife getreten, die sich um den Mittelpunct O zieht und in O' ihren Knoten hat; die beiden Wendungspuncte sind verschwunden.

Die 50. Art. Fig. XI, 3. Von demselben Zweige hat sich ein Oval um den Mittelpunct O abgelöset, so dafs die Curve in zwei Theile getrennt ist. Derjenige Zweig, von welchem das Oval sich abgetrennt hat, hat seine beiden Wendungspuncte wiedererhalten.

Die 51. Art. Fig. XI, 4. An die Stelle des Ovals ist der Punct O als zugeordneter isolirter Punct getreten.

Die 52. Art. Fig. XI, 5. Das Oval ist ganz verschwunden.

Die 53. Art. Fig. XI, 6. Die Curve, welche in den vorstehenden fünf Arten immer weiter von ihren Asymptoten sich entfernt hat, ist nun auf die entgegengesetzten Seiten derselben hinübergetreten. Sie besteht aus einem Theile mit zwei Wendungspuncten und der osculirenden Asymptote P und einem andern Theile, welcher hyperbelartig den beiden Asymptoten Q und R sich nähert.

δ. Vierte Gruppe. Die Linie S schneidet die beiden Schenkel des Asymptoten-Dreiecks so, dafs der Scheitel desselben neun Mal so weit von der Basis, als von der Linie S, entfernt ist. Die beiden Mittelpuncte fallen in einem einzigen Puncte zusammen, dessen Abstand von der Basis zwei Drittel der Höhe des Dreiecks ist. Wir finden hier vier verschiedene Arten.

Die 54. Art. Fig. XII, 1. Die Curve besteht nur aus einem Theile, und dieser hat einen Zweig mit zwei Wendungspuncten, welcher sich beutelförmig innerhalb des Asymptoten-Dreiecks um die zusammenfallenden beiden Mittelpuncte zieht.

Die 55. Art. Fig. XII, 2. An die Stelle des eben bezeichneten Zweiges der Curve ist ein Zweig mit einem Rückkehrpuncte in O getreten.

Die 56. Art. Fig. XII, 3. Derselbe Zweig hat seine beiden Wendungspuncte, die bei der vorigen Art verschwunden sind, wiedererhalten, zieht sich aber nicht mehr um die zusammenfallenden beiden Mittelpuncte.

Die 57. Art. Fig. XII, 4. Die Curve ist auf die entgegengesetzten Seiten ihrer Asymptoten hinübergetreten. Sie besteht aus einem Theile mit zwei Wendungspuncten und der osculirenden Asymptote P und einem hyperbelartigen Theile mit den beiden Asymptoten Q und R.

ε. Fünfte Gruppe. Die Linie S schneidet die beiden Schenkel des Asymptoten-Dreiecks so, dafs der Scheitel dieses Dreiecks weniger als neun Mal so weit von der Basis entfernt ist, als von der Linie S. Die beiden Mittelpuncte sind alsdann imaginär, und es gibt nur zwei verschiedene Arten.

Die 58. Art. Fig. XIII, 1. Die Curve besteht aus einem Theile und dieser aus drei unendlichen Zweigen, von welchen einer zwei Wendungspuncte hat, und die beiden andern, ohne Wendungspuncte, unterhalb der Basis liegen.

Die 59. Art. Fig. XIII, 2. Die Curve besteht aus einem Theile mit zwei Wendungspuncten und der osculirenden Asymptote P, und aus einem hyperbelartigen Theile mit den beiden Asymptoten Q und R.

ζ. *Sechste Gruppe.* Die Linie S schneidet die beiden Schenkel des Asymptoten-Dreiecks in ihren Verlängerungen über die Basis hinaus. Die beiden Mittelpuncte sind reell. Einer derselben, O, liegt innerhalb des Asymptoten-Dreiecks in einem geringern Abstande von der Basis, als der dritte Theil der Höhe des Dreiecks beträgt. Der andere Mittelpunct, O', liegt unterhalb der Basis und weiter von derselben entfernt, als die Linie S. Es treten uns hier wiederum sechs verschiedene Arten entgegen.

Die 60. Art. Fig. XIV, 1. Die Curve besteht aus zwei Theilen. Der eine Theil zerfällt in drei unendliche Zweige, von welchen einer, wie ein Hyperbelzweig, den beiden Asymptoten Q und R sich nähert, und jeder der beiden andern an einer dieser beiden Asymptoten sich hinzieht, nachdem er dieselben zuvor geschnitten und überdiefs an die osculirende Asymptote P sich anschmiegt. Der andere Theil ist ein Oval innerhalb des Asymptoten-Dreiecks.

Die 61. Art. Fig. XIV, 2. Das Oval hat sich auf den conjugirten isolirten Punct O reducirt.

Die 62. Art. Fig. XIV, 3. Das Oval ist ganz verschwunden.

Die 63. Art. Fig. XIV, 4. Zwei Zweige des übrig bleibenden Theiles sind einander immer näher gerückt, und schneiden sich, nachdem jeder seinen Wendungspunct verloren, in dem Doppelpuncte O'.

Die 64. Art. Fig. XIV, 5. Die Curve hat sich wieder in zwei Theile getrennt. Der eine Theil, mit zwei Wendungspuncten, hat P zur osculirenden Asymptote, der andere hyperbelartige Theil nähert sich den Asymptoten Q und R.

Die 65. Art. Fig. XIV, 6. Die Curve ist, nachdem sie sich immer weiter von den Asymptoten entfernt hat und ihr erster Theil der Linie S immer mehr näher gerückt ist, auf die entgegengesetzten Seiten dieser Linie und der Asymptoten hinübergetreten. Sie besteht nur aus einem Theile und dieser aus drei Zweigen, von welchen einer drei Wendungspuncte hat.

B. Die drei Asymptoten gehen durch einen und denselben Punct. Es gibt hier nur eine *einzige Gruppe.* Von den beiden immer reellen Mittelpuncten fällt einer, O, in den gemeinsamen Durchschnitt der Asymptoten, und der andere, O', liegt auf der vierten Harmonicalen zu der osculirenden Asymptote P und dem Asymptotenpaare Q und R, dreimal so weit von der osculirenden Asymptote als von der Linie S entfernt. Wir begegnen hier vier verschiedenen Arten.

Die 66. Art. Fig. XV, 1. Die Curve besteht aus einem Theile und dieser aus drei unendlichen Zweigen. Ein Zweig nähert sich, wie ein Hyperbelzweig, den beiden Asymptoten Q und R, von den beiden andern schneidet jeder eine dieser beiden Asymptoten, bevor er derselben sich nähert, hat einen Wendungspunct und schmiegt sich überdiefs an die osculirende Asymptote P an.

Die 67. Art. Fig. XV, 2. Die beiden letztgenannten Zweige sind einander immer näher gerückt, und bilden nun in O' einen Doppelpunct, nachdem jeder seinen Wendungspunct verloren hat.

Die 68. Art. Fig. XV, 3. Die Curve hat sich in zwei Theile getheilt. Ein Theil mit zwei Wendungspuncten hat P zur osculirenden Asymptote; der andere, hyperbelartige Theil nähert sich den beiden Asymptoten Q und R.

Die 69. Art. Fig. XV, 4. Die Curve ist auf den entgegengesetzten Seiten der Asymptoten hinübergetreten, und besteht aus einem Theile mit drei unendlichen Zweigen, von welchen einer zwei Wendungspuncte hat.

I, 3. Die Curve hat drei reelle osculirende Asymptoten, an deren jeder dieselbe beide Male auf derselben Seite sich hinzieht. Die Curve schneidet keine ihrer Asympteten, und ihre Wendungspuncte sind verschwunden. Die Mitten aller Chorden der Curve, welche einer der drei Asymptoten parallel sind, liegen auf einer geraden Linie. Die hiernach sich ergebenden drei geraden Linien schneiden sich in dem einzigen Mittelpuncte der Curve.

A. Es gehen die drei Asymptoten nicht durch denselben Punct, sondern bilden irgend ein Dreieck. Die Mitte (der Schwerpunct) dieses Dreiecks ist der einzige Mittelpunct. Es findet sich hier nur eine *einzige Gruppe* mit vier verschiedenen Arten.

Die 70. Art. Fig. XVI, 1. Die Curve besteht aus zwei Theilen. Ein Theil zerfällt in drei unendliche Zweige, von welchen jeder in einem der Scheitelwinkel des Asymptoten-Dreiecks liegt. Der andere Theil ist ein Oval im Innern dieses Dreiecks.

Die 71. Art. Fig. XVI, 2. Das Oval hat sich auf einen zugeordneten isolirten Punct, O, reducirt.

Die 72. Art. Fig. XVI, 3. Das Oval ist ganz verschwunden.

Die 73. Art. Fig. XVI, 4. Die Curve ist auf die entgegengesetzten Seiten ihrer Asymptoten hinübergetreten. Sie besteht aus einem einzigen Theile. Jeder der drei Zweige desselben liegt in einem derjenigen drei unbegränzten Flächenräume, welche von einer Dreieckseite und den Verlängerungen der beiden andern gebildet werden.

B. Es gehen die drei Asymptoten durch einen und denselben Punct. In demselben Puncte liegt alsdann auch der Mittelpunct. Es gibt hier nur *eine Gruppe* und diese enthält nur eine einzige Art.

Die 74. Art. Fig. XVII. Die Curve besteht nur aus einem Theile. Dieser zerfällt in drei unendliche Zweige, welche in drei, nicht auf einander folgenden, der von den drei Asymptoten gebildeten sechs Winkeln liegen.

I, a. Curven mit einer reellen und zwei imaginären Asymptoten. Diese Curven sind durch die reelle Asymptote, den Asymptotenpunct, die Linie S und einen constanten Coefficienten μ vollkommen bestimmt. Sie zerfallen in Gruppen nach der verschiedenen gegenseitigen Lage der Asymptote, der Linie S und des Asymptotenpunctes, und jede Gruppe in Arten nach den verschiedenen Bestimmungen über den constanten Coefficienten μ. Die Gruppen-Bestimmung ordnet sich der frühern Unterscheidung dreier Fälle unter.

I, 4. Die Linie S ist der reellen Asymptote P nicht parallel. Die Curve nähert sich dieser Asymptote auf den beiden entgegengesetzten Seiten derselben. Sie hat im Allgemeinen drei Mittelpuncte.

A. Der Asymptotenpunct A liegt nicht auf der reellen Asymptote P. Wir haben hier sechs Gruppen zu unterscheiden.

α. *Erste Gruppe.* Die Curve hat drei Mittelpuncte, welche alle mit dem Asymptotenpuncte A auf derselben Seite der Asymptote P liegen. Zwei der drei Mittelpuncte, O und O', liegen auf einer Seite, der dritte Mittelpunct, O'', liegt mit dem Asymptotenpuncte A auf der andern Seite der Linie S. Wir erhalten zur Eintheilung der hierher gehörigen Curven in Arten, wie in dem Falle dreier reellen Asymptoten, fünf Uebergangs-Bestim-

mungen; nemlich drei Curven mit Doppelpuncten in O, O' und O'', das System des Asymtotenpunctes A und der Asymptote P, und die Linie S. Nach diesen fünf Uebergangs-Bestimmungen ergeben sich acht verschiedene Arten in dieser Gruppe. Während der Coefficient μ, abgesehen vom Zeichen, von einer der fünf ersten Arten zur andern wächst, entfernt sich die bezügliche Curve immer weiter von ihrer Asymptote; indem μ, durchs Unendliche hindurchgehend, sein Zeichen ändert, und dann wiederum abnimmt, erscheint der unendliche Zweig der Curve, durch die Linie S hindurchgehend, auf der entgegengesetzten der Asymptote wieder und rückt dann derselben von jeder der drei letzten Arten zu der folgenden näher.

Die 75. Art. Fig. XVIII, 1. Die Curve besteht aus einem einzigen unendlichen Zweige mit P als Asymptote und mit drei Wendungspuncten.

Die 76. Art. Fig. XVIII, 2. Zu dem unendlichen Zweige der vorigen Curve ist ein conjugirter isolirter Punct, O, hinzugetreten.

Die 77. Art. Fig. XVIII, 3. Die Curve besteht aufser dem unendlichen Zweige auch noch aus einem Ovale um den Mittelpunct O.

Die 78. Art. Fig. XVIII, 4. Das Oval ist dem unendlichen Zweige immer näher gerückt, aus ihrer Vereinigung ist eine Schleife entstanden, welche um den Mittelpunct O sich zieht und in O' einen Doppelpunct hat. Zwei Wendungspuncte sind verschwunden.

Die 79. Art. Fig. XVIII, 5. Die Curve besteht wiederum blofs aus einem unendlichen Zweige mit drei Wendungspuncten; sie umschliefst die beiden Mittelpuncte O und O'.

Die 80. Art. Fig. XVIII, 6. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, der sich um den Asymptotenpunct A und den dritten Mittelpunct O'' zieht.

Die 81. Art. Fig. XVIII, 7. Die Curve bildet eine Schleife um den Asymptotenpunct A, sie hat zwei Wendungspuncte verloren, an deren Stelle der Doppelpunct O'' getreten ist.

Die 82. Art. Fig. XVIII, 8. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit drei Wendungspuncten und einem Ovale um den Asymptotenpunct A.

β. Zweite Gruppe. Die Curve hat zwei Mittelpuncte, welche in dem Puncte O zusammenfallen. Sie liegen mit dem dritten Mittelpuncte O'' und dem Asymptotenpuncte A auf derselben Seite der Asymptote P, aber auf entgegengesetzten Seiten der Linie S. Es treten uns hier sechs verschiedene Arten entgegen.

Die 83. Art. Fig. XIX, 1. Die Curve besteht nur aus einem unendlichen Zweige.

Die 84. Art. Fig. XIX, 2. Die Curve hat in O einen Rückkehrpunct. Zwei ihrer Wendungspuncte sind verschwunden.

Die 85. Art. Fig. XIX, 3. Die Curve besteht aus einem, um die beiden zusammenfallenden Puncte sich hinziehenden, unendlichen Zweige.

Die 86. Art. Fig. XIX, 4. Die Curve hat einen unendlichen Zweig, welcher sich um den Asymptotenpunct A und den Mittelpunct O'' zieht.

Die 87. Art. Fig. XIX, 5. Die Curve bildet eine Schleife um den Asymptotenpunct A mit einem Doppelpuncte in O''.

Die 88. Art. Fig. XIX, 6. Von dem unendlichen Zweige der Curve hat sich ein Oval, um den Asymptotenpunct A, abgelöset.

γ. Dritte Gruppe. Die Linie S geht durch den Asymptotenpunct A. Ein Mittelpunct O fällt alsdann in eben diesen Punct. Jede Chorde der Curve, welche, verlängert, durch diesen Punct geht, wird von derjenigen geraden Linie, welche in der Mitte zwischen dem Asymptotenpuncte A und der Asymptote P, parallel mit dieser, hindurchgeht, halbirt. Auf derselben geraden Linie, zu beiden Seiten der Linie S, liegen die beiden Mittelpuncte

O' und O''. Wir finden hier sechs Arten, die aber nur für drei verschiedene zählen können.

Die 89. Art. Fig. XX, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige und einem, die Linie S im Asymptotenpuncte berührenden Ovale.

Die 90. Art. Fig. XX, 2. Die Curve bildet eine Schleife mit dem Doppelpuncte in O''.

Die 91. Art. Fig. XX, 3. Die Curve besteht blofs aus einem, um den Mittelpunct O'' sich ziehenden unendlichen Zweige.

δ. Vierte Gruppe. Zwei Mittelpuncte der Curve sind imaginär. Der einzige reelle Mittelpunct O liegt mit dem Asymptotenpuncte A sowohl auf derselben Seite der Asymptote A, als auch der Linie S. Es gibt hier vier verschiedene Arten.

Taf. IV. Die 92. Art. Fig. XXI, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit drei Wendungspuncten und einem Ovale, um den Asymptotenpunct A.

Die 93. Art. Fig. XXI, 2. Die Curve bildet eine Schleife um den Asymptotenpunct, mit dem Doppelpuncte in O.

Die 94. Art. Fig. XXI, 3. Die Curve besteht aus einem um den Asymptotenpunct A und den Mittelpunct O sich schlingenden unendlichen Zweige.

Die 95. Art. Fig. XXI, 4. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, der ganz in denselben beiden der von der Asymptote P und der Linie S gebildeten Scheitelwinkeln sich erstreckt.

ε. Fünfte Gruppe. Die Curve hat drei reelle Mittelpuncte, die mit dem Asymptotenpuncte A in denselben beiden von der Asymptote P und der Linie S gebildeten Scheitelwinkeln liegen, und zwar so, dafs ein Mittelpunct O und der Asymptotenpunct, so wie die beiden andern Mittelpuncte O' und O'' in demselben dieser beiden Scheitelwinkel sich befinden. Wir erhalten hier acht verschiedene Arten.

Die 96. Art. Fig. XXII, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige und einem Ovale um den Asymptotenpunct A.

Die 97. Art. Fig. XXII, 2. Die Curve bildet eine Schleife um den Asymptotenpunct mit einem Doppelpuncte in O.

Die 98. Art. Fig. XXII, 3. Die Curve besteht aus einem um den Asymptotenpunct und den Mittelpunct O sich hinziehenden unendlichen Zweige.

Die 99. Art. Fig. XXII, 4. Zu dem unendlichen Zweige ist ein conjugirter Punct O' hinzugetreten.

Die 100. Art. Fig. XXII, 5. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige und und einem Ovale um den Mittelpunct O'.

Die 101. Art. Fig. XXII, 6. Die Curve bildet um den Mittelpunct O' eine Schleife mit dem Doppelpuncte in O'.

Die 102. Art. Fig. XXII, 7. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, welcher sich auf einer Seite der Asymptote P, wie in den vier vorhergehenden Arten um den Asymptotenpunct und den Mittelpunct O, auf der andern Seite aber nun auch um die beiden Mittelpuncte O' und O'' herumzieht.

Die 103. Art. Fig. XXII, 8. Die Curve ist in die andern beiden von der Asymptote P und der Linie S gebildeten Scheitelwinkel herübergetreten, und besteht blofs aus einem, sehr abgeflachten, unendlichen Zweige.

ζ. Sechste Gruppe. Zwei Mittelpuncte, O' und O'', fallen in demselben Puncte zusammen, und liegen mit dem Asymptotenpuncte A auf entgegengesetzten Seiten der Asymptote P und der Linie S. Der noch übrige Mittelpunct O liegt mit dem Asymptotenpuncte in

demselben von der der Asymptote P und der Linie S gebildeten vier Scheitelwinkel. Es ergeben sich hier sechs verschiedene Arten.

Die 104. Art. Fig. XXIII, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige und einem Ovale um den Asymptotenpunct A.

Die 105. Art. Fig. XXIII, 2. Die Curve bildet um A eine Schleife mit einem Doppelpuncte in O.

Die 106. Art. Fig. XXIII, 3. Die Curve besteht aus einem, um den Asymptotenpunct A und den Mittelpunct O sich hinziehenden, Zweige.

Die 107. Art. Fig. XXIII, 4. Die Curve hat in O' einen Rückkehrpunct.

Die 108. Art. Fig. XXIII, 5. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, welcher sich einerseits um A und O, andrerseits um O' und O'' herumschlingt.

Die 109. Art. Fig. XXIII, 6. Die Curve ist auf die entgegengesetzten Seiten der Asymptote P und der Linie S hinübergetreten.

B. Es liegt der Asymptotenpunct A auf der reellen Asymptote P. Ein Mittelpunct, O, fällt alsdann mit dem Asymptotenpuncte zusammen. Die beiden andern Mittelpuncte, O' und O'', liegen auf einer geraden Linie, welche der Linie S parallel und um die Hälfte weiter als diese von dem Asymptotenpuncte entfernt ist. Es treten uns hier vier Gruppen entgegen.

α. Erste Gruppe. Die Mittelpuncte sind alle drei reell. Diese Gruppe enthält sechs verschiedene Arten.

Die 110. Art. Fig. XXIV, 1. Die Curve besteht blofs aus einem unendlichen Zweige mit drei Wendungspuncten.

Die 111. Art. Fig. XXIV, 2. Zu dem unendlichen Zweige ist ein conjugirter Punct, O', hinzugetreten.

Die 112. Art. Fig. XXIV, 3. Die Curve besteht, neben dem unendlichen Zweige, aus einem Ovale um den Mittelpunct O'.

Die 113. Art. Fig. XXIV, 4. Die Curve bildet eine Schleife um den Mittelpunct O' mit einem Doppelpuncte in O''.

Die 114. Art. Fig. XXIV, 5. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, der sich um die beiden Mittelpuncte O' und O'' zieht.

Die 115. Art. Fig. XXIV, 6. Die Curve ist auf die entgegengesetzten Seiten der Asymptote P und der Linie S hinübergetreten.

β. Zweite Gruppe. Es fallen zwei Mittelpuncte in demselben Puncte zusammen. Wir erhalten hier vier verschiedene Arten.

Die 116. Art. Fig. XXV, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit drei Wendungspuncten.

Die 117. Art. Fig. XXV, 2. Die Curve hat in O' einen Rückkehrpunct und nur einen Wendungspunct, der auf entgegengesetzter Seite der Asymptote P liegt.

Die 118. Art. Fig. XXV, 3. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, welcher sich um die beiden in O' zusammenfallenden Mittelpuncte zieht.

Die 119. Art. Fig. XXV, 4. Die Curve ist auf die entgegengesetzten Seiten der Asymptote P und der Linie S hinübergetreten.

γ. Dritte Gruppe. Es sind zwei Mittelpuncte imaginär. Diese Gruppe enthält nur eine einzige Art.

Die 120. Art. Fig. XXVI. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit drei Wendungspuncten.

δ. Vierte Gruppe. Die Linie S geht durch den gemeinsamen Durchschnittspunct der

drei Asymptoten. In diesen Punct fallen alsdann die Mittelpuncte alle drei zusammen. Es gibt hier eine einzige Art.

Die 121. Art. Fig. XXVII. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit drei Wendungspuncten, von welchen der mittlere mit dem Asymptotenpuncte A auf der Asymptote P zusammenfällt. Jede durch diesen Punct gehende gerade Linie schneidet die Curve aufserdem noch in solchen zwei Puncten, welche gleich weit von diesen Puncten entfernt sind. Die Linie S ist die Tangente der Curve im fraglichen Wendungspuncte.

I, 5. Die Linie S ist der reellen Asymptote parallel. Diese Asymptote ist eine osculirende, und es nähert sich ihr die Curve beide Male auf derselben Seite. Die Mitten aller Chorden der Curve, welche der reellen Asymptote parallel sind, liegen in gerader Linie. Auf eben dieser geraden Linie liegen die beiden Mittelpuncte der Curve.

A. Der Asymptotenpunct liegt nicht auf der reellen Asymptote. Es ergeben sich hier sechs verschiedene Gruppen, welche den sechs Gruppen der Curven mit reellen Asymptoten, unter denen sich eine osculirende befindet, ganz analog sind.

α. Erste Gruppe. Der Asymptotenpunct A liegt zwischen der reellen Asymptote und der Linie S. Der eine Mittelpunct O liegt zwischen dem Asymptotenpuncte und der Asymptote, der andere O′ liegt auf derselben Seite der Asymptote, weiter von derselben entfernt als die Linie S. Wir unterscheiden hier sechs Arten. Die Curven der drei ersten Arten liegen ganz zwischen der reellen Asymptote und der Linie S, und entfernen sich von einer Art zur andern von der Asymptote und dem Asymptotenpuncte. Nachdem die Curve durch die Linie S hindurchgegangen, erscheint sie in den drei letzten Arten auf der entgegengesetzten Seite dieser Linie und der Asymptote wieder, und rückt der letztern von einer Art zur andern immer näher.

Die 122. Art. Fig. XXVIII, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit zwei Wendungspuncten und einem Ovale um den Asymptotenpunct A.

Die 123. Art. Fig. XXVIII, 2. Die Curve bildet eine Schleife um den Asymptotenpunct, und hat in O ihren Doppelpunct. Die Wendungspuncte sind verschwunden.

Die 124. Art. Fig. XXVIII, 3. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, welcher sich um den Asymptotenpunct A und den Mittelpunct O zieht.

Die 125. Art. Fig. XXVIII, 4. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige unterhalb der Asymptote und einem Ovale um den Mittelpunct O′.

Die 126. Art. Fig. XXVIII, 5. An die Stelle des Ovals ist O′ als conjugirter isolirter Punct getreten.

Die 127. Art. Fig. XXVIII, 6. Das Oval ist ganz verschwunden.

β. Zweite Gruppe. Die Linie S geht durch den Asymptotenpunct. In diesen Punct fällt O′, einer der beiden Mittelpuncte; während der andere, O, halb so weit als der Asymptotenpunct von der Asymptote P entfernt ist. Eine durch den letztgenannten Mittelpunct, der Asymptote P parallel gezogene, gerade Linie ist der geometrische Ort für die Mitte der beiden Durchschnittspuncte der Curve mit einer solchen geraden Linie, welche sie zum dritten Male in O′ schneidet. Alle Curven berühren die Linie S im Puncte O′. Wir begegnen hier vier verschiedenen Arten.

Die 128. Art. Fig. XXIX, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige und einem Ovale, das durch den Asymptotenpunct A geht.

Die 129. Art. Fig. XXIX, 2. Die Curve bildet eine Schleife mit einem Doppelpuncte in O.

Die 130. Art. Fig. XXIX, 3. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, welcher sich um den Punct O zieht.

Die

Die 131. Art. Fig. XXIX, 4. Die Curve liegt ganz aufserhalb der Asymptote und Linie S, und besteht aus einem unendlichen Zweige unterhalb der Asymptote und einem durch den Asymptotenpunct gehenden Ovale.

γ. Dritte Gruppe. Die Linie S geht zwischen der Asymptote und dem Asymptotenpuncte so hindurch, dafs dieser Punct ihr mehr als neun Mal näher liegt als der Asymptote P. Die Mittelpuncte liegen beide zwischen der Asymptote und der Linie S. Wir begegnen hier sechs verschiedenen Arten. Die Curven der fünf ersten Arten liegen ganz zwischen der Linie S und der Asymptote P.

Die 132. Art. Fig. XXX, 1. Die Curve besteht blofs aus einem unendlichen Zweige.

Die 133. Art. Fig. XXX, 2. Ein conjugirter isolirter Punct in O ist hinzugetreten.

Die 134. Art. Fig. XXX, 3. Statt des isolirten Punctes hat die Curve ein Oval um den Punct O.

Die 135. Art. Fig. XXX, 4. Die Curve bildet eine Schleife um O mit einem Doppelpuncte in O'.

Die 136. Art. Fig. XXX, 5. Die Curve besteht aus einem, um die beiden Mittelpuncte sich ziehenden, unendlichen Zweige.

Die 137. Art. Fig. XXX, 6. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige unterhalb der Asymptote und aus einem Ovale um den Asymptotenpunct A.

δ. Vierte Gruppe. Die Linie S geht zwischen der Asymptote und dem Asymptotenpuncte so hindurch, dafs dieser Punct von der Asymptote neun Mal so weit absteht als von ihr. Die beiden Mittelpuncte fallen alsdann in demselben Puncte zusammen. Es treten uns hier vier verschiedene Arten entgegen.

Die 138. Art. Fig. XXXI, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige zwischen der Linie S und der Asymptote P.

Die 139. Art. Fig. XXXI, 2. Die Curve hat einen Rückkehrpunct in O.

Die 140. Art. Fig. XXXI, 3. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, der sich um die beiden, in O zusammenfallenden, Mittelpuncte zieht.

Die 141. Art. Fig. XXXI, 4. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige unterhalb der Asymptote P und einem Ovale um den Asymptotenpunct A.

ε. Fünfte Gruppe. Die Linie S geht zwischen der Asymptote und dem Asymptotenpuncte so hindurch, dafs dieser Punct ihr weniger als neun Mal näher liegt als der Asymptote. Die beiden Mittelpuncte sind alsdann imaginär, und wir haben nur zwei Arten zu unterscheiden.

Die 142. Art. Fig. XXXII, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige zwischen der Asymptote P und der Linie S.

Die 143. Art. Fig. XXXII, 2. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige unterhalb der Asymptote und einem Ovale um den Asymptotenpunct A.

ζ. Sechste Gruppe. Die Linie S liegt mit dem Asymptotenpuncte auf der entgegengesetzten Seite der Asymptote. Die beiden Mittelpuncte sind alsdann reell, und zwischen ihnen geht sowohl die Asymptote P als auch die Linie S hindurch. Diese Gruppe hat sechs verschiedene Arten.

Die 144. Art. Fig. XXXIII, 1. Die Curve besteht aus einem sehr abgeflachten unendlichen Zweige, und einem Ovale um A.

Die 145. Art. Fig. XXXIII, 2. Die Curve bildet eine Schleife um A mit einem Doppelpuncte in O.

Die 146. Art. Fig. XXXIII, 3. Die Curve besteht blofs aus einem unendlichen Zweige, welcher sich um den Asymptotenpunct und den Mittelpunct O zieht.

Die 147. Art. Fig. XXXIII, 4. Die Curve hat aufserdem einen conjugirten Punct in O'.

Die 148. Art. Fig. XXXIII, 5. Ein Oval der Curve schlingt sich um den Punct O'.

Die 149. Art. Fig. XXXIII, 6. Die Curve besteht blofs aus einem unendlichen Zweige, welcher zwischen der Asymptote P und der Linie S liegt.

B. Der Asymptotenpunct liegt auf der reellen Asymptote. Ein Mittelpunct fällt alsdann mit dem Asymptotenpuncte zusammen, und der andere, O, liegt dreimal so weit von der Asymptote als der Linie S entfernt. Es gibt hier nur eine *einzige Gruppe* und diese enthält vier verschiedene Arten.

Taf. V. Die 150. Art. Fig. XXXIV, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige unterhalb der Asymptote P.

Die 151. Art. Fig. XXXIV, 2. Der Punct O ist als conjugirter Punct hinzugetreten.

Die 152. Art. Fig. XXXIV, 3. Ein Oval der Curve schlingt sich um den Mittelpunct O.

Die 153. Art. Fig. XXXIV, 4. Die Curve besteht aus einem, zwischen der Asymptote P und der Linie S liegenden, unendlichen Zweige.

I, 6. Curven mit zwei imaginären und einer reellen osculirenden Asymptote. Die Linie S liegt unendlich weit. Die Curven haben nur einen einzigen Mittelpunct, und dieser Mittelpunct liegt auf demjenigen Durchmesser des Asymptotenpunctes, dessen zugeordneter der reellen Asymptote parallel ist, und zwar dieser Asymptote dreimal näher als der Asymptotenpunct.

A. Der Asymptotenpunct liegt nicht auf der reellen Asymptote. Wir finden hier eine *einzige Gruppe* mit vier verschiedenen Arten.

Die 154. Art. Fig. XXXV, 1. Die Curve besteht aus einem abgeflachten unendlichen Zweige und einem Ovale um den Asymptotenpunct A.

Die 155. Art. Fig. XXXV, 2. Die beiden Theile der Curve sind immer näher gerückt und bilden nun eine Schleife mit einem Doppelpuncte in O.

Die 156. Art. Fig. XXXV, 3. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, der sich um den Asymptotenpunct A und den Mittelpunct O zieht.

Die 157. Art. Fig. XXXV, 4. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, der unterhalb der Asymptote P liegt.

B. Der Asymptotenpunct liegt auf der reellen Asymptote. *Einzige Gruppe* mit einer einzigen Art.

Die 158. Art. Fig. XXXVI. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit zwei Wendungspuncten.

II. Zweiter Fall. Curven mit parabolischen Asymptoten.

II, 7. Die Curve hat eine geradlinige und parabolische Asymptote. Es befindet sich unter den letztern eine einfach osculirende. Die Linie S, in Beziehung auf diese, ist ein Durchmesser derselben. Von den drei Mittelpuncten liegt einer nach der Richtung dieses Durchmessers unendlich weit. Die verschiedenen Gruppen hängen von der gegenseitigen Lage der geradlinigen Asymptote und der Linie S gegen die osculirende parabolische Asymptote ab.

A. Die parabolische Asymptote wird von der geradlinigen P in zwei reellen Puncten geschnitten. Nach den verschiedenen Lagen der Linie S ergeben sich hier fünf verschiedene Gruppen.

α. Erste Gruppe. Die Linie S schneidet die durch die parabolische Asymptote auf der geradlinigen interceptirten Chorde in deren Verlängerung. Die beiden Mittelpuncte sind reell. Der eine, O, liegt innerhalb des von der geradlinigen und parabolischen Asymptote gebildeten und nach allen Seiten hin umschlossenen Flächenraumes, der andere, O', auf entgegengesetzter Seite der Linie S, aufserhalb der Parabel. Als Uebergangsarten treten uns hier zwei Curven mit Doppelpuncten in O und O', das System der geradlinigen und der parabolischen Asymptote, und endlich die Linie S entgegen; wir erhalten hiernach sechs verschiedene Arten. Von einer der drei ersten Arten zur andern entfernt sich die Curve immer mehr von ihren beiden Asymptoten, tritt dann, durch die Linie S hindurchgehend, auf die entgegengesetzten Seiten derselben hinüber und rückt wiederum ihren Asymptoten von einer der drei letzten Arten zur andern immer näher.

Die 159. Art. Fig. XXXVII, 1. Die Curve besteht aus zwei Theilen. Einer derselben hat zwei unendliche Zweige, von denen jeder an den beiden Asymptoten sich hinzieht, und einer derselben beide schneidet und zwei Wendungspuncte hat, während der andere dieselben nicht schneidet und nur einen Wendungspunct hat. Der andere Theil besteht aus einem Ovale um den Mittelpunct O.

Die 160. Art. Fig. XXXVII, 2. An die Stelle des Ovals ist O als conjugirter isolirter Punct getreten.

Die 161. Art. Fig. XXXVII, 3. Auch der isolirte Punct ist verschwunden.

Die 162. Art. Fig. XXXVII, 4. Die Curve besteht aus einem unendlichen Theile, wie bei der vorigen Art, nur liegt derselbe auf den entgegengesetzten Seiten der beiden Asymptoten.

Die 163. Art. Fig. XXXVII. 5. Die beiden Zweige der Curve sind einander immer näher gerückt und bilden nun in O' einen Doppelpunct. Ein Wendungspunct jedes der beiden Zweige ist verschwunden.

Die 164. Art. Fig. XXXVII, 6. Die Curve hat sich in zwei Theile getrennt, der eine ist ein parabolischer Zweig ohne Wendungspuncte, und der andere ein unendlicher Zweig mit der geradlinigen Asymptote und mit drei Wendungspuncten.

β. Zweite Gruppe. Die Linie S geht durch einen der beiden Durchschnitte der beiden Asymptoten. Ein Mittelpunct O' fällt alsdann in eben diesen Durchschnitt, der andere innerhalb des von den Asymptoten umschlossenen Flächenraumes. Wir finden hier vier Arten.

Die 165. Art. Fig. XXXVIII, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Theile mit den beiden Asymptoten und einem Ovale um den Mittelpunct O.

Die 166. Art. Fig. XXXVIII, 2. An die Stelle des Ovals ist der conjugirte Punct O getreten.

Die 167. Art. Fig. XXXVIII, 3. Auch dieser Punct ist verschwunden.

Die 168. Art. Fig. XXXVIII, 4. Die Curve besteht blofs aus einem Theile und dieser aus zwei unendlichen Zweigen.

γ. Dritte Gruppe. Die Linie S schneidet das durch die parabolische Asymptote auf der geradlinigen interceptirte Segment, und zwar so, dafs dasselbe in solche zwei Theile getheilt wird, von welchen der gröfsere gröfser ist, als das ganze Segment multiplicirt mit $\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})$. Die beiden Mittelpuncte fallen alsdann beide in den gröfsern derjenigen beiden Abschnitte, in welche der von den beiden Asymptoten umschlossene Flächenraum durch die Linie S getheilt wird. Wir begegnen hier sechs verschiedenen Arten.

Die 169. Art. Fig. XXXIX, 1. Die Curve besteht blofs aus einem Theile und dieser

aus zwei unendlichen Zweigen, von welchen einer, mit zwei Wendungspuncten, sich beutelförmig in den umschlossenen Flächenraum erstreckt und sich um die beiden Mittelpuncte zieht, und der andere nur einen Wendungspunct hat.

Die 170. Art. Fig. XXXIX, 2. Der erstgenannte Zweig bildet eine Schleife um den Mittelpunct O' mit einem Doppelpuncte in O.

Die 171. Art. Fig. XXXIX, 3. Von demselben Zweige hat sich ein Oval, das sich um den Mittelpunct O' schlingt, abgesondert, und dieser Zweig hernach die beiden Wendungspuncte, die bei der vorigen Art verschwunden waren, wiedererhalten.

Die 172. Art. Fig. XXXIX, 4. An die Stelle des Ovals ist der isolirte Punct O' getreten.

Die 173. Art. Fig. XXXIX, 5. Auch der isolirte Punct ist verschwunden.

Die 174. Art. Fig. XXXIX, 6. Die Curve ist auf die entgegengesetzten Seiten ihrer Asymptoten hinübergetreten.

δ. Vierte Gruppe. Die Linie S schneidet das durch die parabolische Asymptote auf der geradlinigen interceptirte Segment, und theilt dasselbe in zwei Theile, von welchen der gröfsere dem ganzen Segmente, multiplicirt mit $\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})$, gleich ist. Die beiden Mittelpuncte O und O' fallen alsdann in demselben Puncte zusammen. Es ergeben sich hier vier verschiedene Arten.

Die 175. Art. Fig. XL, 1. Die Curve erstreckt sich beutelförmig um die beiden zusammenfallenden Mittelpuncte in den von den Asymptoten umschlossenen Raum.

Die 176. Art. Fig. XL, 2. Die Curve hat einen Rückkehrpunct in O.

Die 177. Art. Fig. XL, 3. Die Curve besteht aus einem einzigen Theile mit zwei unendlichen Zweigen.

Die 178. Art. Fig. XL, 4. Die Curve ist auf die entgegengesetzten Seiten ihrer beiden Asymptoten hinübergetreten.

ε. Fünfte Gruppe. Die Linie S schneidet das durch die parabolische Asymptote auf der geradlinigen interceptirte Segment in zwei solche Theile, von welchen der gröfsere kleiner ist, als das ganze Segment multiplicirt mit $\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})$. Die beiden Mittelpuncte sind imaginär. Es gibt nur zwei Fälle, und diese bilden nur eine einzige Art.

Die 179. Art. Fig. XLI. Die Curve besteht aus einem einzigen Theile mit zwei unendlichen Zweigen.

B. Die osculirende parabolische Asymptote wird von der geradlinigen nicht geschnitten. Die beiden Mittelpuncte, welche immer reell sind und bei keiner Lage der Linie S zusammenfallen können, liegen zwischen den beiden Asymptoten. Die sechs hierbei zu unterscheidenden Fälle liefern nur drei verschiedene Arten.

Die 180. Art. Fig. XLII, 1. Die Curve besteht aus zwei Theilen, von welchen einer der parabolischen Asymptote und der andere der geradlinigen Asymptote sich nähert; jener hat keinen, dieser drei Wendungspuncte.

Die 181. Art. Fig. XLII, 2. Die beiden Theile der Curve sind einander immer näher gerückt, und bilden nun in O einen Doppelpunct.

Die 182. Art. Fig. XLII, 3. Die Curve besteht aus einem Theile mit zwei unendlichen Zweigen.

C. Die osculirende parabolische Asymptote wird von der geradlinigen berührt. Einer der beiden Mittelpuncte fällt alsdann in den Berührungspunct.

α. Erste Gruppe. Die Linie S geht nicht durch den Berührungspunct. Der zweite Mittelpunct liegt alsdann auf entgegengesetzter Seite der Linie S, ihr dreimal so nah als ener Berührungspunct. Es gibt hier vier verschiedene Arten.

Die 183. Art. Fig. XLIII, 1. Die Curve besteht aus zwei unendlichen Theilen, von welchen einer an der parabolischen Asymptote und der andere an der geradlinigen sich hinzieht.

Die 184. Art. Fig. XLIII, 2. Die Curve hat einen Doppelpunct in O.

Die 185. Art. Fig. XLIII, 3. Die Curve besteht blofs aus einem Theile, der in zwei unendliche Zweige zerfällt.

Die 186. Art. Fig. XLIII, 4. Die Curve ist auf die entgegengesetzten Seiten der Asymptoten hinübergetreten.

β. Zweite Gruppe. Die Linie S geht durch den Berührungspunct der beiden Asymptoten; in diesen Punct fallen alsdann die beiden Mittelpuncte zusammen. Diese Gruppe hat nur eine einzige Art.

Die 187. Art. Fig. XLIV. Die Curve besteht aus einem Theile und dieser aus zwei unendlichen Zweigen.

II, 8. Die Curve hat eine osculirende geradlinige Asymptote und unter ihren parabolischen eine nach höchster Ordnung osculirende. In Beziehung auf diese liegt die Linie S unendlich weit. Die Curve hat nur einen einzigen Mittelpunct, und dieser liegt auf demjenigen Durchmesser der parabolischen Asymptoten, dessen zugeordnete Chorden der geradlinigen Asymptote parallel sind, und zwar in der Mitte der beiden Durchschnittspuncte dieses Durchmessers mit der geradlinigen und der osculirenden parabolischen Asymptote. Die Curve nähert sich jeder ihrer beiden Asymptoten beide Male auf derselben Seite.

A. Es wird die parabolische Asymptote von der geradlinigen in reellen Puncten geschnitten. *Einzige Gruppe* mit vier verschiedenen Arten.

Die 188. Art. Fig. XLV, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Theile mit den beiden Asymptoten und einem Ovale um O.

Die 189. Art. Fig. XLV, 2. An die Stelle des Ovals ist ein zugeordneter isolirter Punct O getreten.

Die 190. Art. Fig. XLV, 3. Auch der conjugirte Punct ist verschwunden.

Die 191. Art. Fig. XLV, 4. Die Curve besteht aus einem parabolischen Theile, der innerhalb der osculirenden Asymptote liegt, und einem zweiten unendlichen Theile mit der geradlinigen Asymptote.

B. Die osculirende parabolische Asymptote hat mit der geradlinigen keinen Punct gemein. *Einzige Gruppe* mit vier verschiedenen Arten.

Die 192. Art. Fig. XLVI, 1. Die Curve besteht aus zwei Theilen, die beide zwischen ihren Asymptoten liegen; einer derselben, mit zwei Wendungspuncten, zieht sich an der geradlinigen Asymptote hin, der andere an der äufsern Seite der parabolischen.

Die 193. Art. Fig. XLVI, 2. Die beiden Zweige sind einander immer näher gerückt, und schneiden sich nun im Doppelpuncte O. Die beiden Wendungspuncte sind verschwunden.

Die 194. Art. Fig. XLVI, 3. Die Curve besteht, wie die vorige, nur aus einem einzigen Theile; dieser zerfällt aber in zwei unendliche Zweige, von welchen jeder einen Wendungspunct hat.

Die 195. Art. Fig. XLVI, 4. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit zwei Wendungspuncten, der sich an der geradlinigen Asymptote hinzieht und einem parabolischen Zweige, der seiner Asymptote auf der innern Seite sich nähert.

C. Die osculirende parabolische Asymptote wird von der geradlinigen berührt. *Einzige Gruppe* mit zwei verschiedenen Arten.

Die 196. Art. Fig. XLVII, 1. Die Curve besteht blofs aus einem Theile, der zwischen den beiden Asymptoten liegt und in zwei Zweige sich trennt, deren jeder einen Wendungspunct hat.

Die 197. Art. Fig. XLVII, 2. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit der geradlinigen Asymptote, und einem parabolischen, der seiner Asymptote auf der innern Seite sich nähert.

III. Dritter Fall. Curven mit zwei parallelen geradlinigen Asymptoten.

III, 9. Die dritte Asymptote hat mit der Curve einen gewöhnlichen Contact, und schneidet dieselbe. Die Linie S ist den beiden parallelen Asymptoten parallel. Wir erhalten hier zwei Gruppen, von welchen jede nur aus einer Art besteht.

Taf. VI. *α. Erste Gruppe.* Die Linie S geht zwischen den beiden parallelen Asymptoten hindurch.

Die 198. Art. Fig. XLVIII. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige mit einem Wendungspuncte, welcher innerhalb der beiden parallelen Asymptoten liegt, und diesen beiden Asymptoten nach entgegengesetzter Richtung sich nähert, und aufserdem aus zwei Zweigen ohne Wendungspuncte, die unter sich und dem erstgenannten Zweige in unendlicher Entfernung verbunden sind.

β. Zweite Gruppe. Die Linie S geht nicht zwischen den beiden parallen Asymptoten hindurch.

Die 199. Art. Fig. XLIX. Die Curve besteht wiederum aus drei unendlichen Zweigen, welche in unendlicher Entfernung mit einander verbunden sind. Derjenige Zweig, welcher innerhalb der beiden parallelen Asymptoten liegt, nähert sich beiden nach derselben Richtung und hat keinen Wendungspunct.

III, 10. Die dritte Asymptote ist eine osculirende. Die Linie S liegt unendlich weit. *Einzige Gruppe* mit einer Art.

Die 200. Art. Fig. L. Die Curve besteht aus drei unendlichen Zweigen, von denen keiner einen Wendungspunct hat. Ein Zweig liegt innerhalb der beiden parallelen Asymptoten, und nähert sich denselben nach derselben Richtung; die beiden andern Zweige nähern sich diesen Asymptoten nach entgegengesetzter Richtung auf der äufsern Seite und der Asymptote P beide Male auf derselben Seite.

III, 11. Es sind die beiden parallelen Asymptoten imaginär, die dritte Asymptote ist eine gewöhnliche. Die Linie S ist den beiden imaginären Asymptoten parallel. *Einzige Gruppe* mit einer Art.

Die 201. Art. Fig. LI. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, der seine Asymptote schneidet und drei Wendungspuncte hat.

III, 12. Die beiden parallelen Asymptoten sind imaginär. Die dritte Asymptote ist eine osculirende. Die Linie S liegt unendlich weit. *Einzige Gruppe* mit einer Art.

Die 202. Art. Fig. LII. Die Curve besteht aus einem einzigen Zweige mit zwei Wendungspuncten, und liegt auf derselben Seite ihrer reellen Asymptote.

III, 13. Es fallen die beiden parallelen Asymptoten in ein einzige gerade Linie zusammen. Die dritte Asymptote ist eine gewöhnliche. Die Linie S ist den beiden zusammenfallenden Asymptoten parallel. *Einzige Gruppe* mit einer Art.

Die 203. Art. Fig. LIII. Die Curve besteht aus zwei unendlichen Zweigen, welche den zusammenfallenden Asymptoten sich auf entgegengesetzter Seite nach derselben Richtung hin nähern, so dafs sie, in unendlicher Entfernung, gleichsam einen Rückkehrpunct

bilden. Der eine dieser beiden Zweige nähert sich der dritten Asymptote, ohne sie zu schneiden, der andere, nachdem er sie zuvor geschnitten; dieser hat einen Wendungspunct, jener nicht.

III, 14. Es fallen die beiden parallelen Asymptoten zusammen, die dritte Asymptote ist eine osculirende. Die Linie S liegt unendlich weit. *Einzige Gruppe* mit einer Art.

Die 204. Art. Fig. LIV. Die Curve besteht aus zwei unendlichen Zweigen, welche, wie bei der vorigen Art, in unendlicher Entfernung einen Rückkehrpunct bilden, aber nun die reelle Asymptote P nicht mehr schneiden, sondern ganz auf einer Seite derselben liegen.

IV. Vierter Fall. Curven mit semicubi-parabolischen Asymptoten.

IV, 15. Die 205. Art. Fig. LV. Die semicubische Parabel.

IV, 16. Die Curve hat unter ihren unendlich vielen semicubi-parabolischen Asymptoten eine einfach osculirende. In Beziehung auf diese hat die Linie S diejenige Richtung, nach welcher die Asymptoten nur in zwei Puncten geschnitten werden, weil der dritte Durchschnittspunct unendlich weit liegt. Jede Chorde, welche dieselbe Richtung hat, wird von der Tangente im Rückkehrpuncte der osculirenden, semicubi-parabolischen Asymptote halbirt. Von den drei Mittelpuncten der bezüglichen Curven fallen zwei in diesem Rückkehrpuncte zusammen, der dritte Mittelpunct, O, liegt auf jener Tangente im Rückkehrpuncte von der Linie S, auf entgegengesetzter Seite, um die Hälfte weiter, als dieser Rückkehrpunct, entfernt. Es treten uns hier drei verschiedene Gruppen entgegen.

α. Erste Gruppe. Die osculirende Asymptote wird von der Linie S in zwei reellen Puncten geschnitten. Es gibt hier vier verschiedene Arten.

Die 206. Art. Fig. LVI, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, welcher sich seiner osculirenden Asymptote beide Male auf der convexen Seite nähert und beutelförmig um den Rückkehrpunct derselben schlingt. Ein solcher Zweig hat nothwendig zwei Wendungspuncte, weil die Asymptote, je weiter sie sich erstreckt, immer mehr die Richtung der Linie S annimmt, und, im Durchschnitte desselben Zweiges mit der Tangente im Rückkehrpuncte der Asymptote, die Tangente desselben ebenfalls der Linie S parallel ist.

Die 207. Art. Fig. LVI, 2. Die Curve bildet eine Schleife um den Rückkehrpunct mit einem Doppelpuncte in O.

Die 208. Art. Fig. LVI, 3. Von dem unendlichen Zweige der Curve hat sich ein Oval, das sich um den Rückkehrpunct zieht, abgetrennt.

Die 209. Art. Fig. LVI, 4. Der unendliche Zweig ist immer weiter gerückt, das Oval immer gröfser geworden, und hat sich, durch die Linie S hindurchgehend, in einen unendlichen Zweig umgestaltet, welcher an der osculirenden Asymptote beide Male auf der concaven Seite sich hinzieht.

β. Zweite Gruppe. Die osculirende Asymptote wird von der Linie S nicht in reellen Puncten geschnitten. Auch diese Gruppe enthält vier verschiedene Arten.

Die 210. Art. Fig. LVII, 1. Die Curve besteht blofs aus einem unendlichen Zweige mit zwei Wendungspuncten, welcher der osculirenden Asymptote beide Male auf der convexen Seite sich nähert.

Die 211. Art. Fig. LVII. 2. Zu dem unendlichen Zweige ist ein conjugirter isolirter Punct in O hinzugetreten.

Die 212. Art. Fig. LVII, 3. Statt des blofsen Punctes zieht sich ein Oval um den Mittelpunct O.

Die 213. Art. Fig. LVII, 4. Die Curve besteht blofs aus einem unendlichen Zweige, welcher der osculirenden Asymptote beide Male auf der concaven Seite sich nähert.

γ. *Dritte Gruppe.* Die Linie S geht durch den Rückkehrpunct der osculirenden Asymptote. Diese Gruppe zählt zwei verschiedene Arten.

Die 214. Art. Fig. LVIII, 1. Die Curve besteht aus einem unendlichen Zweige, welcher der osculirenden Asymptote auf der convexen Seite sich nähert, und aus einem Ovale, das durch den Rückkehrpunct dieser Asymptote geht.

Die 215. Art. Fig. LVIII, 2. Die Curve besteht blofs aus einem unendlichen Zweige, welcher durch den Rückkehrpunct der osculirenden Asymptote geht und an deren concaven Seite sich hinzieht.

IV, 17. Die Curve hat unter ihren semicubi-parabolischen Asymptoten eine nach höchster Ordnung osculirende. Die Linie S und der dritte Mittelpunct liegen unendlich weit. Wir erhalten hier eine *einzige Gruppe* mit zwei verschiedenen Arten.

Die 216. Art. Fig. LIX, 1. Die Curve besteht blofs aus einem unendlichen Zweige mit zwei Wendungspuncten, auf der convexen Seite der osculirenden Asymptote.

Die 217. Art. Fig. LIX, 2. Der unendliche Zweig ist auf die concave Seite der osculirenden Asymptote hinübergetreten.

V. Fünfter Fall. Die Trident-Curve.

V, 18. Die 218. Art. Fig. LX. Die Trident-Curve besteht aus zwei unendlichen Zweigen, von welchen einer innerhalb und der andere aufserhalb der sie einfach osculirenden parabolischen Asymptote liegt. Die beiden Zweige ziehen sich auf entgegengesetzter Seite ihrer geradlinigen Asymptote hin. Der zuletzt bezeichnete Zweig hat nothwendig einen Wendungspunct *).

VI. Sechster Fall. Die cubische Parabel.

VI, 19. Die 219. Art. Fig. LXI. Die cubische Parabel.

* * *

277. Wir haben also in der vorigen Nummer im Ganzen 219 verschiedene Arten von Curven dritter Ordnung erhalten. Mehrere dieser Arten enthalten Curven, deren Lauf grofse

*) In der Gleichung der Trident-Curve:

$$p(p^2+\lambda q)+\mu = 0,$$

bedeutet p den Abstand des bezüglichen Punctes von der geradlinigen Asymptote, und der Ausdruck: $(p^2+\lambda q)$, den Abstand jenes Punctes von der osculirenden parabolischen Asymptote, genommen auf den Durchmessern dieser letztern, wobei überdiefs noch diese beiden Abstände, je nach der verschiedenen Bestimmung der Functionen p und q, mit verschiedenen constanten Coefficienten zu multipliciren sind. Das Product dieser beiden Abstände ist also für alle Puncte der Trident-Curve constant, wonach diese Curve, wenn ihre geradlinige, ihre osculirende parabolische Asymptote und irgend ein Punct derselben gegeben sind, leicht zu construiren ist.

Die Curve hat eine grofse Analogie mit der gewöhnlichen Hyperbel. Wir können uns alle Puncte der Ebene einer solchen Curve, parallel mit einer ihrer beiden Asymptoten, so fortgerückt denken, dafs die Puncte derselben Parallelen ihre gegenseitigen Abstände beibehalten. Wenn alsdann diese Umgestaltung dadurch näher bestimmt wird, dafs die zweite Asymptote der Hyperbel in eine Parabel übergeht, welche die erste Asymptote zu einem ihrer Durchmesser hat, so geht die Hyperbel selbst in die Trident-Curve über, welche jene Parabel zu ihrer osculirenden Asymptote hat, und jede der zweiten Asymptote der Hyperbel parallele gerade Linie verwandelt sich in eine ähnliche Parabel, die eine gewöhnliche parabolische Asymptote der Trident-Curve ist.

grofse Uebereinstimmung darbietet; und nach solchen Uebereinstimmungen können wir ohne Mühe die verschiedenen Arten in Familien zusammenstellen. Dann würden zum Beispiel die Arten: 127, 130, 136, 140, 142, 146, 153, 157, 158 und 202 eine einzige solche Familie bilden, in welcher jede Curve nur aus einem Zweige mit zwei Wendungspuncten besteht, der einer geradlinigen Asymptote beide Male auf derselben Seite sich nähert. Ich halte es für unnöthig, die verschiedenen Familien, die man auf diese Weise findet, hier aufzustellen.

Ich füge nur noch die letzte Bemerkung hinzu, dafs durch keine affine Umgestaltung irgend eine der in dem Vorstehenden aufgezählten Gruppen von Curven in eine andere übergehen, und auch keine Curve irgend einer Art in irgend eine Curve einer andern Art sich verwandeln kann. Die drei Asymptoten einer Curve dritter Ordnung bleiben nemlich auch noch die Asymptoten der neuen Curve, und hiernach können wir die affine Umgestaltung dadurch vollständig bestimmen, dafs wir dem ursprünglichen Asymptoten-Dreiecke irgend ein anderes als entsprechend ansehen. Die gröfste Ellipse in dem ursprünglichen Asymptoten-Dreiecke geht alsdann in die gröfste Ellipse, die dem neuen Dreiecke sich einschreiben läfst, über; und die Lage der drei Mittelpuncte der ursprünglichen Curve, in Beziehung auf das Asymptoten-Dreieck und die gröfste Ellipse, bleibt nach wie vor dieselbe. Die Gruppen ändern sich also nicht, und endlich ändern sich auch die Arten in jeder einzelnen Gruppe nicht, weil, wenn die ursprüngliche Curve einen Doppelpunct hat, sie ihn auch nach der Umgestaltung behält, und sonach die Uebergangs-Arten in jeder Gruppe dieselben bleiben.

§. 6.

Nähere Untersuchungen über Doppelpuncte und Wendungspuncte.

278. Die Theorie der singulären Puncte der Curven, die man, weil sie aus den Arbeiten der gröfsten Geometer hervorgegangen ist, als abgeschlossen und vollendet zu betrachten geneigt war, hat sich in Folge der neuesten Untersuchungen über algebraische Curven als ungenügend erwiesen, und es ist nicht zu verkennen, dafs in ihr verschiedenartige Begriffe zusammengeschmolzen worden sind. Mir scheint es, dafs man die Theorie dieser Puncte aus einem andern Gesichtspuncte entwickeln, und ihr Wesen nicht mehr wie bisher darin suchen mufs, dafs in der Taylorschen Entwicklung einer Coordinate als Function der andern, die Differential-Coefficienten Null, unendlich und unbestimmt werden können. Es ist vor Allem eine Fundamental-Unterscheidung festzustellen. Man kann sich eine gegebene Curve einerseits als von einem sich bewegenden Puncte beschrieben und andrerseits als von einer sich bewegenden geraden Linie umhüllt vorstellen. Das Princip der Reciprocität ist das Band, welches diese beiden Vorstellungsweisen mit einander verknüpft. Auf die erste Vorstellungsweise bezieht sich die analytische Darstellung der Curve durch eine Gleichung zwischen linearen Punct-Coordinaten, auf die zweite Vorstellungsweise die Darstellung der Curve durch eine Gleichung zwischen linearen Linien-Coordinaten.

So wie einerseits ferner in besondern Fällen zwei oder mehrere Zweige einer Curve durch einen und denselben Punct gehen können, so können andrerseits mehrere Zweige die-

selbe gerade Linie berühren. Neben Doppelpuncte und mehrfache Puncte stellen sich Doppeltangenten und mehrfache Tangenten. Zwei imaginäre Zweige können sich in einem reellen Puncte schneiden, welcher alsdann, wenn er blofs ein Doppelpunct ist, als conjugirter isolirter Punct sich darstellt: ebenso können zwei Zweige eine reelle gerade Linie berühren, und diese Doppeltangente stellt sich alsdann, im Allgemeinen, als eine conjugirte isolirte gerade Linie dar. Statt sich zu schneiden, können zwei Zweige einer Curve sich berühren, und bilden alsdann, wenn kein dritter Zweig der Curve durch den Berührungspunct geht, einen Rückkehrpunct: statt dafs eine gerade Linie von zwei Zweigen einer Curve in zwei verschiedenen Puncten berührt wird, können die beiden Berührungspuncte auch zusammenfallen; im Allgemeinen schneidet alsdann die Doppeltangente die Curve, indem sie dieselbe berührt, und es bilden die beiden zusammenfallenden Berührungspuncte einen Wendungspunct. Die Tangente in einem Rückkehrpuncte ist, im Allgemeinen, keinesweges als eine Doppeltangente im obigen Sinne anzusehen; eine gerade Linie, welche, indem sie sich bewegt, die Curve umhüllt, rückt continuirlich sich fortbewegend über den Rückkehrpunct hinaus, und nur der Berührungspunct auf dieser geraden Linie ändert im Rückkehrpuncte plötzlich die Richtung seiner Bewegung. Ebenso ist ein Wendungspunct, im Allgemeinen, keinesweges ein Doppelpunct; der die Curve beschreibende Punct bewegt sich continuirlich durch den Wendungspunct hindurch, und nur die Tangente der Curve in dem beschreibenden Puncte ändert, bei diesem Durchgange, plötzlich ihre Bewegung. Bei dreifachen und mehrfachen Puncten und bei dreifachen und mehrfachen Tangenten kommen neue Beziehungen in Betracht. Es kann die Tangente in einem mehrfachen Puncte zugleich auch eine mehrfache Tangente sein. Nach diesen Betrachtungsweisen ergeben sich alle Singularitäten im Laufe der Curven.

Was die analytische Darstellungsweise der Theorie der singulären Puncte betrifft, so scheint es mir unumgänglich nothwendig, statt der gewöhnlichen Differential-Coefficienten, welche Grenzwerthe von Verhältnissen gleichzeitiger Aenderungen zweier Coordinaten bedeuten, partielle Differential-Coefficienten, welche sich als Functionen der beiden Coordinaten darstellen, einzuführen.

Wir wollen in den folgenden Nummern dieses Paragraphen, weil wir uns hier zuvörderst nur mit den Curven dritter Ordnung beschäftigen, blofs in Untersuchungen über Doppelpuncte und Wendungspuncte eingehen, in der Art, dafs wir, um den Gesichtspunct nicht zu beschränken, zuerst die Theorie dieser Puncte in ihrer ganzen Allgemeinheit ausführlich entwickeln, und dann zur Discussion der Eigenschaften der fraglichen Puncte, in so fern sie bei Curven dritter Ordnung vorkommen, uns wenden.

279. Es sei:
$$F(\eta, \xi) \equiv U = 0, \tag{1}$$
die Gleichung irgend einer Curve, und
$$\eta = x\xi + \gamma, \tag{2}$$
die Gleichung einer geraden Linie. η und ξ bedeuten beliebige lineare Punct-Coordinaten, und können als beliebige lineare Functionen gewöhnlicher Parallel-Coordinaten, welche, wenn sie gebrochene sind, indefs dieselben Nenner haben müssen, betrachtet werden. x und γ sind zwei Constante. Zur Bestimmung der Durchschnittspuncte der geraden Linie und der Curve, erhalten wir, wenn wir etwa η zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen eliminiren, die folgende Gleichung:
$$F((x\xi + \gamma), \xi) \equiv \Xi = 0. \tag{3}$$
Indem wir Bestimmungen über die Wurzeln dieser Gleichung machen, machen wir Voraussetzungen über die Natur der Curve (1) oder über ihre Beziehung zur geraden Linie

(2). Wenn die Curve eine gegebene ist, und wir $\varkappa$ und γ als unbestimmte Constante, das heifst die gerade Linie (2) als irgend eine beliebige betrachten, so können wir, im Allgemeinen, zwei Annahmen über die Wurzeln der letzten Gleichung machen, und dadurch alsdann jene beiden Constanten als bestimmt ansehen. Sollen zwei Wurzeln der Gleichung (3) einander gleich sein, und also zwei Durchschnitte der geraden Linie (2) und der Curve (1) zusammenfallen, so mufs bekanntlich, mit dieser Gleichung zugleich, die folgende bestehen:

$$\frac{d\Xi}{d\xi} = 0. \tag{4}$$

Wenn die Gleichung (3) drei gleiche Wurzeln haben und demnach drei Durchschnittspuncte der geraden Linie und der Curve zusammenfallen sollen, so mufs, zugleich mit den beiden Gleichungen (3) und (4), auch noch die folgende bestehen:

$$\frac{d^2\Xi}{d\xi^2} = 0. \tag{5}$$

Vorläufig sehen wir hieraus, dafs, wenn eine algebraische Curve von einer höheren Ordnung als der zweiten gegeben ist, es, im Allgemeinen, solche gerade Linien gibt, welche die Curve so schneiden, dafs drei Durchschnittspuncte in einen einzigen Punct zusammenfallen.

Wir können der Gleichung (4) die folgende Form geben:

$$\frac{dU}{d\eta} \cdot \varkappa + \frac{dU}{d\xi} = 0, \tag{6}$$

und der Gleichung (5) die folgende:

$$\frac{d^2U}{d\eta^2} \cdot \varkappa^2 + 2\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\varkappa + \frac{d^2U}{d\xi^2} = 0. \tag{7}$$

280. Wenn die Gleichung (1) eine algebraische ist und bis zu irgend einem n. Grade ansteigt, so ist die Gleichung (6) eine algebraische vom (n — 1). Grade in Beziehung auf η und ξ. Die letztgenannte Gleichung stellt also, wenn wir $\varkappa$ als gegeben betrachten, eine Curve der (n — 1). Ordnung dar, und diese Curve schneidet die gegebene, im Allgemeinen, in n(n — 1)Puncten. Bestimmt man hiernach die Constante γ so, dafs die gerade Linie (2) durch einen dieser Durchschnittspuncte geht, so fallen von den n Durchschnittspuncten der hiernach vollkommen bestimmten geraden Linie und der Curve zwei in dem obigen Durchschnittspuncte zusammen. Aber $\varkappa$ als gegeben betrachten, heifst, in dem Falle dafs η und ξ gebrochene lineare Functionen bedeuten, dafs die gerade Linie (2) durch einen festen Punct geht, und in dem Falle, dafs η und ξ ganze lineare Functionen bedeuten, dafs die gerade Linie (2) eine gegebene Richtung hat. Wir erhalten hiernach die nachstehenden Resultate.

Es lassen sich, einerseits, durch einen gegebenen festen Punct, und andrerseits parallel mit einer gegebenen geraden Linie, an eine Curve der n. Ordnung, im Allgemeinen n(n — 1) Tangenten legen.

Wenn der feste Punct insbesondere auf dem Umfange der Curve liegt, so ist die Tangente der Curve in diesem Puncte für zwei zu rechnen. Betrachten wir den Fall, dafs dieser Punct auf einer Asymptote der Curve unendlich weit liegt, so ist ersichtlich, dafs die Anzahl derjenigen Tangenten, welche einer Asymptote der Curve parallel sind, diese Tangente selbst nicht mitgerechnet, um zwei Einheiten sich reducirt.

Es fallen in die Tangente in einem Wendungspuncte der Curve, die wir als eine osculirende bezeichnen können, zwei Tangenten zusammen: sie ist also doppelt zu zählen, wenn die gegebene Richtung ihr parallel ist; sie ist dreimal zu zählen, wenn der Wen-

gestaltung aus einer andern Curve entstanden denken (wir können eine solche Umgestaltung als von der Variation einer Constanten abhängig betrachten), rechtfertigt sich die Bezeichnung jeder durch den Doppelpunct gehenden geraden Linie als eine Tangente der Curve. Zur Bestimmung von x hat man im Allgemeinen (6):

$$x = -\frac{\frac{dU}{d\xi}}{\frac{dU}{d\eta}},$$

und dieser Ausdruck stellt sich, auf den Doppelpunct bezogen, unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ dar; für die Tangente der Curve, im obigen Sinne des Wortes, bleibt also in diesem Falle x vollkommen unbestimmt. Nennen wir aber, indem wir uns die Curve durch die stetige Bewegung eines Punctes beschrieben denken, Tangente nur eine solche gerade Linie, welche durch zwei auf einander folgende Lagen des beschreibenden Punctes geht, und dadurch eine vollkommen bestimmte Lage erhält, oder nennen wir, was dasselbe heifst, indem wir uns die Curve durch eine sich stetig bewegende gerade Linie umhüllt denken, die umhüllende gerade Linie in verschiedenen Lagen eine Tangente der Curve — so stellt sich x als eigentlicher Differential-Quotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ dar, und dann müssen wir nach dem wahren Werthe des blofs unter unbestimmter Form sich darstellenden Ausdruckes für diese Constante fragen. Für den wahren Werth findet man, nach dem bekannten Verfahren:

$$x = -\frac{d\cdot\frac{dU}{d\xi}}{d\cdot\frac{dU}{d\eta}} = -\frac{\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\cdot x + \frac{d^2U}{d\xi^2}}{\frac{d^2U}{d\eta^2}\cdot x + \frac{d^2U}{d\eta d\xi}}.$$

und, wenn wir entwickeln, ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{d^2U}{d\eta^2}\cdot x^2 + 2\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\cdot x + \frac{d^2U}{d\xi^2} = 0. \qquad (16)$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf x vom zweiten Grade ist, erhalten wir, im Allgemeinen, zwei verschiedene Werthe für diese Constante, und diesen entsprechend aus (2) zwei verschiedene Werthe für γ. Die Curve hat also in ihrem Doppelpuncte, im Allgemeinen, zwei verschiedene Tangenten, wenn wir dieses Ausdruckes uns in dem engern Sinne bedienen.

Da die letzte Gleichung (16) mit der Gleichung (7) identisch dieselbe ist, so sehen wir, in dem Doppelpuncte drei Durchschnittspuncte jeder der beiden Tangenten und der Curve zusammenfallen. Hierbei ist indefs der dritte Punct, was die Beziehung jeder der beiden Tangenten zur Curve betrifft, als ein fremder Punct zu betrachten.

Die beiden Wurzeln der Gleichung (16) sind reell oder imaginär, je nachdem der Ausdruck:

$$\left(\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\right)^2 - \frac{d^2U}{d\eta^2}\cdot\frac{d^2U}{d\xi^2}, \qquad (17)$$

positiv oder negativ ist; sie fallen zusammen, wenn dieser Ausdruck verschwindet. Dem entsprechend sind die beiden Tangenten im fraglichen Doppelpuncte reell oder imaginär, oder sie fallen zusammen. Hiernach erhalten wir eine dreifache Unterscheidung der Doppelpuncte: Puncte, in welchen zwei reelle Zweige der Curve sich schneiden, conjugirte isolirte Puncte, Rückkehrpuncte.

Wenn eine gegebene Curve einen Doppelpunct hat, und wir die, durch diesen Punct gehenden, geraden Linien nicht als Tangenten rechnen, so reducirt sich die Anzahl derjenigen Tangenten der Curve, welche einer gegebenen geraden Linie parallel sind, oder durch einen gegebenen Punct gehen, im Allgemeinen um zwei Einheiten. Diefs folgt sogleich, weil diejenige Curve, deren Durchschnitte mit der gegebenen die Berührungspuncte auf den fraglichen Tangenten sind, und welche, bei gehöriger Annahme von $\varkappa$, durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$\varkappa \cdot \frac{dU}{d\eta} + \frac{dU}{d\xi} = 0,$$

durch den, vermittelst der Gleichungen (15), bestimmten Doppelpunct geht, wonach zwei ihrer frühern $n(n-1)$ Durchschnitte der gegebenen Curve in diesem Doppelpuncte zusammenfallen.

Wenn der Doppelpunct insbesondere ein Rückkehrpunct ist, so reducirt sich die Anzahl der fraglichen Tangenten, die entweder einer gegebenen geraden Linie parallel sind, oder durch einen gegebenen Punct gehen, um drei Einheiten, weil die durch die letzte Gleichung dargestellte Curve alsdann die gegebene Curve auf der Tangente im Rückkehrpuncte dieser letztern berührt, wonach in diesem Puncte auf der Tangente drei der $n(n-1)$ Durchschnittspuncte zusammenfallen. Es hat nemlich die durch die letzte Gleichung dargestellte Curve mit der gegebenen in einem gegebenen Puncte nothwendig jedesmal dann eine gemeinschaftliche Tangente, wenn die beiden Curven (15) sich in dem gegebenen Puncte berühren, und um nachzuweisen, dafs diefs Statt hat, brauchen wir blofs die Gleichungen (15) zu differentiiren, wonach sich ergibt:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\frac{d^2U}{d\eta d\xi}}{\frac{d^2U}{d\eta^2}}, \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\frac{d^2U}{d\xi^2}}{\frac{d^2U}{d\eta d\xi}}.$$

Die beiden Werthe für $\frac{d\eta}{d\xi}$, werden, wenn der Ausdruck (17) verschwindet, was einen Rückkehrpunct anzeigt, auf welchen die Differential-Quotienten zu beziehen sind, unter einander und mit den gleichen Wurzeln der Gleichung (16) gleich, woraus denn folgt, dafs die Tangenten der beiden Curven (15) mit der Tangente im Rückkehrpuncte der gegebenen Curve zusammenfallen.

Die fragliche Reduction der Anzahl der Tangenten, die sich parallel mit einer gegebenen geraden Linie oder durch einen gegebenen Punct an eine gegebene Curve legen lassen, tritt auch aus der geometrischen Anschauung hervor. Was namentlich den Fall eines Rückkehrpunctes betrifft, so können wir denselben immer dadurch entstehend uns vorstellen, dafs ein abgesondertes Oval, indem es auf einen Punct sich reducirt, mit einem andern Zweige sich vereinigt, wodurch die beiden Tangenten des Ovales zugleich mit einer Tangente des Zweiges wegfallen.

283. Für Rückkehrpuncte, denen wir zuvörderst unsere Aufmerksamkeit schenken wollen, besteht also neben den Gleichungen (15) auch noch die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\right)^2 - \frac{d^2U}{d\eta^2} \cdot \frac{d^2U}{d\xi^2} = 0, \qquad (18)$$

welche, wenn wir entwickeln und η und ξ als veränderlich betrachten, in dem Falle, dafs die ursprüngliche Gleichung vom n. Grade ist, im Allgemeinen, eine Curve der $2(n-2)$. Ordnung darstellt. Wenn die gegebene Curve also einen Rückkehrpunct hat, so gehen durch

diesen Punct nicht nur die beiden Curven (15), sondern auch die neue, eben bestimmte Curve.

Die letzte Gleichung ist von denjenigen drei Gliedern der Gleichung der gegebenen Curve (1), in welchem η und ξ gar nicht und nur in der ersten Potenz vorkommen, unabhängig. Wenn wir die drei Coefficienten, welche diesen drei Gliedern angehören, als unbestimmte ansehen, so können wir dieselben auf lineare Weise, im Allgemeinen, so bestimmen, dafs die bezügliche Curve durch einen gegebenen Punct geht, und diesen Punct zum Doppelpuncte hat. Soll der gegebene Punct insbesondere ein Rückkehrpunct der Curve werden können, so erhalten wir für denselben einen geometrischen Ort, und dieser wird durch die Gleichung (18) dargestellt.

Wir wollen als Beispiel die Curven dritter Ordnung nehmen, und demnach

$$U \equiv pqr + \mu s$$

setzen. Betrachten wir alsdann die Function s und die Constante μ als beliebig zu bestimmen, so bleiben die bezüglichen Curven blofs der Bedingung unterworfen, dafs sie drei gegebene gerade Linien, P, Q und R, zu ihren Asymptoten haben. Indem wir, wie früher,

$$p + q + r \equiv \beta$$

setzen und hiernach r als Function von p und q betrachten, finden wir sogleich

$$\frac{d^2U}{dp^2} = -2q, \qquad \frac{d^2U}{dq^2} = -2p,$$

$$\frac{d^2U}{dpdq} = \beta - 2q - 2p = r - (p+q),$$

wonach die Gleichung (18), indem wir p und q für η und ξ nehmen, in die folgende übergeht:

$$(r-(p+q))^2 - 4pq = 0,$$

und diese können wir ohne Mühe auch auf die nachstehende Form bringen:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \tfrac{1}{2}\beta^2. \qquad (19)$$

Wir sind auf diesem neuen Wege zu demselben Resultate als in der 240. Nummer gelangt, dafs nemlich der geometrische Ort für die möglichen Rückkehrpuncte solcher Curven dritter Ordnung, welche drei gegebene gerade Linien zu ihren gemeinschaftlichen Asymptoten haben, diejenige Ellipse ist, welche die drei Seiten des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks in ihren Mitten berührt.

Wenn p, q und r, statt ganzer linearen Functionen, die gebrochenen: $\frac{p'}{n}$, $\frac{q'}{n}$ und $\frac{r'}{n}$ bedeuten, so stellen die drei Gleichungen:

$$p' = 0, \qquad q' = 0, \qquad r' = 0,$$

solche drei gerade Linien dar, welche die bezügliche Curve dritter Ordnung in denjenigen drei Puncten, in welchen derselbe von der geraden Linie:

$$n = 0,$$

geschnitten wird, berühren. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung, stellt alsdann die Gleichung (19), die wir nun auch auf folgende Weise schreiben können:

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = \tfrac{1}{2}\beta n^2,$$

eine solche Ellipse dar, welche die drei Seiten des von den drei Tangenten gebildeten Dreiecks so berührt, dafs, wenn man die Berührungspuncte auf diesen Seiten mit den gegenüberliegenden Winkelpuncten durch drei gerade Linien verbindet, diese drei geraden Linien in dem Pole der geraden Linie: $n = 0$, in Beziehung auf das Tangenten-Dreieck, sich schneiden (14. Nummer). Der geometrische Ort für die möglichen Rückkehrpuncte solcher Curven dritter Ordnung, welche drei gegebene gerade Linien in den Durchschnittspun-

puncten derselben mit einer vierten gegebenen geraden Linie berühren, ist also ebenfalls eine leicht zu bestimmende, dem, von den drei erstgenannten geraden Linien gebildeten, Dreiecke eingeschriebene Ellipse *).

284. Durch Hülfe der Gleichung (7) können wir leicht denjenigen Winkel bestimmen, welcher von den beiden Tangenten in einem gegebenen Doppelpuncte einer gegebenen Curve eingeschlossen wird. Wir wollen zu diesem Ende wiederum für η und ξ die beiden ganzen und linearen Functionen p und q einführen, und diesen Functionen überdiefs die Bedeutung kürzester Abstände von den beiden als gegeben zu betrachtenden geraden Linien: $p = 0$ und $q = 0$, beilegen. Wir wollen ferner den von diesen gegebenen geraden Linien gebildeten Winkel ϑ und den zu bestimmenden Winkel, welche die beiden Tangenten in dem fraglichen Doppelpuncte mit einander bilden, ω nennen, und endlich die beiden Wurzeln der Gleichung (7) durch $\varkappa'$ und $\varkappa''$ bezeichnen. Alsdann ist bekanntermafsen:

$$tang\,\omega = \frac{\pm(\varkappa''-\varkappa')\sin\vartheta}{1\pm(\varkappa''+\varkappa')\cos\vartheta+\varkappa'\varkappa''}.$$

Das doppelte Zeichen des Zählers des vorstehenden Ausdruckes für $tang\,\omega$ wird dadurch bedingt, dafs wir den Winkel ω von seinem Nebenwinkel nicht unterscheiden können;

---

*) Wenn wir statt der beiden veränderlichen Gröfsen η und ξ zwei andere φ und ψ durch die beiden Gleichungen:

$$\eta = f(\varphi,\psi), \qquad \xi = f'(\varphi,\psi),$$

in denen f und f' beliebige Functionen anzeigen, einführen, so ergibt sich

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\varphi}+\frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\varphi},$$

$$\frac{dU}{d\psi} = \frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\psi}+\frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\psi},$$

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = \frac{d^2U}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right)^2+2\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\cdot\frac{d\eta}{d\varphi}\cdot\frac{d\xi}{d\varphi}+\frac{d^2U}{d\xi^2}\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2+\frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{d^2\eta}{d\varphi^2}+\frac{dU}{d\xi}\frac{d^2\xi}{d\varphi^2},$$

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \frac{d^2U}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta}{d\psi}\right)^2+2\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\cdot\frac{d\eta}{d\psi}\cdot\frac{d\xi}{d\psi}+\frac{d^2U}{d\xi^2}\left(\frac{d\xi}{d\psi}\right)^2+\frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{d^2\eta}{d\psi^2}+\frac{dU}{d\xi}\frac{d^2\xi}{d\psi^2},$$

$$\frac{d^2U}{d\varphi d\psi} = \frac{d^2U}{d\eta^2}\cdot\frac{d\eta}{d\varphi}\cdot\frac{d\eta}{d\psi}+\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\left(\frac{d\eta}{d\varphi}\cdot\frac{d\xi}{d\psi}+\frac{d\eta}{d\psi}\cdot\frac{d\xi}{d\varphi}\right)+\frac{d^2U}{d\xi^2}\cdot\frac{d\xi}{d\varphi}\cdot\frac{d\xi}{d\psi}+\frac{dU}{d\eta}\frac{d^2\eta}{d\varphi d\psi}+\frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d^2\xi}{d\varphi d\psi}.$$

Zuvörderst sehen wir, dafs, als Folge der Gleichungen (15), für einen Doppelpunct überhaupt, zugleich mit der Gleichung der Curve die Gleichungen:

$$\frac{dU}{d\varphi} = 0, \qquad \frac{dU}{d\psi} = 0,$$

befriedigt werden müssen, und dann erhalten wir für einen solchen Punct:

$$\left(\frac{d^2U}{d\varphi d\psi}\right)^2-\frac{d^2U}{d\varphi^2}\cdot\frac{d^2U}{d\psi^2} = \left(\frac{d\eta}{d\varphi}\cdot\frac{d\xi}{d\psi}-\frac{d\eta}{d\psi}\cdot\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2\left\{\left(\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\right)^2-\frac{d^2U}{d\eta^2}\cdot\frac{d^2U}{d\xi^2}\right\}.$$

Für einen Rückkehrpunct insbesondere ergibt sich also, statt der Gleichung (18), die folgende von gleicher Form:

$$\left(\frac{d^2U}{d\varphi d\psi}\right)^2-\frac{d^2U}{d\varphi^2}\cdot\frac{d^2U}{d\psi^2} = 0.$$

Wir ziehen hieraus den Schlufs, dafs die allgemeine analytische Bestimmung der Rückkehrpuncte dieselbe ist, gleichviel, welche Functionen-Annahme wir der Coordinaten-Bestimmung zu Grunde legen; dafs, wenn eine Curve in der Art unbestimmt bleibt, dafs sie einen Rückkehrpunct zuläfst, der auf einem bestimmten geometrischen Orte liegt, auch nach jeder beliebigen continuirlichen Umgestaltung, der neue fragliche geometrische Ort zu der neuen Curve dieselbe Beziehung behält. Ein specielles Beispiel hiervon enthält die obige Nummer des Textes.

Die Form der Gleichung (18) drängt uns zu Betrachtungen über Constructionen des Raumes, die ich, wenn sie nicht zu weit aufserhalb des Bereiches der vorliegenden Schrift sich befänden, gern berühren möchte.

das doppelte Zeichen im Nenner dadurch, dafs auch ϑ mit seinem Nebenwinkel vertauscht werden kann. Wir wollen hier die Voraussetzung machen, dafs wir diejenigen von den beiden gegebenen geraden Linien gebildeten Scheitelwinkel ϑ nennen, innerhalb welcher ein Punct angenommen werden mufs, wenn die beiden bezüglichen Functionen-Werthe p und q im Zeichen übereinstimmen sollen. Alsdann müssen wir im Nenner des vorstehenden Ausdrucks das obere Zeichen nehmen. Substituiren wir für $(x''+x')$, $x'x''$ und $(x''-x')$ die aus der Gleichung (7) sogleich sich ergebenden Werthe, so geht die Gleichung in die folgende über:

$$tang\,\omega = \frac{\pm 2\sqrt{\left(\frac{d^2U}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2U}{dp^2}\cdot\frac{d^2U}{dq^2}}\cdot sin\,\vartheta}{\frac{d^2U}{dp^2} - 2\frac{d^2U}{dpdq}\cdot cos\,\vartheta + \frac{d^2U}{dq^2}}. \qquad (20)$$

285. Um die vorstehende Gleichung für den Fall der Curven dritter Ordnung zu discutiren, wollen wir unserer Functionen-Bestimmung die identische Gleichung:

$$p\,sin(\pi) + q\,sin(\varkappa) + r\,sin(\varrho) \equiv k, \qquad (21)$$

zu Grunde legen, indem wir (10. Nummer) die in dem Asymptoten-Dreiecke den drei Asymptoten P, Q und R gegenüberliegenden Winkel (π), $(\varkappa)$ und (ϱ) nennen, und, während Δ den Inhalt des Asymptoten-Dreiecks bedeutet,

$$2\Delta\,sin(\pi)\,sin(\varkappa)\,sin(\varrho) = k^2$$

setzen. Alsdann bezeichnen nicht nur p und q, sondern auch r, kürzeste Abstände von den bezüglichen Asymptoten, und diese kürzesten Abstände sind, indem wir für k den positiven Werth nehmen für Puncte innerhalb des Asymptoten-Dreiecks alle drei positiv. Zugleich sehen wir, dafs nun der Winkel (ϱ) an die Stelle des oben durch ϑ bezeichneten Winkels tritt. Die identische Gleichung (21) gibt, wenn wir die partiellen Differential-Coefficienten zur Unterscheidung umklammern:

$$\left(\frac{dr}{dp}\right) = -\frac{sin(\pi)}{sin(\varrho)}, \qquad \left(\frac{dr}{dq}\right) = \frac{sin(\varkappa)}{sin(\varrho)}.$$

Wenn wir hiernach den Ausdruck:

$$U \equiv pqr + \mu s$$

zweimal nach einander differentiiren, so ergibt sich:

$$\frac{d^2U}{dp^2} = 2q\left(\frac{dr}{dp}\right) = -2q\cdot\frac{sin(\pi)}{sin(\varrho)},$$

$$\frac{d^2U}{dq^2} = 2p\left(\frac{dr}{dq}\right) = -2p\cdot\frac{sin(\varkappa)}{sin(\varrho)},$$

$$\frac{d^2U}{dpdq} = r + q\left(\frac{dr}{dq}\right) + p\left(\frac{dr}{dp}\right) = r - q\cdot\frac{sin(\varkappa)}{sin(\varrho)} - p\cdot\frac{sin(\pi)}{sin(\varrho)}.$$

286. Die Gleichung (20) stellt, wenn wir den Winkel ω als gegeben ansehen, und uns auf Curven dritter Ordnung beziehen, im Allgemeinen diejenige Curve dar, auf deren Umfange man einen Punct beliebig annehmen kann, wenn dieser Punct ein Doppelpunct der Curve dritter Ordnung sein, die beiden Zweige dieser Curve in diesem Doppelpuncte sich unter dem gegebenen Winkel ω schneiden sollen. Wir setzen hierbei voraus, dafs die drei Asymptoten der Curve dritter Ordnung gegeben sind. Zuerst wollen wir denjenigen Fall discutiren, dafs der gegebene Winkel ω ein rechter ist; für diesen Fall gibt die Gleichung (20):

$$\frac{d^2U}{dp^2} - 2\frac{d^2U}{dpdq}\cdot cos(\varrho) + \frac{d^2U}{dq^2} = 0, \qquad (22)$$

und wenn wir für die drei partiellen Differential-Coefficienten ihre in der vorigen Nummer entwickelten Werthe substituiren, und den allen Gliedern gemeinschaftlichen Coefficienten 2 fortlassen, finden wir:

$$p.\frac{\sin(x)-\sin(\pi)\sin(\varrho)}{\sin(\varrho)}+q.\frac{\sin(\pi)-\sin(x)\cos(\varrho)}{\sin(\varrho)}+r\cos(\varrho)=0.$$

Diese Gleichung reducirt sich, wenn wir berücksichtigen, dafs

$$\sin(x)=\sin((\pi)+(\varrho))=\sin(\pi)\cos(\varrho)+\sin(\varrho)\cos(\pi),$$
$$\sin(\pi)=\sin((x)+(\varrho))=\sin(x)\cos(\varrho)+\sin(\varrho)\cos(x),$$

unmittelbar auf die nachstehende:

$$p\cos(\pi)+q\cos(x)+r\cos(\varrho)=0. \qquad (23)$$

Nach der 16. Nummer erhalten wir sogleich die geometrische Bestimmung der durch diese Gleichung dargestellten geraden Linie, und demnach den folgenden Satz:

Wenn die drei Asymptoten der Curven dritter Ordnung gegeben sind, so ist der geometrische Ort für diejenigen Doppelpuncte solcher Curven, in welchen die beiden Tangenten auf einander senkrecht stehen, eine gerade Linie, und zwar die Polare des gemeinsamen Durchschnittes der von den Winkelpuncten des Asymptoten-Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten desselben gefällten Perpendikel, in Beziehung auf das Asymptoten-Dreieck.

Wenn insbesondere die drei Asymptoten ein gleichseitiges Dreieck bilden, so reducirt sich der erste Theil der letzten Gleichung auf eine Constante, nemlich auf $k\,cotg\,60^0$. Die bezügliche gerade Linie liegt also unendlich weit, und es gibt, im eigentlichen Sinne, keine Curve dritter Ordnung, welche die drei Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks zu ihren Asymptoten hat und deren zwei Zweige sich unter rechten Winkeln schneiden. Wenn das von den drei Asymptoten gebildete Dreieck ein rechtwinkliges ist, so geht die gerade Linie (23) durch den Scheitel des rechten Winkels. Denn, wenn etwa (ϱ') der rechte Winkel ist, so kommt: $p\cos(\pi)+q\cos(x)=0.$

Dieses Resultat war vorauszusehen, da auch das System der drei Asymptoten selbst durch die allgemeine Gleichung des dritten Grades dargestellt und dann jeder Durchschnitt zweier Asymptoten als ein Doppelpunct angesehen werden kann. Es folgt aus der geometrischen Beziehung der geraden Linie (23) zum Asymptoten-Dreiecke, dafs überhaupt diese gerade Linie die Seite dieses Dreiecks entweder schneidet, oder nicht schneidet, je nachdem das Dreieck entweder ein stumpfwinkliges oder ein spitzwinkliges ist. Die geschnittenen Seiten in dem ersten Falle sind diejenigen beiden, welche den stumpfen Winkel bilden.

287. Wenn wir $tang\,\omega=0$ setzen, so stellt die Gleichung (20) den geometrischen Ort der Rückkehrpuncte dar. Wir wollen diese Gleichung in unserer neuen Functionen-Bestimmung entwickeln.

Wenn wir die beiden Theile der eben angeführten Gleichung zum Quadrat erheben, und dann für die partiellen Differential-Coefficienten im Zähler des zweiten Theiles die Ausdrücke der 285. Nummer und zugleich (ϱ') statt ϑ einsetzen, so finden wir, wenn wir den allen Gliedern gemeinschaftlichen Coefficienten 4 vernachlässigen:

$$p^2\sin(\pi)+q^2\sin^2(x)+r^2\sin^2(\varrho)-2pq\sin(\pi)\sin(x)-2pr\sin(\pi)\sin(\varrho)-2qr\sin(x)\sin(\varrho),$$

und wenn wir hierzu den folgenden Ausdruck:

$$\{p\sin(\pi)+q\sin(x)+r\sin(\varrho)\}^2-k^2,$$

der identisch gleich Null ist, addiren, so ergibt sich:

$$2\{p^2\sin^2(\pi)+q^2\sin^2(x)+r^2\sin^2(\varrho)\}-k^2.$$

Die gesuchte Gleichung des geometrischen Ortes für die Rückkehrpuncte ist hiernach die folgende:

$$p^2 sin^2(\pi) + q^2 sin^2(x) + r^2 sin^2(\varrho) = \tfrac{1}{2}k^2. \qquad (24)$$

Wir können uns leicht auf directem Wege davon überzeugen, dafs diese Gleichung mit der Gleichung (19) der 283. Nummer übereinstimmt, und wie diese diejenige Ellipse darstellt, welche die Seiten des Asymptoten-Dreiecks in ihren Mitten berührt. Wenn wir nemlich in der vorstehenden Gleichung $p = 0$ setzen, so ergibt sich:

$$2q^2 sin^2(x) + 2r^2 sin^2(\varrho) - k^2 = 0;$$

die identische Gleichung (21.) gibt unter derselben Voraussetzung:

$$\{q\, sin(x) + r\, sin(\varrho)\}^2 - k^2 \equiv 0,$$

wonach wir, wenn wir abziehen, erhalten:

$$\{q\, sin(x) - r\, sin(\varrho)\}^2 = 0.$$

Die durch die Gleichung (24) dargestellte Curve zweiter Ordnung berührt also die Asymptote P, und zwar im Durchschnitte, mit der durch die Gleichung:

$$q\, sin(x) - r\, sin(\varrho) = 0,$$

dargestellten geraden Linie, in der wir sogleich diejenige erkennen, welche die Mitte der in dieser Asymptote liegenden Dreiecksseite mit dem Durchschnittspuncte der beiden andern Asymptoten Q und R verbindet.

288. Für irgend einen beliebig angenommenen Werth des Winkels ϑ erhalten wir, nach den beiden vorigen Nummern, nun unmittelbar die Gleichung:

$$tang^2\omega = \frac{2(p^2 sin^2(\pi) + q^2 sin^2(x) + r^2 sin^2(\varrho)) - k^2}{(p\, cos(\pi) + q\, cos(x) + r\, cos(\varrho))^2}, \qquad (25)$$

oder, indem wir, der Kürze halber,

$$p\, cos(\pi) + q\, cos(x) + r\, cos(\varrho) \equiv u$$

setzen, die nachstehende Gleichung:

$$\{p^2 sin^2(\pi) + q^2 sin^2(x) + r^2 sin^2(\varrho) - \tfrac{1}{2}k^2\} - \tfrac{1}{2}u^2 tang^2\omega = 0. \qquad (26)$$

Wir erkennen aus der Form dieser Gleichung sogleich eine solche Curve zweiter Ordnung, welche, mit der durch die Gleichung (24) dargestellten Curve der Rückkehrpuncte, auf der geraden Linie (23) oder

$$u = 0 \qquad (27)$$

einen doppelten Contact hat. Dieser doppelte Contact ist indefs nothwendig ein imaginärer, weil jene Curve zweiter Ordnung, als geometrischer Ort für die Rückkehrpuncte, mit der zuletzt erwähnten geraden Linie, als geometrischer Ort für diejenigen Doppelpuncte, in welchen zwei Zweige der Curven dritter Ordnung sich rechtwinklig schneiden, keinen reellen Punct gemein haben kann.

Denken wir uns also eine Reihe solcher Curven zweiter Ordnung beschrieben, welche alle, mit der dem Asymptoten-Dreiecke eingeschriebenen Curve der Rückkehrpuncte, auf der geraden Linie (27) einen imaginären doppelten Contact haben, so ist jede dieser Curven der geometrische Ort für solche Doppelpuncte, in welchen die beiden Tangenten der bezüglichen Curve dritter Ordnung sich unter denselben gegebenen Winkeln schneiden. In dem besondern Falle, dafs die drei Asymptoten ein gleichseitiges Dreieck bilden, und also die gerade Linie (27), auf welcher der doppelte Contact Statt findet, unendlich weit liegt (286), sind alle jene Curven zweiter Ordnung ähnlich, ähnlich liegend und concentrisch. Es sind Kreise, welche mit dem, dem Asymptoten-Dreiecke eingeschriebenen Kreise, dem Orte der Rückkehrpuncte, denselben Mittelpunct haben. In jedem andern Falle liegt die Linie (27) nicht unendlich weit, und dann theilen sich die fraglichen Curven zweiter Ordnung in Ellipsen und Hyperbeln ab, zwischen welchen eine Parabel den Uebergang bildet. Wenn, bei irgend einer Annahme des Winkels ω, die Gleichung (26) eine Hyperbel darstellt, so bestimmen die beiden Asymptoten dieser Hyperbel zwei solche Richtun-

gen, welche die Eigenschaft haben, dafs, wenn der Doppelpunct einer Curve dritter Ordnung, deren drei Asymptoten gegeben sind, nach dieser Richtung immer weiter fortrückt, die beiden Tangenten in diesem Doppelpuncte sich unter solchen Winkeln schneiden, die dem Winkel ω und dessen Nebenwinkel sich immer mehr annähern, so jedoch, dafs der Gränze der Annäherung im engern Verstande keine Curve dritter Ordnung mehr entspricht, weil diese, in so weit sie nicht unendlich weit liegt, in eine gerade Linie übergeht. Wenn die drei gegebenen Asymptoten ein gleichseitiges Dreieck bilden, so mufs ω nothwendig ein rechter Winkel sein, wenn ein bezüglicher Doppelpunct unendlich weit liegen soll; wenn wir alsdann aber, nach einer beliebigen Richtung, einen Doppelpunct annehmen, so schneiden sich in diesem Puncte die beiden Zweige der Curve unter Winkeln, die sich um so mehr einem rechten Winkel nähern, als der Doppelpunct weiter entfernt angenommen wird: es liegt alsdann, mit andern Worten, nach jeder beliebigen Richtung ein solcher Doppelpunct, in welchem zwei Zweige der Curve sich unter rechten Winkeln schneiden, unendlich weit. Im allgemeinen Falle existirt eine Gränze der Abweichung des Winkels ω von einem rechten Winkel, wenn es unendlich weit liegende, diesem Winkel entsprechende Doppelpuncte geben soll. Dieser Gränze entspricht, dafs die Gleichung (26) eine Parabel darstellt, und dann liegt der entsprechende Doppelpunct, nach der Richtung der Durchmesser dieser Parabel, unendlich weit. Um die Bedingung auszudrücken, dafs die Gleichung (26) eine Parabel darstelle, wollen wir, indem wir diese Gleichung der Kürze wegen auf folgende Weise schreiben:

$$L = 0,$$

die folgende Gleichung in partiellen Differential-Coefficienten, wobei wir r als Function von p und q betrachten, entwickeln:

$$\left(\frac{d^2L}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2L}{dp^2}\cdot\frac{d^2L}{dq^2} = 0.$$

Auf diesem Wege finden wir, nach allen trigonometrischen Reductionen, wenn wir zugleich den fraglichen Gränzwerth von ω durch ω_0 unterscheiden:

$$3\,cotg^2\omega_0 = cotg^2(\pi) + cotg^2(\varkappa) + cotg^2(\varrho) - 1. \qquad (28)$$

Diese Gleichung zeigt, in Uebereinstimmung mit dem Vorerwähnten, dafs ϑ_0 ein rechter Winkel ist, wenn das Asymptoten-Dreieck ein gleichseitiges ist, wonach

$$cotg^2(\pi) = cotg^2(\varkappa) = cotg^2(\varrho) = \tfrac{1}{3}.$$

Der Gränzwerth ω_0 weicht um so mehr von einem rechten Winkel ab, um je mehr das Asymptoten-Dreieck von einem gleichseitigen verschieden ist. Wenn nur einer der drei Winkel des Asymptoten-Dreiecks gegeben ist, so erhalten wir, nach dem bekannten Verfahren, für das Maximum von $cotg^2\omega_0$, das heifst für die gröfste Abweichung des Winkels ω_0 von einem rechten Winkel, sogleich die Bestimmung, dafs die übrigen beiden Winkel des Asymptoten-Dreiecks einander gleich sein müssen.

Jeder, irgend einem beliebigen Winkel ϑ entsprechende, durch die Gleichung (26) dargestellte Kegelschnitt liegt entweder ganz aufserhalb oder ganz innerhalb der Curve der Rückkehrpuncte, welche für den vorliegenden Fall dreier reellen Asymptoten eine Ellipse ist. Die aufserhalb liegenden Kegelschnitte beziehen sich auf solche Doppelpuncte, in welchen zwei reelle Zweige sich schneiden, und für welche der Winkel ω ein reeller Winkel ist. Die innerhalb der Curve der Rückkehrpuncte liegenden Kegelschnitte, welche offenbar, wie diese Curve selbst, sämmtlich Ellipsen sind, beziehen sich auf isolirte Puncte (244), für welche ϑ imaginär und $tang^2\vartheta$ negativ ist. Die Gleichung (25) zeigt, dafs für jeden reellen Werth von ω oder $tang\,\omega$ der bezügliche Kegelschnitt immer reell ist. Aber er gibt eine Gränze für negative Werthe von $tang^2\vartheta$. Bei dieser Gränze reducirt sich die

durch die Gleichung (26) dargestellte Ellipse auf einen Punct, welcher, als in die Reihe der auf der geraden Linie (27) sich doppelt berührenden Curven zweiter Ordnung gehörig, mit dem Pole dieser geraden Linie, in Beziehung auf die Curve der Rückkehrpuncte, oder auch in Beziehung auf irgend eine andere jener Curven zweiter Ordnung, die einem beliebigen Werthe von ω entspricht, zusammenfällt.

Um bei den folgenden Erörterungen den Gebrauch des Imaginären zu vermeiden, wollen wir durch die nachstehende Gleichung:

$$tang^2\omega = -sin^2\xi,$$

statt des imaginär werdenden Winkels ω einen reellen Winkel ξ einführen. Es kommt dieſs darauf hinaus, einen isolirten Punct als eine Ellipse, deren Asymptoten die beiden imaginären Tangenten der Curve dritter Ordnung in diesem Puncte sind, zu betrachten, oder vielmehr für den isolirten Punct das System dieser beiden imaginären Tangenten, das als eine verschwindende Ellipse angesehen werden kann, zu nehmen, und dann den von den beiden gleichen Durchmessern der Ellipse gebildeten Winkel ξ zu nennen. Auf diese Weise erhalten wir, den verschiedenen Werthen von ξ entsprechend, eine Unterscheidung der isolirten Puncte, welche der Unterscheidung der Doppelpuncte, in welchen zwei reelle Zweige sich schneiden, nach den verschiedenen Werthen der Durchschnittswinkel ω entspricht. Wenn wir hiernach in die Gleichung (26) den neuen Winkel ξ einführen, so kommt:

$$\{p^2 sin^2(\pi) + q^2 sin^2(\varkappa) + r^2 sin^2(\varrho) - \tfrac{1}{2}k^2\} + \tfrac{1}{2}u^2 sin^2\xi = 0. \qquad (29)$$

Um die oben erwähnte Gränze, wo, bei negativen Werthen von $tang^2\omega$, die Gleichung (26) aufhört eine reelle Curve darzustellen, oder mit andern Worten, um das Maximum von $sin^2\xi$ analytisch zu bestimmen, wollen wir, wozu uns die Gleichung (26), verbunden mit der identischen Gleichung (21), berechtigt, $sin^2\xi (= -tang^2\omega)$ als Function zweier von einander unabhängigen Gröfsen, etwa p und q, ansehen, in dieser Voraussetzung differentiiren und dann

$$\frac{d.sin^2\xi}{dp} = 0, \qquad \frac{d.sin^2\xi}{dq} = 0 \qquad (30)$$

setzen. Durch diese beiden Gleichungen, welche für das fragliche Maximum beide zugleich bestehen müssen, ist die Lage der bezüglichen Doppelpuncte vollkommen bestimmt. Wir erhalten also nicht mehr, wie früher, für einen beliebig angenommenen Werth von $tang^2\omega$ oder $sin^2\xi$ einen geometrischen Ort, sondern einen einzigen, wenn nicht etwa mehrere vollkommen bestimmte Puncte. Wir können alsdann jenen Gränzwerth von $sin^2\xi$ selbst leicht entwickeln, wenn wir in den allgemeinen Werth dieses Ausdruckes (25) die Coordinaten-Bestimmung, wie sie die letzten beiden Gleichungen (30) geliefert haben, einführen.

Statt die fraglichen Doppelpuncte durch die beiden Gleichungen (30) zu bestimmen, können wir auch, was analytisch genommen zu demselben Resultate führt, die Gleichung (29) nach einander in Beziehung auf p und q differentiiren und die beiden resultirenden Gleichungen mit der ursprünglichen Gleichung (29), zur Bestimmmung von $sin^2\xi$ und der auf jene Doppelpuncte sich beziehenden Werthe der beiden Functionen p und q, zusammenstellen. Jene Differentiation gibt, wenn wir berücksichtigen, dafs

$$\left(\frac{du}{dp}\right) = cos(\pi) - cotg(\varrho)\,sin(\pi), \qquad \frac{du}{dq} = cos(\varkappa) - cotg(\varrho)\,sin(\varkappa),$$

sogleich die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} p\,sin(\pi) - r\,sin(\varrho) + \tfrac{1}{2}u\,sin^2\xi\,(cotg(\pi) - cotg(\varrho)) &= 0, \\ q\,sin(\varkappa) - r\,sin(\varrho) + \tfrac{1}{2}u\,sin^2\xi\,(cotg(\varkappa) - cotg(\varrho)) &= 0. \end{aligned} \qquad (31)$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit $cotg(\pi)$, die zweite mit $cotg(\varkappa)$ und ad-

diren beide alsdann zu der identischen Gleichung:

$$r\cos(\varrho) - r\sin(\varrho)\cot g(\varrho) = 0,$$

so ergibt sich, wenn wir berücksichtigen, dafs

$$u \equiv p\cos(\pi) + q\cos(\varkappa) + r\cos(\varrho),$$

sogleich, um $r\sin(\varrho)$ durch u auszudrücken, die nachstehende Gleichung:

$$r\sin(\varrho)\{\cot g(\pi) + \cot g(\varkappa) + \cot g(\varrho)\} = \tfrac{1}{2}u\sin^2\xi\{\cot g^2(\pi) + \cot g^2(\varkappa) + \cot g(\pi)\cot g(\varrho) + \cot g(\varkappa)\cot g(\varrho)\} + u. \quad (32)$$

Wenn wir hiernach die Gleichung (29) unter der folgenden Form schreiben:

$$p^2\sin^2(\pi) + q^2\sin^2(\varkappa) + r^2\sin^2(\varrho) - 2pq\sin(\pi)\sin(\varkappa) - 2pr\sin(\pi)\sin(\varrho) - 2qr\sin(\varkappa)\sin(\varrho) + u^2\sin^2\xi = 0,$$

so können wir zuvörderst aus dieser Gleichung vermittelst der Gleichungen:

$$p\sin(\pi) = r\sin(\varrho) - \tfrac{1}{2}u\sin^2\xi\{\cot g(\pi) - \cot g(\varrho)\},$$

$$q\sin(\varkappa) = r\sin(\varrho) - \tfrac{1}{2}u\sin^2\xi\{\cot g(\varkappa) - \cot g(\varrho)\},$$

p und q eliminiren und in der resultirenden Gleichung:

$$-3r^2\sin^2(\varrho) + r\sin(\varrho)u\sin^2\xi(\cot g(\pi) + \cot g(\varkappa) - 2\cot g(\varrho)) + \tfrac{1}{4}u^2\sin^4\xi(\cot g(\pi) + \cot g(\varkappa) - 2\cot g(\varrho))^2 + u^2\sin^2\xi = 0,$$

für $r\sin(\varrho)$ den aus (32) sich ergebenden Werth einsetzen. Alsdann finden wir, wenn wir zugleich berücksichtigen, dafs

$$\cot g(\pi)\cot g(\varkappa) + \cot g(\pi)\cot g(\varrho) + \cot g(\varkappa)\cot g(\varrho) = 1,$$

nach allen Reductionen die folgende Gleichung:

$$\{1 - \cot g^2(\pi) - \cot g^2(\varkappa) - \cot g^2(\varrho)\}\sin^4\xi - \{4 - \cot g^2(\pi) - \cot g^2(\varkappa) - \cot g^2(\varrho)\}\sin^2\xi + 3 = 0. \quad (33)$$

Diese Gleichung ist, in Beziehung auf $\sin^2\xi$, vom zweiten Grade, und wird, was unmittelbar sich ergibt, befriedigt, wenn wir $\sin^2\xi$ gleich Eins nehmen; für die zweite Wurzel derselben ergibt sich hiernach unmittelbar:

$$\sin^2\xi = \frac{3}{1 - \cot g^2(\pi) - \cot g^2(\varkappa) - \cot g^2(\varrho)}; \quad (34)$$

diese Wurzel ist eine negative und also offenbar fremde Wurzel.

Wenn wir zu den Gleichungen (29) und (31) zurückgehen, um das Zusammenbestehen dieser drei Gleichungen geometrisch zu deuten, so sehen wir, dafs $\sin^2\xi$ eine solche Bestimmung erhält, nach welcher die durch die erstgenannte Gleichung dargestellte Curve einen Doppelpunct hat (282), und da diese Gleichung nur bis zum zweiten Grade ansteigt, artet die fragliche Curve nothwendig in ein System von zwei geraden Linien oder in einen isolirten Punct aus. Letzteres ist der hier einzig mögliche Fall, weil der doppelte Contact der, bei beliebiger Annahme von ξ, durch die Gleichung (29) dargestellten Curven zweiter Ordnung ein imaginärer ist, und nur diesem Falle entspricht, dafs $\sin^2\xi$ ein Maximum ist. Denn bekanntlich ist der durch die Gleichungen (30) (an deren Stelle wir die beiden Gleichungen (31) genommen haben) in Verbindung mit der Gleichung (29) bestimmte Werth von $\sin^2\xi$ nicht nothwendig ein Maximum oder Minimum. Der durch die Gleichung (34) angezeigte Werth ist es nicht. Die geometrische Bedeutung dieses Werthes ergibt sich sogleich, indem wir erwägen, dafs die drei Gleichungen (29) und (31) auch dann zugleich bestehen, wenn $\sin^2\xi$ eine solche Bestimmung erhält, dafs durch die Gleichung (29) eine Parabel dargestellt wird. Dann stellen nemlich die Gleichungen (31) zwei Durchmesser derselben dar, welche, nach bestimmter Richtung, in unendlicher Entfernung auf der fraglichen Parabel sich schneiden. Wir finden diese Bemerkung bestätigt, wenn wir in die Gleichung (34) $(-\tang^2\omega)$ für $\sin^2\xi$ schreiben, wonach dieselbe in die Gleichung (28) übergeht.

Da der Werth von $\sin^2\xi$ bis zur Einheit anwachsen kann, so kann der Winkel ξ jeder beliebige sein. Wenn wir den bezüglichen isolirten Punct, in dem oben festgestellten Sinne, als eine Ellipse betrachten, so kann mithin das Axen-Verhältnifs dieser Ellipse jedes beliebige sein. Wenn bei der eben bestimmten Gränze $\sin^2\xi = 1$ und demnach der Winkel ξ ein rechter ist, geht die Ellipse in einen Kreis über, und so wie ein Kreis unendlich viele imaginäre Asymptoten hat, so ist auch, wenn eine Curve einen solchen Doppelpunct hat, dem $\sin^2\xi = 1$ entspricht, jede durch denselben gehende imaginäre gerade Linie als eine Tangente der Curve in diesem Puncte anzusehen. Wenn aber ξ ein rechter Winkel ist, so erhalten wir nach dem Vorstehenden nicht, wie bei jeder andern Annahme der Winkel ξ oder ω, für den geometrischen Ort der Doppelpuncte einen Kegelschnitt, sondern, statt desselben einen einzigen vollkommen bestimmten Punct.

289. Wir wollen ferner noch, indem wir die drei Asymptoten einer Curve dritter Ordnung als gegeben betrachten, den geometrischen Ort für diejenigen Doppelpuncte, in welchen eine der beiden Tangenten der Curve einer gegebenen geraden Linie parallel ist, aufsuchen.

Wenn wir η und ξ in der Bedeutung ganzer und linearer Functionen p und q nehmen, so bestimmt überhaupt die Gleichung (7), die wir demgemäfs auf folgende Weise schreiben wollen:

$$\frac{d^2U}{dp^2}\varkappa^2 + 2\frac{d^2U}{dpdq}\varkappa + \frac{d^2U}{dq^2} = 0, \qquad (35)$$

die Richtungen der beiden Tangenten in einem Doppelpuncte der bezüglichen Curve, wenn wir auf diesen Punct die partiellen Differential-Coefficienten beziehen. Legen wir die Gleichung:

$$U \equiv pqr + \mu s = 0,$$

zu Grunde, und betrachten dann in der Gleichung (35) $\varkappa$ als von vorne herein angenommen, so stellt diese Gleichung, wenn wir die partiellen Differential-Coefficienten als Functionen von p, q und r entwickeln und diese Gröfsen als veränderlich ansehen, den gesuchten geometrischen Ort für solche Doppelpuncte dar, in welchen eine Tangente der geraden Linie:

$$p = \varkappa q, \qquad (36)$$

parallel ist. Wenn wir die Entwicklung der Gleichung (35) wirklich ausführen und hierbei die identische Gleichung:

$$p + q + r \equiv \beta,$$

zu Grunde legen, so ergibt sich:

$$\varkappa^2 q + \varkappa(2p + 2q - \beta) + p = 0.$$

In dieser Gleichung erkennen wir nach der 267. Nummer denjenigen Durchmesser der Curve dritter Ordnung, dessen zugeordnete Chorden der geraden Linien (36) parallel sind. Derselbe Durchmesser wird also auch durch die Gleichung (35) dargestellt. Differentiiren wir diese Gleichung in Beziehung auf $\varkappa$, so kommt:

$$\frac{d^2U}{dp^2}\varkappa + \frac{d^2U}{dpdq} = 0, \qquad (36)$$

und wenn wir zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (35) $\varkappa$ eliminiren, finden wir:

$$\left(\frac{d^2U}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2U}{dp^2}\cdot\frac{d^2U}{dq^2} = 0,$$

für die Gleichung derjenigen Curve, welche, bei beliebiger Annahme von $\varkappa$, von der geraden Linie (35) umhüllt wird, und keine andere ist, als die Curve der Rückkehrpuncte. Wir könnten nach den frühern Entwicklungen im Voraus wissen, dafs wir zu diesem Resultate gelangen würden.

Wenn

Wenn die drei Asymptoten einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, so ist der geometrische Ort für solche Doppelpuncte, in welchen eine Tangente der Curve einer gegebenen geraden Linie parallel ist, eine gerade Linie, welche die Curve der Rückkehrpuncte berührt.

Wir können hier mehrere Constructionen anknüpfen, und insbesondere zum Beispiel eine Curve dritter Ordnung construiren, deren drei Asymptoten gegeben sind, und die einen solchen Doppelpunct hat, in welchem die beiden Tangenten zweier gegebenen geraden Linien parallel sind. Wir brauchen zu diesem Ende blofs diejenigen beiden Durchmesser der Curve, durch die Vermittelung der drei gegebenen Asymptoten derselben, zu bestimmen, deren zugeordnete Chorden bezüglich den beiden gegebenen geraden Linien parallel sind. Der Doppelpunct der Curve liegt alsdann im Durchschnitte dieser beiden Durchmesser, und nachdem der Doppelpunct bestimmt worden ist, ergibt sich die Construction der Curve selbst sehr leicht.

Soll die Curve statt eines Doppelpunctes einen Rückkehrpunct haben, und ist die Richtung der Tangente in diesem Puncte gegeben, so müssen wir, wie vorhin, denjenigen Durchmesser suchen, dessen zugeordnete Chorden die gegebene Richtung haben. Der Rückkehrpunct fällt alsdann in denjenigen Punct, in welchem dieser Durchmesser von der Curve der Rückkehrpuncte berührt wird.

Wenn das Asymptoten-Dreieck und der Doppelpunct einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, so beruht die Bestimmung der beiden Tangenten der Curve in diesem Puncte auf der Auflösung einer quadratischen Gleichung. Denn die Richtung dieser beiden Tangenten ist durch die beiden Wurzelwerthe von x in der Gleichung (35) bestimmt, in welcher die partiellen Differential-Coefficienten, dadurch, dafs sie auf den gegebenen Doppelpunct bezogen werden, gegebene Werthe erhalten. Wenn der gegebene Doppelpunct insbesondere ein Rückkehrpunct ist, so wird die Bestimmung der Tangente in diesem Puncte eine lineare, wobei an die Stelle der Gleichung (35) etwa die Gleichung (36) tritt. Zugleich ist ersichtlich, dafs die beiden Tangenten in einem gegebenen Doppelpuncte den beiden Tangenten in denjenigen beiden Rückkehrpuncten, welche in die Berührungspuncte auf den, von dem Doppelpuncte aus, an die Curve der Rückkehrpuncte gelegten Tangenten fallen, parallel sind.

290. Die hauptsächlichsten Resultate, zu denen wir in den letzten Nummern gelangt sind, können wir in dem Nachstehenden zusammenfassen.

Wenn die drei Asymptoten einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, so ist der geometrische Ort für solche Doppelpuncte, in welchem die beiden Tangenten der Curve sich unter denselben gegebenen Winkeln schneiden, ein Kegelschnitt. Wir erhalten einen reellen Kegelschnitt, sowohl für jede beliebige Annahme der Durchschnitts-Winkel zweier reellen Zweige, als auch für jede beliebige Annahme der Winkel der gleichen zugeordneten Durchmesser isolirter Puncte. Alle diese Kegelschnitte haben einen imaginären doppelten Contact. Ihre gemeinschaftliche Berührungs-Chorde ist die Polare des Durchschnittspunctes der drei von den Winkelpuncten des Asymptoten-Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel, in Beziehung auf das Asymptoten-Dreieck. Sie ist der geometrische Ort solcher Doppelpuncte, in welchem zwei Zweige der Curve sich unter rechten Winkeln schneiden. Es gibt eine Gränze der Durchschnitts-Winkel, wenn die bezüglichen Doppelpuncte

unendlich weit liegen sollen, und dieser Gränze entspricht, dafs der Kegelschnitt insbesondere eine Parabel ist. Fällt der Doppelpunct in den Pol der gemeinschaftlichen Berührungs-Chorde der sich doppelt berührenden Kegelschnitte, in Beziehung auf einen beliebigen derselben und insbesondere in Beziehung auf die Curve der Rückkehrpuncte, so ist er ein isolirter Punct, der sich dadurch von allen übrigen auszeichnet, dafs jede durch denselben gehende imaginäre gerade Linie eine Tangente der bezüglichen Curve in diesem Puncte ist. Wenn ein Doppelpunct nach einander verschiedene Lagen auf einer beliebigen Tangente an der Curve der Rückkehrpuncte annimmt, so behält eine der beiden Tangenten in demselben immer dieselbe Richtung.

291. Die in der vorigen Nummer zusammengestellten Resultate bestehen auch für den Fall zweier imaginären Asymptoten. Der doppelte Contact bleibt auch hier nothwendig ein imaginärer. Es werden nur dadurch, dafs die Curve der Rückkehrpuncte nicht mehr eine Ellipse, sondern eine Hyperbel ist, leichte Modificationen hervorgebracht. Weil zum Beispiel die, in die Reihe der sich doppelt berührenden Kegelschnitte gehörige, Parabel nothwendig innerhalb der Curve der Rückkehrpuncte liegt, so können nicht nur Doppelpuncte, in welchen zwei reelle Zweige der Curve unter einem beliebigen gegebenen Winkel sich schneiden, sondern auch isolirte Puncte, deren zugeordnete Durchmesser sich unter Winkeln schneiden, deren Annäherung an einen rechten Winkel eine bestimmte Gränze nicht überschreitet, unendlich weit nach zwiefach bestimmter Richtung sich entfernen. Es gibt, wie in dem Falle dreier reellen Asymptoten, auch immer noch eine einzige Lage des Doppelpunctes, von der Art, dafs jede durch denselben gehende imaginäre gerade Linie die bezügliche Curve in diesem Puncte berührt; denn, wenn auch immerhin alle analytischen Entwicklungen der letzten Nummer, für den vorliegenden Fall imaginärer Asymptoten, unter imaginärer Form sich darstellen, so haben wir doch gegen Ende der 288. Nummer für das Maximum von $sin^2\xi$ einen Werth, der von der ganzen Bezeichnungsweise unabhängig ist, nämlich die Einheit, gefunden.

Um den Gebrauch des Imaginären ganz zu vermeiden, können wir, indem wir die Functionen-Bestimmung der 251. Nummer zu Grunde legen, die fraglichen Curven dritter Ordnung durch folgende Gleichung darstellen:

$$U \equiv (t-\tfrac{1}{2}\beta)(t^2+w^2)+\mu s = 0.$$

Wenn wir hiernach in der Gleichung (20) t und w an die Stelle von p und q schreiben, und dann für die partiellen Differential-Coefficienten ihre Ausdrücke in t und w einsetzen, so finden wir ohne alle Mühe:

$$tang^2\omega = -sin^2\xi = \frac{4\{w^2-3(t-\frac{1}{3}\beta)^2-\frac{1}{12}\beta^2\}sin^2\vartheta}{\{4t-2w\cos\vartheta-\beta\}^2}. \qquad (37)$$

Diese Gleichung geht in die Gleichung der Curve der Rückkehrpuncte über (255), wenn wir $tang\,\omega = 0$ setzen. Der geometrische Ort solcher Doppelpuncte, in welchen, bei gegebener reeller Asymptote und gegebenem Asymptotenpuncte, die beiden Zweige der bezüglichen Curve dritter Ordnung sich unter rechten Winkeln schneiden, ist die durch die Gleichung:

$$4t-w\cos\vartheta-\beta = 0,$$

dargestellte gerade Linie. ϑ bedeutet die Gröfse derjenigen beiden, von den geraden Linien: $t = 0$ und $w = 0$ gebildeten Scheitelwinkel, innerhalb welcher diejenigen Puncte liegen, für welche die Functionen t und w, die kürzesten Abstände von den oben bezeich-

neten geraden Linien bedeuten, Werthe mit übereinstimmenden Vorzeichen erhalten. Ist insbesondere ϑ ein rechter Winkel, so geht die letzte Gleichung in die folgende über:

$$4t-\beta \equiv \beta-2p = 0,$$

und stellt also diejenige gerade Linie dar, welche der reellen Asymptote parallel ist und in der Mitte zwischen dieser und dem Asymptotenpuncte hindurchgeht. Der Pol Y dieser geraden Linie, ZZ, in Beziehung auf die Curve der Rückkehrpuncte:

$$3(t-\tfrac{1}{2}\beta)^2-w^2 = -\tfrac{1}{12}\beta^2,$$

liegt also auf der geraden Linie $w = 0$. Wenn insbesondere also, wie in der Construction der 13. Figur, vorausgesetzt wird, dafs die in Rede stehenden Curven dritter Ordnung imaginäre Kreis-Asymptoten haben, so ist die Linie ZZ die Directrix und ihr Pol, der Punct Y, der Brennpunct der Curve der Rückkehrpuncte. Es haben hiernach alle, bei beliebiger Annahme von ω oder ξ, durch die Gleichung (37) dargestellten Kegelschnitte, und namentlich auch die Parabel UU, den Asymptotenpunct, A, zum gemeinsamen Brennpuncte und die gerade Linie ZZ zur gemeinsamen Directrix (255). Der Annahme $sin^2\xi = 1$ entspricht in unserm besondern Falle nicht mehr eine eigentliche Curve, sondern das System der reellen Asymptote und des Asymptotenpunctes, was vorauszusehen war, weil dieser Punct hier als ein Kreis zu betrachten ist, und ein Kreis unendlich viele imaginäre Asymptoten hat, die alle zu Tangenten werden, wenn der Radius desselben verschwindet. Fig. 13.

292. In dem Falle, dafs eine parabolische Asymptote (welche eine unendliche Reihe solcher Asymptoten repräsentirt) und eine geradlinige Asymptote einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, ändert sich in den oben erhaltenen Resultaten (290) ebenfalls nichts von Bedeutung. Nehmen wir nemlich:

$$U \equiv p(q^2+\lambda p)+\mu s = 0,$$

für die allgemeine Gleichung einer solchen Curve, so finden wir, wenn wir die Gleichung (20) in dieser Annahme entwickeln:

$$tang^2\omega = -sin^2\xi = \frac{4(q^2-\lambda p)sin^2\vartheta}{(p-q\cos\vartheta+\lambda)^2}.$$

Die Gleichung:

$$p-q\cos\vartheta+\lambda = 0,$$

stellt hiernach den geometrischen Ort für solche Doppelpuncte dar, in welchen die beiden Zweige der bezüglichen Curve sich unter rechten Winkeln schneiden. Wir sehen, dafs dieser Ort eine leicht zu bestimmende gerade Linie ist, welche auf der Durchmesser-Richtung der parabolischen Asymptoten senkrecht steht. Der Pol dieser geraden Linie, in Beziehung auf die Parabel der Rückkehrpuncte, fällt in die gemeinsame Axe der parabolischen Asymptoten, welche zugleich auch die Axe der eben genannten Parabel ist.

293. Wenn wir endlich die Gleichung (20) entwickeln, indem wir:

$$U \equiv p^3+\lambda q^2+\mu s = 0,$$

setzen, gelangen wir zu der nachstehenden Gleichung:

$$tang^2\omega = -sin^2\xi = \frac{-6\lambda p\, sin^2\vartheta}{(3p+\lambda)^2}, \qquad (38)$$

wobei wiederum ϑ denjenigen Winkel bezeichnet, den die beiden geraden Linien $p = 0$ und $q = 0$ mit einander bilden. Hieraus ersehen wir zuvörderst, dafs der geometrische Ort für die Rückkehrpuncte, welche eine gegebene semicubische Parabel:

$$p^3+\lambda q^2 = 0,$$

zu ihrer Asymptote haben, die durch die Gleichung $p = 0$ dargestellte gerade Linie P ist, welche durch den Rückkehrpunct dieser semicubischen Parabel geht, und diejenige Richtung hat, nach welcher die Parabel von einer geraden Linie, weil der dritte Durchschnittspunct

unendlich weit liegt, nur in zwei Puncten geschnitten wird. Dieses Resultat folgt nothwendig daraus, dafs, einerseits, in die Reihe der fraglichen Curven dritter Ordnung unendlich viele semicubische Parabeln gehören, die man alle erhält, indem man die gegebene, parallel mit sich selbst, so verschiebt, dafs ihr Rückkehrpunct die Linie P zurücklegt, und dafs, andrerseits, keine andere der fraglichen Curven einen Rückkehrpunct haben kann.

Im Allgemeinen stellt die Gleichung (38), bei beliebiger Annahme der Winkel ω oder ξ, ein System von zwei geraden Linien, welche der Linie P parallel sind, als geometrischen Ort der bezüglichen Doppelpuncte, dar. Von diesen beiden geraden Linien fällt, wenn wir $\omega = 0$ oder, was dasselbe bedeutet, $\xi = 0$ setzen, die eine unendlich weit, und deshalb erhalten wir als geometrischen Ort der Rückkehrpuncte nur eine einzige gerade Linie. Die fraglichen beiden geraden Linien fallen, bei einer zwiefachen Voraussetzung, in eine einzige zusammen. Wenn wir erstens den Winkel ω einem rechten Winkel gleich nehmen, so erhalten wir, nach Ausziehung der Quadrat-Wurzel, die Gleichung:

$$3p + \lambda = 0; \qquad (39)$$

wenn wir zweitens $\xi = \vartheta$ setzen, und nach vorhergegangener Entwicklung wiederum die Quadrat-Wurzel ausziehen, finden wir:

$$3p - \lambda = 0. \qquad (40)$$

Die beiden vorstehenden Gleichungen (39) und (40) stellen zwei gerade Linien dar, welche der Linie P parallel sind, und zu beiden Seiten des Rückkehrpunctes der gegebenen semicubischen Parabel von diesem Puncte in gleicher, leicht zu bestimmender, Entfernung liegen. Die erste dieser beiden geraden Linien schneidet die semicubische Parabel in reellen Puncten, die zweite nicht. Die erste ist der geometrische Ort für solche Doppelpuncte, in welchen zwei Zweige sich unter rechten Winkeln schneiden. Die zweite ist der geometrische Ort für solche isolirte Puncte, für welche der Winkel ξ, der alsdann gleich ϑ ist, sein Maximum der Annäherung an einen rechten Winkel erreicht hat. Denn, wenn wir $\sin^2\xi > \sin^2\vartheta$ nehmen, so stellt die Gleichung (38) ein System zweier imaginären geraden Linien dar, und es gibt keine entsprechenden isolirten Puncte mehr. Wir sehen zugleich, dafs nur in dem Falle, wo die Linie P auf der Tangente im Rückkehrpuncte der gegebenen semicubischen Parabel senkrecht steht, die fraglichen Curven einen solchen isolirten Punct haben können, für welchen ξ ein rechter Winkel ist, wodurch bedingt wird, dafs jede durch den isolirten Punct gehende imaginäre gerade Linie als eine Tangente der Curve in diesem Puncte anzusehen ist. Wir erhalten hier aber nicht mehr einen einzigen solchen Punct, sondern jeder Punct der geraden Linie (40) kann ein solcher Punct sein.

Um die Resultate dieser Nummer aus dem richtigen Gesichtspuncte aufzufassen, müssen wir nicht übersehen, dafs, wenn wir eine der fraglichen Curven, parallel mit sich selbst, nach der Richtung der geraden Linie P, verschieben, diese Curve immer noch fortfährt, die gegebene semicubische Parabel zur Asymptote zu haben. Es geht hieraus hervor, dafs alle diejenigen Curven dritter Ordnung, welche einen Doppelpunct, der auf einer gegebenen, mit der Linie P parallelen, geraden Linie liegt, haben, congruente Curven sind, und dafs man hiernach alle verschiedenen Curven dritter Ordnung, welche eine gegebene semicubische Parabel zu ihrer Asymptote haben, auch dann noch erhält, wenn man zugleich noch voraussetzt, dafs diese Asymptote eine osculirende sei, wonach alle Doppelpuncte auf der Tangente im Rückkehrpuncte der gegebenen semicubischen Parabel liegen.

294. Wir haben schon in der 279. Nummer die Behauptung festgestellt, dafs, wenn eine Curve der dritten oder einer höhern Ordnung gegeben ist, es im Allgemeinen solche

gerade Linien gibt, auf welchen drei Durchschnitte mit der Curve in einem einzigen Puncte zusammenfallen. Wir wollen die Bestimmung solcher geraden Linien in ihrer Allgemeinheit hier wieder aufnehmen.

Es sei, wie in der eben angezogenen Nummer,

$$F(\eta, \xi) \equiv U = 0, \tag{1}$$

die Gleichung der gegebenen Curve. Differentiiren wir diese Gleichung zweimal nach einander, indem wir η und ξ als zwei von einander unabhängige veränderliche Gröfsen ansehen, so kommt:

$$\frac{dU}{d\eta}\cdot d\eta + \frac{dU}{d\xi}\cdot d\xi = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dU}{d\eta}\cdot d^2\eta + \frac{dU}{d\xi}\cdot d^2\xi + \frac{d^2U}{d\eta^2}\cdot d\eta^2 + 2\cdot\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\cdot d\eta d\xi + \frac{d^2U}{d\xi^2}\cdot d\xi^2 = 0.$$

Wenn wir voraussetzen, dafs

$$\frac{dU}{d\eta}\cdot d^2\eta + \frac{dU}{d\xi}\cdot d^2\xi = 0, \tag{3}$$

so reducirt sich die letzte Gleichung auf ihre drei letzten Glieder, indem sie in die nachstehende übergeht:

$$\frac{d^2U}{d\eta^2}\cdot d\eta^2 + 2\cdot\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\cdot d\eta d\xi + \frac{d^2U}{d\xi^2}\cdot d\xi^2 = 0. \tag{4}$$

Die beiden Gleichungen (2) und (4) sind keine andern als die Gleichungen (6) und (7) der 279. Nummer, wenn wir x für $\frac{d\eta}{d\xi}$ schreiben. Eliminiren wir den eben bezeichneten Differential-Quotienten zwischen den Gleichungen (2) und (4), so ergibt sich unmittelbar:

$$\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^2\frac{d^2U}{d\eta^2} - 2\frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{d^2U}{d\eta d\xi} + \left(\frac{dU}{d\eta}\right)^2\frac{d^2U}{d\xi^2} = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir die verschiedenen partiellen Differential-Cofficienten entwickeln, eine neue Curve dar; sie steigt, wenn die Gleichung (1) von irgend einem n. Grade ist, im Allgemeinen, bis zum $[2(n-1)+(n-2)]$. oder $(3n-4)$. Grade an.

Wenn wir hiernach irgend einen der Durchschnittspuncte der, durch (4) dargestellten, Curve mit der gegebenen Curve betrachten, so gibt die Gleichung (2) im Allgemeinen auf lineare Weise den Werth des Differential-Quotienten $\frac{d\eta}{d\xi}$ für diesen Punct; bezeichnen wir denselben durch x und bestimmen dann die Constante λ in der folgenden Gleichung:

$$\eta = x\xi + \lambda,$$

so, dafs diese Gleichung durch die Coordinaten-Werthe des fraglichen Punctes befriedigt wird, so stellt dieselbe eine gerade Linie dar, welche die gegebene Curve so schneidet, dafs auf derselben in dem fraglichen Puncte drei Durchschnitte zusammenfallen.

295. In dem bisher betrachteten Falle wurde die einzige Bedingungs-Gleichung (3) befriedigt, indem sie sich in zwei Bedingungs-Gleichungen

$$\frac{dU}{d\eta} = 0, \qquad \frac{dU}{d\xi} = 0, \tag{6}$$

auflösete; woraus zunächst folgt, dafs, im Allgemeinen, eine Curve irgend einer beliebigen Ordnung keinen Doppelpunct zuläfst. Wenn aber die Curve dennoch einen Doppelpunct hat, so liegt derselbe, weil die Gleichung (5) befriedigt wird, wenn die letzten Gleichungen (6) beide zugleich bestehen, nothwendig auf der durch (5) dargestellten Curve. Noch mehr: diese Curve mufs die gegebene in dem Doppelpuncte berühren, was von vorne

herein sich ergibt, wenn wir erwägen, dafs in einem Doppelpuncte zwei gerade Linien sich schneiden, auf deren jeder drei Durchschnitte mit der Curve in diesem Doppelpuncte zusammenfallen; und was wir auf analytischem Wege sogleich dadurch bestätigt finden, dafs, wenn wir die Gleichung (5) in Beziehung auf η und ξ differentiiren, auch die Differential-Gleichung noch befriedigt wird, wenn die Gleichungen (6) zusammen bestehen.

296. Wir wollen nun von dem singulären Falle der Doppelpuncte abstrahiren, und überhaupt die geometrische Bedeutung der Bedingungs-Gleichung (3) nachweisen. Aus der Zusammenstellung dieser Gleichung und der Gleichung (2) folgt:

$$\frac{d^2\eta}{d\eta} = \frac{d^2\xi}{d\xi}, \tag{7}$$

wonach der Differential-Ausdruck:

$$d.\varkappa \equiv d.\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\xi d^2\eta - d\eta d^2\xi}{d\xi^2},$$

verschwindet, und also $\varkappa$, im Allgemeinen, ein Maximum oder Minimum erreicht. Die Tangenten der gegebenen Curve gelangen also in den Durchschnittspuncten dieser Curve und der Curve (5) zu einer Gränzlage, so dafs die Richtung dieser Tangenten, bevor sie die gegebene Curve in einem solchen Puncte berühren, fortschreitend sich ändert und nachher, in entgegengesetztem Sinne sich ändernd, wiederum den frühern Richtungen der Tangenten parallel wird. Wir nennen alle, reelle oder imaginäre, Puncte, in welchen die gegebene Curve von der Curve (5) geschnitten wird, Wendungspuncte.

Weil zwei auf einander folgende Tangenten der gegebenen Curve in jedem ihrer Wendungspuncte zusammenfallen, so ist offenbar, dafs der Krümmungs-Halbmesser der Curve in diesen Puncten unendlich grofs wird, und dafs der Mittelpunct des Schmiegungs-Kreises vor und nach einem solchen Puncte auf entgegengesetzter Seite der Tangente in demselben liegt. Der Sinn der Krümmung ändert sich in einem Wendungspuncte, die Tangente in demselben berührt die Curve, indem sie dieselbe zugleich schneidet. Diese Tangente ist eine osculirende.

Um auch diese Folgerungen an die analytische Bezeichnungsweise zu knüpfen, bemerken wir zuvörderst, dafs, bei der obigen Bestimmung der Wendungspuncte einer gegebenen Curve, sich durchaus nichts ändert, was für verschiedene, ganze oder gebrochene, lineare Functionen η und ξ auch bedeuten mögen. Legen wir demnach diesen Functionen die Bedeutung rechtwinkliger Parallel-Coordinaten bei, so wird bekanntlich der Krümmungs-Halbmesser durch den nachstehenden Ausdruck bestimmt:

$$\frac{(d\eta^2 + d\xi^2)^{\frac{3}{2}}}{d\xi d^2\eta - d\eta d^2\xi},$$

woraus wir sogleich erkennen, dafs, als Folge der Gleichung (7) und der obigen Behandlung gemäfs, der Krümmungs-Halbmesser in einem Wendungspuncte unendlich grofs wird.

297. Weil in einem Wendungspuncte der Krümmungs-Halbmesser unendlich grofs wird, und diese Eigenschaft für die Bestimmung derselben characteristisch ist, da aber auch, von der andern Seite, der Krümmungs-Halbmesser immer mehr wächst, wenn der bezügliche Punct auf einem hyperbolischen oder parabolischen Zweige einer gegebenen Curve immer weiter fortrückt: so werden wir zu der Vermuthung geleitet, dafs von den $(3n-4)n$ Durchschnittspuncten der gegebenen Curve und der Curve (5) mehrere immer unendlich weit liegen und als fremde Puncte den eigentlichen Wendungspuncten sich beigesellt haben. Wir wollen hierüber in einige allgemeine Untersuchungen eingehen, weil wir durch diese, über schwierige, bisher unerklärbar gebliebene Puncte der allgemeinen Theorie

der algebraischen Curven, Aufschluſs erhalten. Hierbei werden wir, um unendlich weit entfernte Puncte sogleich unterscheiden zu können, die Voraussetzung machen, daſs η und ξ lineare und ganze Functionen gewöhnlicher Parallel-Coordinaten bedeuten.

Um unsern Zweck zu erreichen, wollen wir uns des folgenden analytischen Hülfs-Satzes bedienen. „Wenn U_n ein Product von n linearen Functionen von η und ξ bezeichnet, und wir dann, in der Voraussetzung $U \equiv U_n$, die Gleichung (5) entwickeln, so wird U_n ein Factor dieser Gleichung.“ Wenn wir zum Beispiel $n = 3$ nehmen, und demnach:

$$U \equiv U_3 \equiv pqr,$$

setzen, indem wir durch p, q und r lineare und ganze Functionen von η und ξ darstellen, erhalten wir, wenn wir die Gleichung (5) unmittelbar entwickeln und keinen Factor vernachlässigen:

$$\begin{aligned} &-pqr\Big\{p^2\Big(\frac{dq}{d\eta}\frac{dr}{d\xi}-\frac{dq}{d\xi}\frac{dr}{dq}\Big)^2+q^2\Big(\frac{dp}{d\eta}\frac{dr}{d\xi}-\frac{dp}{d\xi}\frac{dr}{d\eta}\Big)^2+r^2\Big(\frac{dp}{d\eta}\frac{dq}{d\xi}-\frac{dp}{d\xi}\frac{dq}{d\eta}\Big)^2\\ &+pq\Big(\frac{dp}{d\eta}\frac{dr}{d\xi}-\frac{dp}{d\xi}\frac{dr}{d\eta}\Big)\Big(\frac{dq}{d\eta}\frac{dr}{d\xi}-\frac{dq}{d\xi}\frac{dr}{d\eta}\Big)+pr\Big(\frac{dp}{d\eta}\frac{dq}{d\xi}-\frac{dp}{d\xi}\frac{dq}{d\eta}\Big)\Big(\frac{dr}{d\eta}\frac{dq}{d\xi}-\frac{dr}{d\xi}\frac{dq}{d\eta}\Big)\\ &+qr\Big(\frac{dq}{d\eta}\frac{dp}{d\xi}-\frac{dq}{d\xi}\frac{dp}{d\eta}\Big)\Big(\frac{dr}{d\eta}\frac{dp}{d\xi}-\frac{dr}{d\xi}\frac{dp}{d\eta}\Big)\Big\}=0. \end{aligned}$$

Wir können die vorstehenden Entwicklungen bedeutend vereinfachen, wenn wir η und ξ als mit p und q identisch ansehen, wodurch die Bestätigung des obigen Hülfssatzes durchaus keiner Einschränkung unterworfen wird.

Wir wollen den in Rede stehenden Hülfssatz vollständig beweisen. Zu diesem Ende reicht es hin, zu zeigen, daſs, wenn derselbe für die Voraussetzung, daſs $n = m$, gilt, er seine Geltung auch dann behält, wenn wir $n = m+1$ setzen; daſs also, wenn, der gemachten Voraussetzung gemäſs,

$$\Big(\frac{dU_m}{d\xi}\Big)^2\frac{d^2U_m}{d\eta^2}-2\frac{dU_m}{d\eta}\cdot\frac{dU_m}{d\xi}\cdot\frac{d^2U_m}{d\eta d\xi}+\Big(\frac{dU_m}{d\eta}\Big)^2\frac{d^2U}{d\xi^2}\equiv U_m V, \tag{8}$$

wobei V eine Function vom $(2m-4)$. Grade bezeichnet, und wenn wir dann:

$$U \equiv U_m p,$$

setzen, indem p eine lineare Function bedeutet, die Gleichung (5) durch $U_m p$ theilbar wird. Für die verschiedenen, in dieser Gleichung vorkommenden, partiellen Differential-Coefficienten erhalten wir, wenn wir, was unbeschadet der Allgemeinheit erlaubt ist, η und p als identisch betrachten, die nachstehenden Ausdrücke:

$$\frac{dU}{d\eta}=\frac{dU_m}{d\eta}\cdot p+U_m, \qquad \frac{dU}{d\xi}=\frac{dU_m}{d\xi}\cdot p,$$

$$\frac{d^2U}{d\eta^2}=\frac{d^2U_m}{d\eta^2}\cdot p+2\frac{dU_m}{d\eta} \qquad \frac{d^2U}{d\eta d\xi}=\frac{d^2U_m}{d\eta d\xi}\cdot p+\frac{dU_m}{d\xi} \qquad \frac{d^2U}{d\xi^2}=\frac{d^2U_m}{d\xi^2}\cdot p,$$

und wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichung (5) einsetzen, und die identische Gleichung (8) berücksichtigen, so ergibt sich:

$$U_m p\Big\{Vp^2+\Big(U_m+2\frac{dU_m}{d\eta}\cdot p\Big)\frac{d^2U}{d\xi^2}-\frac{dU_m}{d\xi}\frac{d^2U}{d\eta d\xi}\cdot p-2\Big(\frac{dU_m}{d\xi}\Big)^2\Big\}=0.$$

Die Form dieser Gleichung enthält den geforderten Beweis.

298. Wenn wir nun, nach diesen vorläufigen Entwicklungen, durch die Gleichung (1) eine Curve irgend einer beliebigen n. Ordnung und durch die Gleichung:

$$U_n = 0, \tag{9}$$

das System der n Asymptoten dieser Curve darstellen, so können wir immer:

$$U \equiv U_n + U_{(n-2)} \tag{10}$$

setzen, indem wir durch $U_{(n-2)}$ eine Function des $(n-2)$. Grades bezeichnen. Diese Form wird dadurch bedingt, dafs der Grad der Gleichung der Curve, verbunden mit der Gleichung einer jeden ihrer Asymptoten, sich um zwei Einheiten reduciren mufs, weil von den n Durchschnittspuncten einer beliebigen Transversalen mit der Curve, wenn insbesondere eine Asymptote für diese Transversale genommen wird, zwei unendlich weit liegen. Entwickeln wir hiernach wiederum die Gleichung (5), indem wir von der vorstehenden identischen Gleichung ausgehen, so erhalten wir eine Gleichung, die zum $(3n-4)$. Grade ansteigt. In dieser Gleichung entspricht der Function U_n, wenn wir $U_{(n-2)}$ ganz unberücksichtigt lassen und durch $V_{(2n-4)}$ eine Function des $(2n-4)$. Grades darstellen, nach der vorigen Nummer ein Glied von folgender Form:

$$U_n V_{(2n-4)}.$$

Die übrigen Glieder der Gleichung (5) steigen, wovon man sich sogleich überzeugt, nur bis zum $(3n-6)$. Grade an; bezeichnen wir, der Kürze halber, das Aggregat dieser Glieder durch $V_{(3n-6)}$, so können wir die fragliche Gleichung auf nachstehende Weise schreiben:

$$U_n V_{(2n-4)} + V_{(3n-6)} = 0. \qquad (11)$$

Die Form dieser Gleichung, deren Grad, wenn wir $U_n = 0$ setzen, um zwei Einheiten sich reducirt, zeigt an, dafs die n Asymptoten der gegebenen Curve, deren Gleichung:

$$U_n + U_{(n-2)} = 0,$$

zugleich auch Asymptoten der Curve (5) oder (11) sind. Es liegen also 2n Durchschnittspuncte der beiden eben bezeichneten Curven unendlich weit. Eliminiren wir zwischen den letzten beiden Gleichungen die Function U_n, so kommt:

$$U_{(n-2)} V_{(2n-4)} = V_{(3n-6)}.$$

Diese Gleichung stellt eine Curve der $3(n-2)$. Ordnung dar, welche, bei Vernachlässigung der unendlich weit entfernten Durchschnittspuncte, die gegebene Curve in denselben Puncten schneidet, als die Curve (5) oder (11). Die Anzahl dieser Durchschnittspuncte beträgt hiernach $3n(n-2)$.

Eine Curve der n. Ordnung hat, im Allgemeinen, $3n(n-2)$ Wendungspuncte.

299. Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir uns jetzt wiederum ausschliefslich zu den Curven der dritten Ordnung zurückwenden, und, indem wir:

$$\mu s \equiv \pi p + \varkappa q + \varrho r, \qquad (12)$$

setzen, für die allgemeine Gleichung dieser Curven die folgende nehmen:

$$U \equiv pqr + \pi p + \varkappa q + \varrho r = 0. \qquad (13)$$

Alsdann ergibt sich, wenn wir der Functionen-Bestimmung, wie früher, die identische Gleichung:

$$p + q + r \equiv \beta,$$

zu Grunde legen:

$$\frac{dU}{dp} = q(r-p) + (\pi - \varrho), \qquad \frac{dU}{dq} = p(r-q) + (\varkappa - \varrho),$$

$$\frac{d^2U}{dp^2} = -2q, \qquad \frac{d^2U}{dpdq} = r-p-q, \qquad \frac{d^2U}{dq^2} = -2p.$$

Wenn wir in der Gleichung (5) η und ξ mit p und q vertauschen, und dann die vorstehenden Ausdrücke für die partiellen Differential-Coefficienten in diese Gleichung einsetzen, so finden wir, indem wir blofs den gemeinschaftlichen Factor (-2) vernachlässigen:

pqr

$$pqr\{p^2+q^2+r^2-pq-pr-qr\}$$
$$+\pi p\{q(q-p)+r(r-p)\}+\varkappa q\{p(p-q)+r(r-q)\}+\varrho r\{p(p-r)+q(q-r)\}$$
$$+\pi^2 p+\varkappa^2 q+\varrho^2 r+\varkappa\varrho\{p-q-r\}+\pi\varrho\{q-p-r\}+\pi\varkappa\{r-p-q\}=0. \quad (14)$$

Diese Gleichung des 5. Grades reducirt sich auf den 3. Grad, wenn wir für pqr seinen Werth aus der Gleichung (13), wofür sich $-(\pi p+\varkappa q+\varrho r)$ ergibt, nehmen und substituiren. Alsdann kommt sogleich:

$$(\pi+\varkappa+\varrho)pqr-\pi p^3-\varkappa q^3-\varrho r^3$$
$$+\pi^2 p+\varkappa^2 q+\varrho^2 r+\varkappa\varrho(p-q-r)+\pi\varrho(q-p-r)+\pi\varkappa(r-p-q)=0.$$

Wenn wir von Neuem für pqr den obigen Ausdruck substituiren, so verwandelt diese Gleichung sich zuletzt noch in die folgende:

$$\pi p^3+\varkappa q^3+\varrho r^3+\varkappa\varrho(2q+2r-p)+\pi\varrho(2p+2r-q)+\pi\varkappa(2p+2q-r)=0, \quad (15)$$

der wir auch, indem wir berücksichtigen, dafs $p+q+r\equiv\beta$, folgende Form geben können:

$$\pi p^3+\varkappa q^3+\varrho r^3-3\varkappa\varrho p-3\pi\varrho q-3\pi\varkappa r+2(\pi\varkappa+\pi\varrho+\varrho\varkappa)\beta=0. \quad (16)$$

Die durch die vorstehende Gleichung dargestellte Curve dritter Ordnung schneidet die gegebene Curve dritter Ordnung (13) in den Wendungspuncten dieser letztern. Die Anzahl dieser Wendungspuncte beträgt also, in Uebereinstimmung mit der vorigen Nummer, neun.

Wenn $\varkappa=0$, so reducirt sich μs auf eine blofse Function von p, wonach die Asymptote P eine osculirende Aymptote der gegebenen Curve dritter Ordnung ist. Aber durch dieselbe Voraussetzung wird p ein Factor der Gleichung (14), woraus folgt, dafs einer der neun Wendungspuncte auf der osculirenden Asymptote P liegt, so dafs diese an die Stelle einer osculirenden Tangente getreten ist.

Wenn $\pi=\varkappa=\varrho$, so geht die lineare Function μs in eine blofse Constante $\pi\beta$ über, wonach die gegebene Curve dritter Ordnung drei osculirende Asymptoten hat. Die Gleichung (14) reducirt sich alsdann auf ihre erste Zeile, und sinkt, wenn wir $(-\pi\beta)$ statt pqr schreiben, auf den zweiten Grad herab. Wir können sie alsdann auch unter der folgenden Form schreiben:

$$pq+pr+qr=\tfrac{1}{3}\beta^2,$$

oder endlich auch unter der folgenden:

$$(p-\tfrac{1}{3}\beta)^2+(q-\tfrac{1}{3}\beta)^2+(r-\tfrac{1}{3}\beta)^2=0.$$

Drei Wendungspuncte sind also mit der Linie S unendlich weit gerückt. Die übrigen sechs sind offenbar imaginär, denn die letzte Gleichung, welche hier die Gleichung (15) vertritt, stellt nur einen Punct und zwar den Schwerpunct des von den drei Asymptoten der gegebenen Curve dritter Ordnung gebildeten Dreiecks dar, für welchen $p=q=r=\frac{1}{3}\beta$, in Uebereinstimmung mit der identischen Bedingungs-Gleichung.

300. Wenn die gegebene Curve dritter Ordnung einen Doppelpunct hat, und wir für diesen Doppelpunct

$$p=p_1, \qquad q=q_1, \qquad r=r_1,$$

setzen, so können wir die Gleichung der Curve nach der 244. Nummer unter der folgenden Form schreiben:

$$pqr-(q_1r_1p+p_1r_1q+p_1q_1r)+2p_1q_1r_1=0. \quad (17)$$

Um für diese neue Constanten-Bestimmung die Gleichung (14) umzubilden, brauchen wir blofs

$$\pi=-q_1r_1, \qquad \varkappa=-p_1r_1, \qquad \varrho=-p_1q_1,$$

zu nehmen; zu den Gleichungen (15) und (16) müssen wir alsdann aber, des Gliedes $2p_1q_1r_1$ in der Gleichung der gegebenen Curve dritter Ordnung wegen, noch den folgenden Ausdruck hinzufügen:

$$2p_1q_1r_1\{p^2+q^2+r^2-pq-pr-qr\}+2p_1q_1r_1(\pi+\varkappa+\varrho)$$
$$\equiv 3p_1q_1r_1(p^2+q^2+r^2)-2p_1q_1r_1(\tfrac{1}{2}\beta^2+p_1q_1+p_1r_1+q_1r_1),$$

und erhalten alsdann, indem wir zugleich alle Zeichen ändern:

$$(q_1r_1p^3+p_1r_1q^3+p_1q_1r^3)-3p_1q_1r_1(p^2+q^2+r^2)$$
$$+3p_1q_1r_1(p_1p+q_1q+r_1r)-p_1q_1r_1(p_1^2+q_1^2+r_1^2)=0.$$

Der erste Theil dieser Gleichung verschwindet, wenn wir die auf den Doppelpunct der gegebenen Curve dritter Ordnung sich beziehenden Functionen-Werthe einsetzen. Der bezügliche Ort geht also durch diesen Doppelpunct. Differentiiren wir die letzte Gleichung, so gibt die resultirende:

$$q_1r_1(p^2-p_1^2)dp+p_1r_1(q^2-q_1^2)dq+p_1q_1(r^2-r_1^2)dr=0,$$

auf den fraglichen Doppelpunct bezogen, keine Relation zwischen den Differentialien dp, dq und dr. Um eine solche zu erhalten, müssen wir noch zweimal differentiiren; alsdann kommt:

$$q_1r_1dp^3+p_1r_1dq^3+p_1q_1dr^3=0.$$

Wir ziehen hieraus den Schluſs, daſs der fragliche geometrische Ort ein System von drei geraden Linien ist, die sich alle drei in dem Doppelpuncte der gegebenen Curve dritter Ordnung schneiden. Die letzte Gleichung, verbunden mit der Gleichung:

$$dp+dq+dr=0,$$

gibt die Richtung dieser drei geraden Linien, deren Durchschnittspuncte mit der gegebenen Curve die Wendungspuncte dieser letztern sind. Von diesen fallen also sechs in in dem Doppelpuncte zusammen. Von den drei übrigen können zwei imaginär sein und auch zusammenfallen. Dieses letztere kann nur im Doppelpuncte selbst geschehen, und dieser ist alsdann ein Rückkehrpunct. Wenn wir, um dieſs zu zeigen, dr zwischen den beiden letzten Gleichungen eliminiren, so erhalten wir, indem wir $dp=zdq$ setzen:

$$q_1(r_1-p_1)z^3-3p_1q_1z^2-3p_1q_1z+p_1(r_1-q_1)=0,$$

und wenn wir in Beziehung auf z differentiiren:

$$(r_1-p_1)z^2-2p_1z-p_1=0.$$

Als Bedingung, daſs diese beiden Gleichungen alsdann überhaupt eine gemeinschaftliche Wurzel haben, finden wir:

$$p_1^2+q_1^2+r_1^2=\tfrac{1}{2}\beta^2,$$

und für diese Wurzel selbst:

$$2q_1z+(p_1+q_1-r_1)=0.$$

Aber nach der 244. Nummer hat alsdann die Curve einen Rückkehrpunct, und der vorstehende Werth von z zeigt die Richtung der Tangente in diesem Puncte an.

Ein isolirter Punct vertritt hiernach sechs imaginäre, ein Durchschnitt zweier reellen Zweige vier imaginäre und zwei reelle, und ein Rückkehrpunct sogar sechs imaginäre und zwei reelle, also im Ganzen acht Wendungspuncte.

Die vorstehenden Resultate erleiden keine wesentlichen Modificationen, wenn die gegebene Curve dritter Ordnung zwei imaginäre Asymptoten hat. Wenn alsdann die Linie

S unendlich weit liegt, so liegen mit ihr zwei imaginäre und ein reeller Wendungspunct unendlich weit. Wenn die Curve alsdann einen Doppelpunct hat, so schneiden sich in demselben nothwendig zwei reelle Zweige, wonach sie ihre beiden reellen und zwei imaginäre Wendungspuncte verliert, und also zwei imaginäre Wendungspuncte noch übrig behält.

301. Wir wollen uns nun sogleich zur Betrachtung des untergeordneten Falles, dafs zwei der drei geradlinigen Asymptoten parallel werden, wenden, um zu sehen, wie die allgemeinen Resultate sich hier particularisiren. Legen wir zu diesem Ende die Gleichung:

$$U \equiv p(q^2 - \vartheta^2) + \mu q + \sigma = 0, \qquad (18)$$

zu Grunde, so kommt:

$$\frac{dU}{dp} = q^2 - \vartheta^2, \qquad \frac{dU}{dq} = 2pq + \mu,$$

$$\frac{d^2U}{dp^2} = 0, \qquad \frac{d^2U}{dpdq} = 2q, \qquad \frac{d^2U}{dq^2} = 2p.$$

Setzen wir diese Werthe der partiellen Differential-Coefficienten in die Gleichung (5) ein, indem wir in derselben p und q für η und ξ nehmen, so kommt, mit Vernachlässigung des gemeinschaftlichen Factors $2(q^2 - \vartheta^2)$:

$$2(2pq + \mu)q - (q^2 - \vartheta^2)p = 0.$$

Die Gleichung (18) gibt für den zweiten Theil dieser Gleichung $-(\mu q + \sigma)$, wonach sich:

$$4pq^2 + 3\mu q + \sigma = 0,$$

ergibt, und wenn wir wiederum für pq^2 seinen Werth aus der Gleichung (18) einsetzen, so kommt:

$$4\vartheta^2 p - \mu q - 3\sigma = 0. \qquad (19)$$

Diese Gleichung ersten Grades, welche hier also an die Stelle der Gleichung (16) tritt, stellt eine gerade Linie dar, welche die gegebene Curve (18) in ihren Wendungspuncten, deren Anzahl hiernach nur drei beträgt, schneidet. Weil die Reduction des Grades der vorstehenden Gleichung aus der Vernachlässigung des Factors $(q^2 - \vartheta^2)$ hervorgegangen ist, so sehen wir, dafs die fragliche Curve defshalb nur drei Wendungspuncte hat, weil die sechs übrigen auf den beiden parallelen Asymptoten unendlich weit liegen. Die durch die letzte Gleichung (19) dargestellte gerade Linie ist leicht zu construiren. Nennen wir nemlich die beiden Durchschnittspuncte der Asymptote P und der geraden Linie: $q = 0$, welche in der Mitte zwischen den beiden, reellen oder imaginären, parallelen Asymptoten hindurchgeht, mit der Curve bezüglich S und Q', und C den Durchschnittspunct jener Asymptote P mit dieser Linie Q, so erhält man aus der Gleichung der Curve, indem wir p und q die Bedeutung von Parallel-Coordinaten unterlegen, sogleich

Taf. VI, Fig. XLVIII bis LIII.

$$CS = \frac{\sigma}{\vartheta^3}, \qquad CQ' = -\frac{\sigma}{\mu},$$

Bezeichnen wir endlich die Durchschnittspuncte der zu construirenden geraden Linie (19) mit der Asymptote P und der Linie Q bezüglich durch P_1 und Q_1, so ergibt sich hiernach:

$$CQ_1 = \tfrac{2}{3}CQ', \qquad CP' = 3CS.$$

Wenn die beiden parallelen Asymptoten imaginär sind, so sind auch die sechs unendlich weit liegenden Wendungspuncte alle imaginär, und also die übrig bleibenden alle drei reell. Sind hingegen die beiden parallelen Asymptoten reell, so sind von diesen drei Wendungspuncten zwei nothwendig imaginär. Fallen endlich die beiden parallelen Asymptoten in der Linie Q zusammen, wonach ϑ verschwindet, so ist mit diesen

Asymptoten auch die Linie (19) parallel: die Curve behält also dann nur einen einzigen reellen Wendungspunct, und dieser liegt auf einer geraden Linie, die von den beiden zusammenfallenden Asymptoten dreimal so weit entfernt ist, als die Linie S.

Wenn die Asymptote P insbesondere eine osculirende ist, so liegt auf ihr ein Wendungspunct unendlich weit. Indem wir $\mu = 0$ setzen, geht alsdann die Gleichung (19) in die folgende über:

$$4\vartheta^2 p - 3\sigma = 0.$$

Die beiden einzigen Wendungspuncte liegen also auf einer geraden Linie, welche der osculirenden Asymptote P parallel ist, und zwar dieser Asymptote um ein Viertheil näher, als der Durchschnittspunct der Linie Q mit der Curve, in welchem diese das Minimum oder Maximum ihrer Entfernung von derselben Asymptote erreicht. Die Wendungspuncte sind reell oder imaginär, je nachdem die parallelen Asymptoten, umgekehrt, imaginär oder reell sind. Wenn diese zusammenfallen, so sind alle Wendungspuncte unendlich weit gerückt.

302. In Beziehung auf Wendungspuncte bieten die Curven dritter Ordnung mit parabolischen Asymptoten nichts Ausgezeichnetes dar. So wie einerseits die Curven mit drei reellen und andrerseits die Curven mit zwei imaginären Asymptoten, haben auch sie, zwischen diesen beiden Haupt-Abtheilungen den Uebergang bildend, im Allgemeinen drei reelle und sechs imaginäre Wendungspuncte.

Betrachten wir aber insbesondere die Trident-Curve, deren Gleichung wir früher die nachstehende Form gegeben haben:

$$U \equiv p(p^2 + \lambda q) + \mu = 0,$$

wobei die osculirende parabolische Asymptote derselben durch die Gleichung:

$$p^2 + \lambda q = 0,$$

dargestellt wird, so ergibt sich:

$$\frac{dU}{dp} = 3p^2 + \lambda q, \quad \frac{dU}{dq} = \lambda p, \quad \frac{d^2U}{dp^2} = 6p, \quad \frac{d^2U}{dpdq} = \lambda, \quad \frac{d^2U}{dq^2} = 0,$$

und wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichung (5) einsetzen, indem wir η und ξ mit p und q identisch nehmen, so finden wir:

$$pq = 0.$$

Der Factor p in der vorstehenden Gleichung zeigt Wendungspuncte an, welche auf der geradlinigen Asymptote der Trident-Curve unendlich weit liegen. Abstrahiren wir von demselben, so behält die Curve nur noch drei Wendungspuncte, welche auf der Tangente QQ ihrer osculirenden parabolischen Asymptote, im Durchschnitte derselben mit der geradlinigen Asymptote P liegen. Von diesen Wendungspuncten sind zwei imaginär, für den dritten und rellen ist: $p = \sqrt[3]{\mu}$.

303. Betrachten wir diejenigen Curven dritter Ordnung, welche semicubische Parabeln zu ihren Asymptoten haben, und die wir durch die nachstehende Gleichung darstellen können:

$$U \equiv p^3 + \lambda q^2 + \mu p + \varkappa = 0,$$

so kommt:

$$\frac{dU}{dp} = 3p^2 + \mu, \quad \frac{dU}{dq} = 2\lambda q, \quad \frac{d^2U}{dp^2} = 6p, \quad \frac{d^2U}{dpdq} = 0, \quad \frac{d^2U}{dq^2} = 2\lambda,$$

wonach die Gleichung (5) in die folgende übergeht:

$$(3p^2 + \mu)^2 + 12\lambda q^2 p = 0.$$

Eliminiren wir zwischen dieser Gleichung und der Gleichung der gegebenen Curve λq^2, so finden wir:

$$3p^4+6\mu p^2+12\varkappa p-\mu^2=0. \qquad (20)$$

Diese Gleichung stellt ein System von solchen vier geraden Linien dar, von denen jede der gegebenen Curve nur in zwei Puncten begegnet, weil der dritte Durchschnittspunct unendlich weit liegt. Eine Curve dritter Ordnung mit semicubi-parabolischen Asymptoten hat also im Allgemeinen acht Wendungspuncte, die paarweise von der Tangente im Rückkehrpuncte der osculirenden semicubi-parabolischen Asymptote zu beiden Seiten derselben gleich weit abstehen.

Wenn die fragliche Curve insbesondere eine nach höchster Ordnung osculirende Asymptote hat, was mit sich bringt, dafs $\mu=0$, so geht die letzte Gleichung in die nachstehende über:

$$p(p^3+4\varkappa)=0.$$

Zwei Wendungspuncte liegen also auf derjenigen geraden Linie P, welche die Rückkehrpuncte der semicubi-parabolischen Asymptoten der Curve enthält. Von den drei geraden Linien, welche die noch übrigen drei Paare von Wendungspuncten verbinden, sind zwei imaginär, für die dritte derselben ist $p=-\sqrt[3]{4\varkappa}$. Diese gerade Linie begegnet der vorliegenden Curve oder begegnet ihr nicht, je nachdem λ und $\varkappa$ im Zeichen übereinstimmen oder nicht, also je nachdem die Linie P, umgekehrt, der Curve nicht begegnet oder begegnet. Zwei Wendungspuncte und nur zwei sind immer reell und liegen entweder auf der zuletzt bestimmten geraden Linie (die 216. Art) oder auf der Linie P (die 217. Art).

In dem Falle der semicubischen Parabel selbst reducirt sich die letzte Gleichung auf: $p^4=0$, wonach die vier Paare von Wendungspuncten alle in dem Rückkehrpuncte sich vereinigen.

Wenn, indem wir uns zu dem allgemeinen Falle zurückwenden, die Curve einen Doppelpunct hat, so ist für denselben $q=0$, und mithin:

$$p^3+\mu p+\varkappa=0, \qquad (21)$$

und es besteht alsdann, neben dieser Gleichung, die zwei gleiche Wurzeln haben mufs, zugleich ihre Differential-Gleichung:

$$3p^2+\mu=0. \qquad (22)$$

Aber auch dann, wenn wir die Gleichung (20) differentiiren, finden wir die vorstehende Gleichung (21), so dafs die letzte Gleichung (22) aus der Gleichung (20) nach einer zweimaligen Differentiation hervorgeht. Wir sehen hieraus, dafs, in dieser Voraussetzung, die Gleichung (20) drei gleiche Wurzeln hat, und also drei der vier durch diese Gleichung dargestellten geraden Linien, in derselben, durch den fraglichen Doppelpunct gehenden, geraden Linie zusammenfallen, und also, bei Curven dritter Ordnung mit semicubi-parabolischen Asymptoten, ein Doppelpunct immer an die Stelle von sechs Wendungspuncten tritt. Da ferner die Summe der vier Wurzeln der Gleichung (20) gleich Null ist, so sehen wir, dafs die beiden noch übrigen Wendungspuncte auf einer vierten geraden Linie liegen, welche auf entgegengesetzter Seite von der Linie P dreimal so weit entfernt ist, als der fragliche Doppelpunct. Aber zugleich steht derjenige Punct, in welchem die Curve in die Linie $q=0$ einschneidet, auf entgegengesetzter Seite, nur doppelt so weit von der Linie P ab, als jener Doppelpunct. Wenn sich hiernach im Doppelpuncte zwei reelle Zweige der Curve schneiden (die 207. Art), so begegnet jene vierte gerade Linie, auf welcher zwei Wendungspuncte liegen, der Curve nicht: sie begegnet ihr aber immer und hiernach sind diese beiden Wendungspuncte immer reell, wenn der Dop-

pelpunct ein isolirter Punct ist (die 211. Art). In den beiden bezüglichen Figuren ist die fragliche gerade Linie WW genannt.

Eine Curve der fraglichen Art ohne Doppelpunct zählt unter ihren acht Wendungspuncten immer sechs imaginäre. Indem wir uns nemlich, durch die stetige Umgestaltung einer gegebenen solchen Curve, alle die übrigen, welche dieselbe semicubische Parabel zur osculirenden Asymptote haben, hervorgegangen denken, können die einzigen Uebergänge in Beziehung auf die Realität der Wendungspuncte nur beim gleizeitigen Zusammenfallen von sechs derselben in einem Doppelpuncte Statt finden. Diese zusammenfallenden Wendungspuncte sind aber nothwendig alle sechs imaginär, wenn der Doppelpunct ein isolirter ist, und nur zwei derselben sind reell, wenn zwei reelle Zweige der Curve sich schneiden. Hieraus ergibt sich die obige Behauptung.

304. Betrachten wir endlich noch die cubische Parabel, deren Gleichung die folgende ist:

$$p^3+\lambda q = 0,$$

so kommt:

$$\frac{dU}{dp} = 3p^2, \quad \frac{dU}{dq} = \lambda, \quad \frac{d^2U}{dp^2} = 6p, \quad \frac{d^2U}{dpdq} = 0, \quad \frac{d^2U}{dq^2} = 0,$$

wonach die Gleichung (5), mit Hinweglassung des constanten Factors $6\lambda^2$, einfach die folgende ist:

$$p = 0.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie schneidet die Curve in einem einzigen Puncte, weil die beiden andern Durchschnittspuncte unendlich weit liegen. Die cubische Parabel hat also auch nur einen einzigen reellen Wendungspunct, der nicht unendlich weit liegt; sie hat keine imaginären Wendungspuncte.

§. 7.

Discussion der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung unter der Form $pqr+\mu s^2 = 0$.

305. Wir haben im ersten Paragraphen dieses Abschnittes nachgewiesen, dafs sich die allgemeine Gleichung des dritten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen, Ausnahmsfälle abgerechnet, immer, indem wir die bisherige Bezeichnung beibehalten, auf die Form:

$$pqr+\mu s = 0,$$

bringen läfst. Die allgemeinen Eigenschaften der Curven dritter Ordnung lassen sich also alle aus dieser Form herleiten, und dann, mit den gehörigen Modificationen, sei es durch algebraische Entwicklungen, sei es durch Gränz-Betrachtungen in der Construction selbst, auch auf diejenigen besondern Fälle, welche jene allgemeine Form nicht umschliefst, übertragen.

Im Allgemeinen können wir, bei gleichen Restrictionen, für die allgemeine Gleichung des dritten Grades jede beliebige Form nehmen, welche zu diesem Grade ansteigt, und neun von einander unabhängige Constante enthält, und dieselbe alsdann auf die eben angedeutete Weise behandeln. Ich wähle für diesen Paragraphen die folgende Form mit neun Constanten:

$$pqr+\mu s^2 = 0, \qquad (1)$$

welche sich von der bisher behandelten blofs dadurch unterscheidet, dafs, statt der linearen Function s, das Quadrat derselben vorkommt. Den vier linearen und ganzen Functio-

nen p, q, r und s entsprechen, wie bisher, vier gerade Linien: diese Linien stehen aber zu der durch (1) dargestellten Curve in einer neuen geometrischen Beziehung, welche sich sogleich aus der Form der vorstehenden Gleichung ergibt. Wir können nemlich diese Gleichung auf dreimalige Weise befriedigen, indem wir

$$\begin{aligned} p &= 0, \quad \text{und zugleich} \quad s^2 = 0, \\ q &= 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad s^2 = 0, \\ r &= 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad s^2 = 0, \end{aligned}$$

setzen. Wir sehen hieraus erstens, dafs jede der drei geraden Linien:

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \tag{2}$$

die Curve dritter Ordnung nur in zwei Puncten schneidet, zweitens, dafs diese beiden Durchschnittspuncte in einen einzigen Punct zusammenfallen, und drittens, dafs die gerade Linie:

$$s = 0, \tag{3}$$

durch diesen Punct geht. Zuvörderst folgt hieraus, dafs der dritte Durchschnittspunct jeder der drei geraden Linien (2) mit der Curve unendlich weit liegt, und diese Linien also den drei Asymptoten der Curve parallel sind; ferner ergibt sich, dafs diese drei geraden Linien (2) die Curve dritter Ordnung berühren, und endlich, dafs die drei Berührungspuncte auf der geraden Linie (3) liegen.

306. Da die Gleichung (1) die allgemeine Gleichung der Curven dritter Ordnung ist, so folgt, dafs, wenn irgend eine solche Curve gegeben ist, die Berührungspuncte auf drei, den drei Asymptoten derselben parallelen Tangenten in gerader Linie liegen. Ob es aber ein einziges System solcher drei Tangenten, oder ob es mehrere gibt, hängt, analytisch genommen, davon ab, ob man der Gleichung der gegebenen Curve nur auf eine einzige oder auf mehrfache Weise die Form der Gleichung (1) geben kann. Die Antwort auf die eine dieser beiden Fragen ist zugleich die Antwort auf die andere. Wir erhalten dieselbe durch eine einfache Betrachtung, die im Grunde nur die Umkehrung der Entwicklungen der vorigen Nummer ist. Wir können nemlich leicht zeigen, dafs, wenn wir irgend zwei Tangenten an eine gegebene Curve dritter Ordnung, parallel mit irgend zwei ihrer drei Asymptoten legen, und durch die Berührungspuncte auf diesen beiden Tangenten eine gerade Linie ziehen, diese die gegebene Curve zum dritten Male so schneidet, dafs die Tangente der Curve in diesem Durchschnittspuncte der dritten Asymptote parallel ist. Wenn nemlich $p = 0$ und $q = 0$ die Gleichungen irgend zweier Tangenten sind, welche zweien beliebigen Asymptoten der gegebenen Curve dritter Ordnung parallel sind, und die Gleichung $s = 0$ diejenige gerade Linie darstellt, welche durch die Berührungspuncte auf diesen beiden Tangenten geht, so mufs nothwendig die Gleichung der Curve folgende Form annehmen können:

$$pqg + \mu s^2 = 0,$$

damit dieselbe, wenn p und q gleich Null gesetzt werden, sich auf s^2 reducire. In dieser Form mufs μ ein constanter Coefficient und der als unbekannt eingeführte Factor g eine lineare Function sein. Da nun aber die vorstehende Gleichung ebenfalls $s^2 = 0$ gibt, wenn wir g gleich Null setzen, so folgt unmittelbar, dafs auch die Gleichung:

$$g = 0,$$

eine solche Tangente der gegebenen Curve darstellt, die einer Asymptote derselben und zwar nothwendig der dritten parallel ist.

Da sich, nach der 281. Nummer, an eine gegebene Curve dritter Ordnung, parallel mit jeder ihrer Asymptoten, vier Tangenten an die Curve legen, und hiernach die Berührungspuncte, auf den vier Tangenten, die einer Asymptote parallel sind, mit den Be-

rührungspuncten auf den vier einer beliebigen zweiten Asymptoten parallelen Tangenten durch sechszehn verschiedene gerade Linien verbinden lassen, so findet die eben discutirte Construction eben so oft ihre Anwendung, und eben so oft können wir, im Allgemeinen, der Gleichung einer gegebenen Curve dritter Ordnung auf verschiedene Weise die Form (1) geben. Hiernach erhalten wir den folgenden Satz als vollständige Deutung der Form der Gleichung (1).

Wenn eine Curve dritter Ordnung gegeben ist, so kann man an dieselbe parallel mit jeder ihrer drei Asymptoten, im Allgemeinen, vier Tangenten legen, so dafs man im Ganzen zwölf Tangenten erhält. Die zwölf Berührungspuncte auf diesen Tangenten liegen zu drei auf sechszehn verschiedenen geraden Linien, in der Art, dafs durch jeden Berührungspunct vier dieser geraden Linien gehen.

Da wir im Ganzen 64 verschiedene Mal solche drei Tangenten zusammenstellen können, welche den drei Asymptoten parallel sind, so gibt es solcher Zusammenstellungen aufser den 16, bei welchen die Berührungspuncte auf den drei Tangenten in gerader Linie liegen, noch 48. In jeder dieser 48 Zusammenstellungen tritt der schon in der 67. Nummer erwähnte Fall ein, dafs in dem von den jedesmaligen drei Tangenten gebildeten Dreiecke diejenigen drei geraden Linien, welche die Winkelpuncte mit den Berührungspuncten auf den gegenüberliegenden Seiten verbinden, in demselben Puncte sich schneiden.

307. Die Discussion des vorstehenden Satzes gibt neue Aufschlüsse über die Natur der Curven dritter Ordnung. Wir wollen mit einiger Ausführlichkeit hierbei verweilen.

Es können diejenigen Tangenten einer Curve dritter Ordnung, welche einer beliebigen ihrer Asymptoten parallel sind, entweder alle vier reell, oder zwei reell und zwei imaginär, oder endlich alle vier imaginär sein. Aber für jede der drei Asymptoten kann nicht zugleich, ohne dafs dabei auf die beiden andern Rücksicht genommen wird, einer der drei möglichen Fälle willkührlich vorausgesetzt werden. Der Fall, dafs die jeder der drei Asymptoten einer Curve dritter Ordnung parallelen Tangenten alle vier reell sind, und den wir als den Normalfall betrachten wollen, kann wirklich Statt finden. Wenn nemlich die Curve (die 1. Art zum Beispiel) ein zugeordnetes und abgesondertes Oval hat, so sind offenbar zwei (reelle) Tangenten dieses Ovals jeder der drei Asymptoten parallel. Wenn wir nachweisen, dafs aufserdem noch eine reelle Tangente einer der Asymptoten parallel ist, so ist dadurch zugleich dargethan, dafs derselben Asymptote auch noch eine vierte Tangente parallel ist. Diese Nachweisung liegt aber im vorliegenden Falle für jede Asymptote vor Augen, sei es, dafs wir einen solchen Zweig betrachten, der einer der Asymptoten sich annähert, nachdem er sie zuvor geschnitten und der offenbar eine dieser Asymptote parallele Tangente hat, oder sei es, dafs wir den jedesmal vorhandenen hyperbelartigen Zweig betrachten, welcher ganz in einem von zwei Asymptoten gebildeten Winkel liegt, und nothwendig eine der dritten Asymptote parallele Tangente hat. In dem fraglichen Normalfalle liefert hiernach der allgemeine Satz eine sechszehnfache Construction dreier reellen, in gerader Linie liegenden, Puncte.

308. In dem Normalfalle der vorigen Nummer ist die gerade Linie: $s = 0$, bei einer sechszehnfachen Bestimmung jedesmal eine reelle, und jedesmal sind auch ihre drei Durchschnitte mit der Curve reell. Kann aber überhaupt die Linie: $s = 0$, reell sein und die Curve in solchen drei Puncten schneiden, von welchen zwei imaginär sind? Wir erhalten auf diese Frage eine verneinende Antwort. Wenn nemlich zwei der drei, den drei

Asym-

Asymptoten parallelen, Tangenten imaginär sind, so wird in der bezüglichen Gleichung der Curve dritter Ordnung von der Form (1) das Product pqr imaginär, folglich mufs auch, weil die Curve reell ist, damit das Imaginäre sich aufhebe, μs^2 imaginär sein, folglich auch s^2 und endlich s.

Eine imaginäre gerade Linie kann eine gegebene Curve in einem reellen Puncte, aber nur in einem einzigen, schneiden. Es bringt dieſs mit sich, dafs durch denselben Punct auch die, mit jener imaginären geraden Linie zusammengehörige, gerade Linie geht, so dafs die beiden imaginären geraden Linien durch Gleichungen von folgender Form:

$$s' + s''\sqrt{-1} = 0, \qquad s' - s''\sqrt{-1} = 0,$$

dargestellt werden, und ihr auf der Curve liegender Durchschnitt zugleich der Durchschnitt zweier reellen geraden Linien ist, deren Gleichungen die folgenden sind:

$$s' = 0, \qquad s'' = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind auf einzige Weise durch eine der beiden imaginären geraden Linien bestimmt, und deshalb kann diese die gegebene Curve höchstens in einem einzigen Puncte schneiden.

Da wir auf diese Weise also dargethan haben, dafs die Linie $s = 0$, wenn sie reell ist, die Curve (1) nothwendig in drei reellen Puncten schneidet, und, wenn sie imaginär ist, dieselbe nicht in mehr als einem einzigen reellen Puncte schneiden kann, so ergibt sich leicht die Unmöglichkeit der folgenden Voraussetzungen. Es können nicht

1) zweien Asymptoten vier reelle Tangenten und der dritten zwei,
2) zweien Asymptoten vier reelle Tangenten und der dritten keine,
3) einer Asymptote vier reelle Tangenten und jeder der beiden übrigen zwei,
4) einer Asymptote vier reelle Tangenten, einer andern zwei und der dritten keine,
5) zweien Asymptoten zwei reelle Tangenten und der dritten keine

parallel sein.

Die allgemeinste Form, welche wir, für den Fall dreier reellen Asymptoten, der Gleichung (1) überhaupt beilegen können, ist die folgende:

$$(p' + \pi\sqrt{-1})(q' + \varkappa\sqrt{-1})(r' + \varrho\sqrt{-1}) + (\mu' + \mu''\sqrt{-1})(s' + s''\sqrt{-1})^2 = 0, \quad (4)$$

und geht, wenn wir, der Kürze halber,

$$(\mu' + \mu''\sqrt{-1})(s' + s''\sqrt{-1})^2 \equiv S' + S''\sqrt{-1},$$

setzen, in die folgende über:

$$(p' + \pi\sqrt{-1})(q' + \varkappa\sqrt{-1})(r' + \varrho\sqrt{-1}) + S' + S''\sqrt{-1} = 0.$$

Es bedeuten hierbei p', q', r', s' und s'' reelle lineare Functionen (die drei ersten derselben stellen, wenn wir sie gleich Null setzen, drei den Asymptoten parallele gerade Linien dar) und π, $\varkappa$, ϱ, μ' und μ'' constante Coefficienten. Damit aus der vorstehenden Gleichung, nach ihrer Entwicklung, das Imaginäre verschwinde, ist, weil sie zugleich vom dritten Grade bleiben mufs, unumgänglich nothwendig, dafs der Ausdruck:

$$\varrho p'q' + \varkappa p'r' + \pi q'r' - \pi\varkappa\varrho + S'', \quad (5)$$

identisch gleich Null werde, und dann reducirt sich die fragliche Gleichung auf:

$$p'q'r' - (\varkappa\varrho p' + \pi\varrho q' + \pi\varkappa r') + S' = 0. \quad (6)$$

Wenn ferner die Gleichung (1) die Form der Gleichung (4) annehmen kann, so kann sie zugleich auch folgende Form annehmen:

$$(p' - \pi\sqrt{-1})(q' - \varkappa\sqrt{-1})(r' - \varrho\sqrt{-1}) + (\mu' - \mu''\sqrt{-1})(s' - s''\sqrt{-1})^2 = 0, \quad (7)$$

oder, da alsdann

$$(\mu' - \mu''\sqrt{-1})(s' - s''\sqrt{-1})^2 \equiv S' - S''\sqrt{-1},$$

auch die folgende:

$$(p' - \pi\sqrt{-1})(q' - \varkappa\sqrt{-1})(r' - \varrho\sqrt{-1}) + S' - S''\sqrt{-1} = 0.$$

Und diese Gleichung reducirt sich, wenn wir berücksichtigen, dafs der Ausdruck bei (5) identisch gleich Null ist, wiederum auf die Gleichung (6); so dafs also die Gleichungen (4) und (7), beide von derselben Form, beide dieselbe Curve dritter Ordnung darstellen.

Man überzeugt sich sogleich, dafs durch die Gleichung: $S'' = 0$, ein System von zwei geraden Linien dargestellt wird, deren Durchschnittspunct derselbe ist, als der Durchschnittspunct der beiden imaginären Linien S:

$$s' + s''\sqrt{-1} = 0, \qquad s' - s''\sqrt{-1} = 0, \tag{8}$$

oder, was dasselbe heifst, der beiden reellen geraden Linien:

$$s' = 0, \qquad s'' = 0,$$

Da der Ausdruck (5) identisch gleich Null wird, so stellt die Gleichung

$$\varrho p'q' + \varkappa p'r' + \pi q'r' - \pi\varkappa\varrho = 0, \tag{9}$$

eben dasselbe Linien-System dar. Wenn wir in dieser letzten Gleichung das constante Glied $\pi\varkappa\varrho$ vernachlässigen, so stellt dieselbe, im Allgemeinen, einen Kegelschnitt dar, welcher durch die drei Durchschnittspuncte je zweier der drei geraden Linien:

$$p' = 0, \qquad q' = 0, \qquad r' = 0 \tag{10}$$

geht, und diesem Kegelschnitte ist der durch die vorstehende Gleichung dargestellte ähnlich. Soll dieser in ein System von zwei geraden Linien übergehen, so mufs es der eben bezeichnete also auch, und dieis setzt voraus, dafs eine der beiden, diesen Kegelschnitt vertretenden, geraden Linien eine der drei Linien (10), und die andere irgend eine solche ist, die durch den Durchschnitt der beiden übrigen dieser drei Linien geht. Hierdurch wird bedingt, dafs einer der drei unbestimmten Coefficienten π, $\varkappa$ und ϱ verschwinde; setzen wir etwa $\varrho = 0$, so geht die Gleichung (9) in die folgende über:

$$(\varkappa p' + \pi q')r' = 0.$$

Es schneiden sich hiernach die beiden Linien S, welche durch die Gleichungen (8) dargestellt werden, in Uebereinstimmung mit dem Frühern auf der Tangente $r' = 0$.

Wir sind also zu dem Schlusse gekommen, dafs die Gleichungen (4) und (7) in ihrer allgemeinen Form unstatthaft sind, und dafs sich diese Form nothwendig auf folgende Weise particularisirt:

$$(p' \pm \pi\sqrt{-1})(q' \pm \varkappa\sqrt{-1})r' + (\mu' \pm \mu''\sqrt{-1})(s' \pm s''\sqrt{-1})^2 = 0.$$

Früher haben wir gezeigt, dafs, in dem Falle dreier reellen Asymptoten, wenn die die Linie S reell ist, diese Linie die Curve immer in drei reellen Puncten schneidet; jetzt sehen wir, dafs, wenn die Linie S imaginär ist, sie der Curve immer in einem einzigen reellen Puncte begegnet, und dafs durch diesen Punct alsdann eine zweite solche gerade Linie geht. Da hiernach die in gerader Linie liegenden drei Berührungspuncte auf drei den Asymptoten parallelen Tangenten einer Curve dritter Ordnung nicht alle drei imaginär sein können, so ist, neben der Unmöglichkeit der oben schon ausgeschlossenen fünf Fälle, auch noch die Unmöglichkeit der folgenden beiden dargethan. Es können

6) die jeder der drei Asymptoten parallelen Tangenten nicht alle vier imaginär, noch

7) blofs zwei, einer einzigen der drei Asymptoten parallelen, Tangenten reell sein.

Als mögliche Fälle bleiben uns hiernach blofs drei übrig. Es können

1) jeder der drei Asymptoten vier,
2) jeder derselben zwei, oder endlich
3) einer derselben vier und den beiden übrigen Asymptoten keine Tangenten parallel sein.

309. Um die Uebersicht der vollständigen Construction des Satzes der 306. Nummer zu erleichtern, wollen wir die vier Berührungspuncte auf den vier jeder der drei Asymptoten parallelen Tangenten auf die nachstehende Weise bezeichnen:

$$P_1, P_2, P_3, P_4; \qquad Q_1, Q_2, Q_3, Q_4; \qquad R_1, R_2, R_3, R_4.$$

Alsdann erhalten wir folgendes Schema zur Bestimmung derjenigen sechszehn geraden Linien, von denen jede drei dieser zwölf Berührungspuncte verbindet:

$P_1Q_1R_1$,	$P_3Q_3R_1$,	$P_2Q_3R_3$,	$P_3Q_2R_3$,
$P_1Q_2R_2$,	$P_3Q_4R_2$,	$P_1Q_3R_4$,	$P_3Q_1R_4$,
$P_2Q_1R_2$,	$P_4Q_3R_2$,	$P_1Q_4R_3$,	$P_4Q_1R_3$,
$P_2Q_2R_1$,	$P_4Q_4R_1$,	$P_2Q_4R_4$,	$P_4Q_2R_4$.

In diesem Schema ist die Bezeichnung der Berührungspuncte auf den, zweien Asymptoten parallelen, Tangenten willkührlich; sobald diese Bezeichnung aber einmal feststeht, ist die Bezeichnung der Berührungspuncte auf den, der dritten Asymptote parallelen, Tangenten eine vollkommen bestimmte. R_1, R_2, R_3 und R_4 sind zum Beispiel diejenigen Berührungspuncte, welche etwa bezüglich mit P_1 und Q_1, P_1 und Q_2, P_1 und Q_4 und P_1 und Q_3 in gerader Linie liegen, während wir die letztgenannten Puncte in beliebiger Ordnung nehmen können.

Wenn wir voraussetzen, dafs in dem zweiten der drei möglichen Fälle (308) etwa die drei Punctenpaare P_3 und P_4, Q_3 und Q_4, R_3 und R_4 imaginär sind, so zeigt das vorstehende Schema, dafs alsdann von den sechszehn Linien S nur vier reell sind. Diese Linien entsprechen der ersten Vertical-Columne des obigen Schemas, und bilden eine vollständige vierseitige Figur, deren sechs Winkelpuncte die sechs reellen Berührungspuncte P_1 und P_2, Q_1 und Q_2, R_1 und R_2 sind.

In dem Falle, dafs alle zwölf Berührungspuncte reell sind, lassen sich auf vierfache Weise sechs derselben so auswählen, dafs dieselben die sechs Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur sind. Dieser vierfachen Zusammenstellung entsprechen alsdann die vier Vertical-Columnen des Schemas.

310. Wenn eine Curve dritter Ordnung einen Doppelpunct hat, so reducirt sich die Zahl derjenigen Tangenten desselben, die irgend einer gegebenen geraden Linie und insbesondere einer Asymptote derselben parallel sind, im Allgemeinen um zwei Einheiten, indem wir die beiden Tangenten, welche in eine durch den Doppelpunct gehende gerade Linie zusammenfallen, nicht mehr als Tangenten betrachten (282). Denkt man sich zum Beispiel, dafs eine Curve mit einem zugeordneten Ovale, welche vier jeder Asymptote parallele Tangenten hat, allmälig sich so umgestaltet, dafs das Oval in einen zugeordneten Punct übergeht und dann imaginär wird *), so nähern sich zwei jener vier, jeder der drei Asymptoten parallelen, Tangenten einander immer mehr, fallen zusammen, indem sie aufhören, im engern Sinne des Wortes Tangenten zu sein, und werden dann imaginär. Hat eine Curve dritter Ordnung folglich einen isolirten Punct, so sind jeder ihrer Asymptoten

*) Eine solche Umgestaltung der Curve entspricht zum Beispiel, wenn wir dieselbe durch die Gleichung:

$$pqr + \mu s = 0,$$

darstellen, einer verschiedenen Annahme des constanten Coefficienten μ.

zwei reelle Tangenten parallel, und der allgemeine Satz der 306. Nummer liefert hier also nur viermal drei Puncte, die in gerader Linie liegen. Wenn wir das allgemeine Schema der vorigen Nummer auf den vorliegenden Fall anwenden wollen, so ist klar, dafs sechs der zwölf Berührungspuncte, für die wir P_3 und P_4, Q_3 und Q_4, R_3 und R_4 nehmen können, in dem isolirten Puncte zusammenfallen, wonach die geometrische Bedeutung der letzten drei Vertical-Columnen wegfällt, und nur die erste derselben viermal drei Puncte, die in gerader Linie liegen, ohne dafs sie zusammenfallen, anzeigen.

Wenn wir überhaupt eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpuncte als Uebergangs-Curve zwischen zweien andern Curven dieser Ordnung betrachten, so hat die eine dieser beiden Curven zwei mit jeder ihrer Asymptoten parallele Tangenten, und die andere entweder vier jeder oder nur vier einer einzigen Asymptote parallele Tangenten. Dafs diese beiden Fälle die beiden einzig möglichen sind, sehen wir sogleich, wenn wir erwägen, dafs die Anzahl der Tangenten der einen Curve die jeder ihrer Asymptoten parallel sind, die Anzahl der dieser Asymptote parallelen Tangenten der andern Curve nothwendig um zwei Einheiten übersteigt oder um zwei Einheiten geringer ist, als diese, und zugleich die Beschränkungen über die mögliche Anzahl der den drei Asymptoten parallelen reellen Tangenten berücksichtigen (308). Der erste Fall tritt nicht nur dann ein, wenn die Uebergangs-Curve einen isolirten Punct hat, sondern auch dann, wenn sie eine Schleife bildet; in dem zweiten Falle schneiden sich zwei Zweige der Curve, ohne eine Schleife zu bilden. In dem ersten Falle hat die Curve mit dem Doppelpuncte jedesmal zwei jeder ihrer Asymptoten parallele Tangenten, in dem zweiten Falle hat sie nur zwei einer einzigen Asymptote parallele Tangenten.

Wenn ein Curve dritter Ordnung einen Rückkehrpunct hat, so reducirt sich die Anzahl der jeder ihrer drei Asymptoten parallelen Tangenten auf Eins, weil drei Tangenten, die alsdann im eigentlichen Sinne keine Tangenten mehr sind, in derjenigen durch den Rückkehrpunct gehenden geraden Linie, welche dieselbe Richtung hat, zusammenfallen (282). Die Berührungspuncte auf den drei einzigen den drei Asymptoten parallelen Tangenten liegen in gerader Linie.

311. Wenn eine der drei Asymptoten der Curve dritter Ordnung, etwa die erste, eine osculirende ist, so fällt eine der vier ihr parallelen Tangenten mit ihr zusammen, und einer der vier durch P_1, P_2, P_3 und P_4 bezeichneten Berührungspuncte liegt auf ihr unendlich weit. Dieser unendlich weit entfernt liegende Berührungspunct sei P_1, alsdann sind die folgenden vier, der im allgemeinen Schema bezeichneten, geraden Linien:

$$P_1Q_1R_1, \qquad P_1Q_2R_2, \qquad P_1Q_3R_4, \qquad P_1Q_4R_3,$$

unter einander und mit der osculirenden Asymptote parallel. Ueberdiefs liegen in diesem Falle, nach der 281. Nummer, die Puncte P_2, P_3 und P_4 alle drei auf derjenigen geraden Linie, welche durch den Durchschnitt der beiden nicht osculirenden Asymptoten geht und das von diesen auf der osculirenden Asymptote interceptirte Segment halbirt. Die weitere Discussion dieses Falles ist der des allgemeinen ganz analog.

Wenn die Asymptoten der Curve alle drei osculirende sind, so liegen drei der zwölf Berührungspuncte auf den drei Asymptoten unendlich weit und sind aus diesem Grunde als in gerader Linie liegend anzusehen. Wir wollen P_1, Q_1 und R_1 für diese drei Puncte nehmen. Von den sechszehn geraden Linien des allgemeinen Falles liegt also eine unendlich weit, es sind drei derselben jeder der drei Asymptoten parallel, und man erhält nur noch die folgenden sechs geraden Linien, von welchen jede durch solche drei Berührungspuncte geht, deren keiner unendlich weit liegt:

$$P_3Q_4R_2, \qquad P_2Q_3R_3, \qquad P_3Q_2R_3,$$
$$P_4Q_3R_2, \qquad P_2Q_4R_4, \qquad P_4Q_2R_4.$$

Ueberdiefs liegen die durch gleichnamige Symbole bezeichneten Puncte: P_2, P_3, P_4, Q_2, Q_3, Q_4 und R_2, R_3, R_4 auf denjenigen drei geraden Linien, welche die drei Winkelpuncte des, von den drei Asymptoten gebildeten, Dreiecks mit den Mitten auf den gegenüberliegenden Seiten desselben verbinden.

312. Wir wollen uns nun zur Betrachtung des Falles, dafs zwei Asymptoten der Curve dritter Ordnung imaginär sind, wenden. Zwischen den vier imaginären Tangenten, welche einer der beiden imaginären Asymptoten parallel sind, und den vier der andern imaginären Asymptote parallelen Tangenten, besteht alsdann eine solche Abhängigkeit, dafs, wenn wir jene durch die Gleichungen:

$$q_1+r_1\sqrt{-1}=0, \qquad q_2+r_2\sqrt{-1}=0, \qquad q_3+r_3\sqrt{-1}=0, \qquad q_4+r_4\sqrt{-1}=0,$$

darstellen, wir für die Gleichungen von diesen die folgenden erhalten:

$$q_1-r_1\sqrt{-1}=0, \qquad q_2-r_2\sqrt{-1}=0, \qquad q_3-r_3\sqrt{-1}=0, \qquad q_4-r_4\sqrt{-1}=0.$$

Hiernach ergeben sich die folgenden beiden Formen für die Gleichung der Curve:

$$(p'+\pi\sqrt{-1})\,(q_1+r_1\sqrt{-1})\,(q_1-r_1\sqrt{-1})+S_1+S_2\sqrt{-1}=0, \qquad (11)$$

$$(p'+\pi\sqrt{-1})\,(q_1+r_1\sqrt{-1})\,(q_2-r_2\sqrt{-1})+S_1+S_2\sqrt{-1}=0. \qquad (12)$$

Die erste dieser beiden Formen reducirt sich auf:

$$(p'+\pi\sqrt{-1})(p_1^2+r_1^2)+S_1+S_2\sqrt{-1}=0,$$

und verlangt, dafs

$$\pi(q_1^2+r_1^2)+S_2\equiv 0.$$

Diese identische Bedingungs-Gleichung ist unstatthaft, weil sie aussagt, dafs zwei imaginäre Linien S mit zwei den beiden imaginären Asymptoten parallelen Tangenten zusammenfallen. Die Linie S ist hiernach im vorliegenden Falle nothwendig reell, wonach die Form der Gleichung (11) auf folgende Weise sich particularisirt:

$$p'(q_1^2+r_1^2)+\mu s^2=0. \qquad (13)$$

Wir ziehen hieraus den Schlufs, dafs immer vier der sechszehn geraden Linien S reell sind. Die übrigen zwölf sind nothwendig imaginär. Diesen entspricht die Form der Gleichung (12), wobei ein doppelter möglicher Fall zu unterscheiden ist: es schneidet die Linie S die Curve entweder in drei Puncten, die alle drei imaginär sind, oder von welchen einer reell ist; im ersten Falle ist die bezügliche, der reellen Asymptote parallele, Tangente imaginär, im zweiten Falle reell.

Weil die Gleichung der Curve sich immer auf die Form (13) bringen läfst, können die der reellen Asymptote parallelen Tangenten nicht alle vier imaginär sein. Es sind ihr also entweder vier reelle Tangenten oder zwei parallel. In dem Falle vier reeller Tangenten schneidet jede der zwölf imaginären Linien S die Curve in einem der reellen Berührungspuncte auf diesen Tangenten. In dem Falle zweier reellen Tangenten schneiden nur vier der zwölf imaginären Linien S die Curve in einem reellen Puncte. Wir finden diefs leicht durch das allgemeine Schema der 309. Nummer bestätigt. Denn bezeichnen wir, nach der obigen Aufeinanderfolge der den beiden imaginären Asymptoten parallelen Tangenten, die Berührungspuncte auf denselben durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 und R_1, R_2, R_3, R_4, so sind P_1 und P_2 immer zwei reelle Berührungspuncte; in jedem derselben schneiden sich zwei der vier reellen Linien S. Diesen entspricht:

$$P_1Q_1R_1, \qquad P_1Q_2R_2, \qquad P_2Q_3R_3, \qquad P_2Q_4R_4,$$

während die zwölf imaginären Linien S durch folgende Symbole bezeichnet werden:

$P_1Q_3R_4$, $P_1Q_4R_3$, $P_2Q_1R_2$, $P_2Q_2R_1$,
$P_3Q_3R_1$, $P_3Q_2R_3$, $P_4Q_3R_3$, $P_4Q_1R_3$,
$P_3Q_4R_2$, $P_3Q_1R_4$, $P_4Q_4R_1$, $P_4Q_2R_4$.

In dem Falle, dafs der reellen Asymptote nur zwei reelle Tangenten parallel sind, haben die acht Linien S, die den letzten acht Symbolen entsprechen, keinen rellen Punct mit der Curve gemein.

313. Wir erhalten sogleich diejenigen Modificationen, welche der allgemeine Satz der 306. Nummer in dem Falle, dafs die Curve dritter Ordnung parabolische Asymptoten hat, erleidet. Zwei geradlinige Asymptoten der Curve sind alsdann nämlich als unendlich weit liegend und den Durchmessern der parabolischen Asymptoten parallel anzusehen. Es gibt im Allgemeinen, parallel mit diesen Durchmessern, vier, und parallel mit der nicht unendlich weit entfernten geradlinigen Asymptote, drei Tangenten der Curve. Legt man hiernach eine gerade Linie durch den Berührungspunct auf einer der letztgenannten drei Tangenten und durch den Berührungspunct auf einer der erstgenannten vier Tangenten, so schneidet diese gerade Linie die Curve noch in einem dritten Puncte, und dieser ist der Berührungspunct auf einer zweiten der fraglichen vier Tangenten. Hiernach erhalten wir den nachstehenden Satz:

Die Berührungspuncte auf denjenigen vier Tangenten einer Curve dritter Ordnung mit parabolischen Asymptoten, welche der Durchmesser-Richtung dieser Asymptoten parallel sind, bilden ein Viereck, dessen Diagonalen und gegenüberliegenden Seiten sich in den drei Berührungspuncten auf denjenigen Tangenten der Curven, welche der geradlinigen Asymptote parallel sind, schneiden.

Die Gleichung (1) nimmt für den vorliegenden Fall die folgende Form an:

$$p(q^2 - x^2) + \mu s^2 = 0. \qquad (14)$$

Die Geltung dieser Form rechtfertigt die obige Uebertragung des allgemeinen Satzes.

Aehnlich wie bei den bisher betrachteten beiden Haupt-Classen von Curven dritter Ordnung erhalten wir auch bei Curven dritter Ordnung mit parabolischen Asymptoten drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Es können erstens die drei der geradlinigen Asymptote und die vier der Durchmesser-Richtung parallelen Tangenten der Curve reell sein, was dann der Fall ist, wenn diese ein zugeordnetes Oval hat (die 159. Art). Die Form der Gleichung (14) besteht alsdann auf sechsmalige reelle Weise.

Es können zweitens die der geradlinigen Asymptote parallelen Tangenten, alle drei, reell und die der Durchmesser-Richtung parallelen, alle vier, imaginär sein. Alsdann sind von den sechs Linien S nur zwei reell, und diesen entspricht die Form:

$$p(q^2 + x^2) + \mu s^2 = 0. \qquad (15)$$

Die vier übrigen Linien S sind imaginär, und jedem Paare derselben entspricht eine Gleichung von folgender Form:

$$p(q + x_1 \pm x_2\sqrt{-1})(q + x'_1 \pm x'_2\sqrt{-1}) + (\mu_1 \pm \mu_2\sqrt{-1})(s_1 \pm s_2\sqrt{-1})^2 = 0.$$

Es können drittens eine der geradlinigen Asymptote und zwei der Durchmesser-Richtung parallele Tangenten reell sein. Alsdann sind von den sechs Linien S wiederum nur zwei reell, auf einer derselben liegen die drei reellen Berührungspuncte, die andere derselben geht durch den Berührungspunct auf derjenigen reellen Tangente, welche der geradlinigen Asymptote parallel ist. Diesen beiden reellen Linien S entsprechen die beiden Formen (14) und (15). Die vier übrigen Linien S sind imaginär, und schneiden sich, paarweise, in den beiden Berührungspuncten auf den beiden reellen, der Durchmes-

ser-Richtung parallelen, Tangenten; jedem Paare dieser Linien entspricht eine Gleichung von folgender imaginären Form:

$$(p \pm \pi\sqrt{-1})\, q(q + \varkappa_1 \pm \varkappa_2\sqrt{-1}) + (\mu_1 \pm \mu_2\sqrt{-1})(s_1 \pm s_2\sqrt{-1})^2 = 0.$$

Wenn eine Curve dritter Ordnung mit parabolischen Asymptoten einen Doppelpunct hat, so erhalten wir Particularisationen, die den frühern ähnlich sind. Wenn sie einen conjugirten isolirten Punct hat (die 160. Art), oder wenn sie eine Schleife bildet (die 170. Art), so behält sie, im engern Sinne des Wortes, nur noch eine der geradlinigen Asymptote, und zwei der Durchmesser-Richtung parallele Tangenten. Die Berührungspuncte auf diesen drei Tangenten liegen in gerader Linie.

Wenn die geradlinige Asymptote der Curve eine osculirende ist, so bilden die Berührungspuncte auf den vier der Durchmesser-Richtung parallelen Tangenten ein Parallel-Trapez, dessen parallele Seiten der geradlinigen Asymptote parallel sind. Es schneiden sich ferner die beiden übrigen Seiten dieses Trapezes in dem einen und die beiden Diagonalen desselben in dem andern Berührungspuncte auf den beiden der geradlinigen Asymptote parallelen Tangenten.

314. Die Gleichung (1) behält ihre geometrische Bedeutsamkeit endlich auch in dem Falle noch, dafs wir sie auf folgende Weise particularisiren:

$$p(p + \varkappa)(p + \varkappa') + \mu s^2 = 0.$$

Indem wir alsdann $p + \frac{1}{3}(\varkappa + \varkappa') \equiv p'$ setzen und durch λ und γ gehörig zu bestimmende Constante bezeichnen, können wir diese Gleichung auch folgendergestalt schreiben:

$$p'^3 + \mu s^2 + \lambda(p' + \gamma) = 0,$$

woraus wir sehen, dafs im vorliegenden Falle die Curve dritter Ordnung semicubische Parabeln zu ihren Asymptoten hat. Aus der ursprünglich angenommenen Form tritt also in Evidenz, dafs die Curve alsdann drei solche parallele Tangenten hat, auf welchen die Berührungspuncte in gerader Linie, und zwar auf der Tangente im Rückkehrpuncte ihrer osculirenden semicubi-parabolischen Asymptote liegt.

Wenn die Curve dritter Ordnung insbesondere entweder erstens zwei parallele Tangenten hat, oder zweitens eine Trident-Curve, oder drittens eine cubische Parabel ist, so verliert die Form der Gleichung (1) ihre geometrische Bedeutung.

315. Wir können die Gleichung (1) auch unter der folgenden Form schreiben:

$$\frac{pqr}{s^2} = \mu,$$

und dann den ersten Theil dieser Gleichung, der für alle Puncte der Curve constant bleibt, leicht geometrisch construiren. Indem wir μ als eine unbestimmte Constante ansehen, können wir den vier ganzen und linearen Functionen p, q, r und s insbesondere auch die Bedeutung kürzester Abstände von den vier geraden Linien:

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad s = 0,$$

beilegen, wonach die metrische Relation, welche die vorstehende Gleichung ausdrückt, sogleich sich ergibt. Wir bemerken zugleich, dafs der Werth des Productes pqr von einem Puncte einer gegebenen Curve zum andern sein Zeichen nicht ändern kann; betrachten wir also das von den bezüglichen drei, den Asymptoten parallelen, Tangenten gebildete Dreieck, so liegen alle Puncte der Curve entweder innerhalb des Dreiecks und innerhalb der drei Scheitelwinkel der Innenwinkel dieses Dreiecks, oder es liegen alle Puncte innerhalb der drei von einer Seite des Dreiecks und den Verlängerungen der jedesmaligen beiden andern Seiten gebildeten unendlichen Flächenräume.

316. Während der allgemeine Satz der 306. Nummer, wenn die Curve dritter Ordnung einen Doppelpunct hat, seine geometrische Bedeutsamkeit in Beziehung auf die durch diesen Doppelpunct gehenden, den Asymptoten parallelen und als Tangenten zu betrachtenden, geraden Linien verliert, besteht die metrische Relation der vorigen Nummer auch noch für diesen Fall. Weil alsdann die Linie $s = 0$ durch den Doppelpunct, oder den Durchschnitt zweier, etwa der beiden ersten, der drei den Asymptoten parallelen geraden Linien:

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \tag{1}$$

geht, so können wir die Gleichung (1) auf die folgende Form bringen:

$$pqr + \mu(p + \lambda q)^2 = 0. \tag{2}$$

Die Anzahl der Constanten in dieser Gleichung hat sich auf acht reducirt, weil ihre Form voraussetzt, dafs die bezügliche Curve dritter Ordnung einen Doppelpunct habe. Um die Natur dieses Doppelpunctes näher zu bestimmen, wollen wir, wie früher:

$$p + q + r = \beta,$$

setzen, unter dieser Voraussetzung zweimal nach einander die Gleichung (2) differentiiren und dann $p = 0$, $q = 0$, und also $r = \beta$ nehmen. Auf diesem Wege finden wir sogleich:

$$\left(\frac{dp}{dq}\right)^2 + 2\left(\lambda + \frac{\beta}{2\mu}\right)\frac{dp}{dq} + \lambda^2 = 0:$$

eine Gleichung zweiten Grades in $\frac{dp}{dq}$, durch deren Wurzeln die Richtung der beiden Tangenten im Doppelpuncte der Curve (1) bestimmt wird. Je nachdem die beiden Wurzeln dieser Gleichung reell oder imaginär oder einander gleich sind, d. h. je nachdem der folgende Ausdruck:

$$\frac{\beta}{4\mu^2}(4\lambda\mu + \beta),$$

positiv oder negativ oder gleich Null ist, ist der fragliche Punct ein eigentlicher Doppelpunct, oder ein conjugirter isolirter Punct, oder ein Rückkehrpunct. Der letzte Fall wird also durch eine der folgenden beiden Bedingungs-Gleichungen angezeigt:

$$\beta = 0, \qquad 4\lambda\mu + \beta = 0. \tag{3}$$

Die erste der beiden vorstehenden Bedingungs-Gleichungen fordert, dafs die drei geraden Linien (1) alle drei in demselben Puncte sich schneiden, wonach die Gleichung (2) die folgende Form mit sieben Constanten annimmt:

$$pq(p + \gamma q) + \mu(p + \lambda q)^2 = 0. \tag{4}$$

Die gerade Linie:

$$s \equiv p + \lambda q = 0,$$

fällt alsdann mit der Tangente im Rückkehrpuncte zusammen, weil ihre Durchschnittspuncte mit der Curve alle drei in diesem Puncte sich vereinigen. Wenn eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpuncte gegeben ist, so können wir also, im Allgemeinen, nicht drei durch den Doppelpunct gehende und den drei Asymptoten der Curve parallele gerade Linien für die durch (1) dargestellten nehmen, um alsdann die Curve durch eine Gleichung von folgender Form auszudrücken:

$$pqr + \mu s^3 = 0;$$

wir können dieſs nur in dem besondern Falle, dafs der Doppelpunct ein Rückkehrpunct ist, und dann ist die Tangente der Curve in diesem Puncte die Linie $s = 0$.

Nach der zweiten der beiden Bedingungs-Gleichungen (3) läfst sich die eine der beiden

den Constanten μ und λ durch die andere auf lineare Weise bestimmen, so dafs sich also auch wiederum die Anzahl der Constanten in der Gleichung der Curve auf sieben reducirt. Alsdann gehen die beiden ersten der drei geraden Linien (1) durch den Rückkehrpunct der Curve und sind irgend zweien Asymptoten derselben parallel, während die dritte dieser Linien eine der dritten Asymptote parallele Tangente ist.

317. Die Einfachheit der Gleichung:

$$pqr + \mu s^2 = 0, \qquad (1)$$

bringt, als nothwendige Folge, neue einfache Constructionen einer Curve dritter Ordnung mit sich. Wir wollen diese Constructionen hier indefs mehr andeuten als ausführen.

Wir können die Gleichung (1) durch Einführung einer neuen Constanten λ auf folgende Form bringen:

$$p(qr + \lambda s) + s(\mu s - \lambda p) = 0,$$

und dieselbe alsdann befriedigen, indem wir

$$qr + \lambda s = 0, \quad \text{und zugleich} \quad \mu s - \lambda p = 0, \qquad (2)$$

setzen. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt, was ihre Form zeigt, einen Kegelschnitt dar, dessen Asymptoten zweien Asymptoten der Curve dritter Ordnung parallel sind, und der durch die beiden Berührungspuncte auf den diesen beiden Asymptoten parallelen Tangenten, Q und R, der Curve dritter Ordnung geht. Die zweite der beiden Gleichungen (2) stellt eine solche gerade Linie dar, welche durch den Berührungspunct auf der, der dritten Asymptote parallelen, Tangente P geht. Bei verschiedener Annahme des unbestimmten Coefficienten λ, ändert der fragliche Kegelschnitt seine Form, während die in Rede stehende gerade Linie sich um den festen Berührungspunct auf der Tangente P dreht.

Wenn aufser den drei den Asymptoten der zu construirenden Curve parallelen Tangenten P, Q und R und den drei in gerader Linie S liegenden Berührungspuncten auf denselben, noch irgend ein Punct M der Curve gegeben ist, so ist der Coefficient μ ihrer Gleichung (1), und folglich die Curve selbst, gegeben. Den oben bezeichneten Kegelschnitt können wir durch denselben Punct M legen; dadurch wird der Coefficient λ und somit nicht nur dieser Kegelschnitt selbst, sondern auch diejenige gerade Linie vollkommen bestimmt, welche durch die zweite der Gleichungen (2) dargestellt wird und durch die beiden Durchschnittspuncte des Kegelschnittes und der zu construirenden Curve dritter Ordnung geht. Der Punct M ist einer dieser beiden Durchschnittspuncte. Die fragliche gerade Linie ist dadurch, dafs sie durch diesen Punct und den Berührungspunct auf der Tangente P geht, gegeben. Indem wir also den zweiten Durchschnittspunct dieser geraden Linie und jenes Kegelschnittes construiren, finden wir einen neuen Punct der zu construirenden Curve. Diese Construction läfst sich bekanntlich sehr leicht, auch ohne die Curve zweiter Ordnung selbst zu zeichnen, etwa nach dem, gehörig modificirten, Pascalschen Satze ausführen.

Da wir die Berührungspuncte auf den drei gegebenen Tangenten in beliebiger Ordnung zusammenstellen können, so gibt dieselbe Constructionsweise, im Allgemeinen, ähnlich wie die Constructionen des dritten Paragraphen dieses Abschnittes, beliebig viele Puncte der zu construirenden Curve. Die in Rede stehende Construction einer Curve dritter Ordnung stimmt mit derjenigen einer Curve zweiter Ordnung, wenn drei Puncte derselben und die Richtung ihrer Asymptoten gegeben sind, überein; mit dem einzigen Unterschiede, dafs, während man hier einen neuen Punct der Curve auf jeder beliebigen, durch einen der drei gegebenen Puncte gehenden, geraden Linie erhält, diese gerade Linie

für den Fall einer Curve dritter Ordnung, dadurch eine vollkommen bestimmte wird, dafs sie aufser durch den Punct M auch noch durch einen festen Punct (den Berührungspunct auf der dritten Tangente) gehen mufs. Jeder neue Constructionspunct dieser Curve ist hiernach anzusehen als ein zu bestimmender Punct einer veränderlichen Curve zweiter Ordnung, welche durch zwei feste Puncte geht und deren Asymptoten eine gegebene Richtung haben.

318. Wir können die Gleichung (1) mit Einführung einer neuen Constanten auch auf nachstehende zwiefache Weise schreiben:

$$p(qr+\lambda s^2) - s^2(\lambda p - \mu) = 0,$$
$$(p+\lambda')qr - (\lambda' qr - \mu s^2) = 0.$$

Diese beiden Formen führen, wenn wir $\lambda\lambda' + \mu = 0$ setzen, übereinstimmend zu den beiden Gleichungen:

$$qr+\lambda s^2 = 0, \qquad \lambda p - \mu = 0,$$

durch welche, wenn sie zugleich bestehen, die Gleichung (1) befriedigt wird. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt irgend einen Kegelschnitt dar, welcher die beiden geraden Linien Q und R auf der Linie S, folglich in denselben Puncten berührt, als die Curve dritter Ordnung es thut; die zweite Gleichung stellt eine gerade Linie dar, welche einer Asymptote dieser Curve parallel ist. Die Durchschnitte jenes Kegelschnittes und dieser geraden Linie liegen, bei jeder Annahme der Constanten λ, auf der zu construirenden Curve (1). Sind daher die vier geraden Linien P, Q, R und S und irgend ein Punct M der Curve gegeben, so erhalten wir zunächst drei neue Puncte, die auf drei durch M gehenden geraden Linien liegen, die den drei erstgenannten gegebenen geraden Linien parallel sind, und dann beliebig viele neue Puncte, und zwar nach demselben Verfahren, nach welchem man neue Puncte eines Kegelschnittes erhält, der zwei gegebene gerade Linien in zwei gegebenen Puncten berührt, und überdiefs noch durch einen dritten gegebenen Punct geht.

319. Wir können die allgemeine Gleichung (1), mit Einführung einer neuen Constanten, endlich auch noch auf folgende Weise schreiben:

$$p(qr+\lambda p)+(\mu s^2 - \lambda p^2) = 0,$$

und diese Gleichung befriedigen, indem wir zugleich

$$qr+\lambda p = 0, \qquad \mu s^2 - \lambda p^2 = 0,$$

setzen. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt irgend einen Kegelschnitt dar, welcher die beiden letzten der drei geraden Linien P, Q und R auf der ersten derselben berührt. Die zweite dieser Gleichungen stellt ein System von zwei solchen geraden Linien dar, welche mit den Linien P und S vier Harmonicalen bilden. Jener Kegelschnitt wird von diesen beiden geraden Linien in vier Puncten der zu construirenden Curve (1) geschnitten. Ist einer dieser vier Puncte gegeben, so können wir die drei übrigen finden, jedoch nur einen derselben auf lineare Weise. Es liegt dieser Punct auf derjenigen geraden Linie, welche den gegebenen Punct mit dem Durchschnitte der beiden Linien P und S verbindet, und ist derselbe, welchen die andere Constructionsweise der 217. Nummer schon geliefert hat. Die Construction der beiden übrigen Puncte, welche auf der vierten Harmonicalen zu den Linien P, S und den eben bezeichneten liegen, ist vom zweiten Grade.

§. 8.

Discussion der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung unter der Form $pqr+\mu s^3 = 0$.

320. Indem wir, wie bisher, durch p, q, r und s lineare Functionen und durch μ eine Constante bezeichnen, können wir die Gleichung:

$$pqr+\mu s^3 = 0, \qquad (1)$$

weil sie neun unabhängige Constante enthält, als die allgemeine Gleichung der Curven dritter Ordnung betrachten. Wir erhalten also, indem wir die Form der vorstehenden Gleichung deuten, eine neue allgemeine, characteristische Eigenschaft dieser Curven.

Um die obige Gleichung zu befriedigen, können wir nach einander:

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad (2)$$

und jedesmal zugleich:

$$s^3 = 0,$$

setzen. Wir sehen hieraus, dafs die drei Durchschnitte jeder der durch die drei Gleichungen (2) dargestellten geraden Linien, P, Q und R, in einem und demselben Puncte zusammenfallen. Die drei ausgezeichneten Puncte, welche wir auf diese Weise erhalten, liegen auf einer einzigen geraden Linie S. Die drei geraden Linien (2) sind Tangenten der Curve, die Ordnung der Berührung aber ist eine höhere, sie osculiren die Curve. Wir haben sie Inflexions- oder Wendungs-Tangenten und die Berührungspuncte auf denselben Inflexions- oder Wendungs-Puncte genannt. Die Form der Gleichung (1) schliefst also den folgenden Satz ein:

Die Wendungspuncte einer Curve dritter Ordnung liegen zu drei in gerader Linie.

321. Die Gleichung (1) zeigt, dafs der Ausdruck $\frac{pqr}{s^3}$, wenn wir ihn nach einander auf die verschiedenen Puncte der bezüglichen Curve beziehen, immer denselben Werth behält. Hiernach ergibt sich eine metrische Fundamental-Relation, welche, bei verschiedener Bestimmung der linearen Functionen, unter verschiedener geometrischer Aussage sich darstellt.

Da überdiefs der besagte Ausdruck für jeden Punct der Curve einen Werth mit demselben Zeichen hat, so erhalten wir, wenn die drei Inflexions-Tangenten und die Linie S gegeben sind, Bestimmungen, die denen der 165. Nummer ganz analog sind, über diejenigen von diesen vier geraden Linien gebildeten Flächenräume, in welchen die bezügliche Curve sich erstrecken kann. Insbesondere ergibt sich, dafs die Inflexions-Tangenten die Curve zugleich berühren und schneiden.

322. Die Unvollständigkeit des Satzes der 320. Nummer springt in die Augen; denn es ist ganz unerörtert geblieben, ob wir der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung nur auf eine einzige oder mehrfache Art die Form der Gleichung (1) geben können. Nachdem wir aber in dem 6. Paragraphen die Anzahl der Wendungspuncte der Curven jeder beliebigen, und der dritten Ordnung insbesondere, auf directem Wege bestimmt haben, so können wir leicht den fraglichen Satz vervollständigen.

Eine Curve dritter Ordnung hat im Allgemeinen neun Wendungspuncte. Wenn wir

durch irgend zwei derselben eine gerade Linie legen, so schneidet diese Linie die Curve noch in einem dritten dieser Wendungspuncte. Eben dieſs ist der Satz der 320. Nummer. Es läſst sich also der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung so oft auf verschiedene Weise die Form der Gleichung (1) geben, als aus neun Elementen sich solche Combinationen zu drei bilden lassen, unter denen nicht zwei sich befinden, in denen dieselben beiden Elemente vorkommen *). Wir erhalten hiernach eine zwölffache Zusammenstellung, der, wenn wir die neun Wendungspuncte durch P, Q, R, P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1 und R_2 bezeichnen, das folgende Schema entspricht:

$$\begin{array}{cccccc} & & PQR; & & & \\ & PP_1P_2, & & QQ_1Q_2, & & RR_1R_2; \\ PQ_1R_2, & & PQ_2R_1, & & QP_1R_2, & \\ & QP_2R_1, & & RP_1Q_2, & & RP_2Q_1; \\ & & P_1Q_1R_1, & & & \\ & & P_2Q_2R_2. & & & \end{array}$$

Wir haben in Beziehung darauf, dafs von den neun Wendungspuncten immer drei reell und sechs imaginär sind, hier vier verschiedene Fälle zu unterscheiden. Es geht von den zwölf verschiedenen Linien S, welche den zwölf Gruppen des vorstehenden Schema entsprechen, eine durch die drei reellen Wendungspuncte; jede von dreien dieser Linien verbindet einen der drei reellen Wendungspuncte und eines der drei Paare zusammengehöriger imaginärer Wendungspuncte. Die übrigen acht Linien S sind imaginär, nur mit dem Unterschiede, dafs sechs derselben sich paarweise in den drei reellen Wendungspuncten schneiden, und die zwei übrigen keinen reellen Punct mit der Curve gemein haben. Den somit unterschiedenen vier Fällen entsprechen, wenn wir, um das Imaginäre in Evidenz treten zu lassen, durch die Buchstaben des lateinischen Alphabets reelle ganze und lineare Functionen bezeichnen, die folgenden vier Formen der allgemeinen Gleichung:

$$pqr+\mu s^3 = 0,$$
$$p(p'+p''\sqrt{-1})\,(p'-p''\sqrt{-1})+\mu_1 s_1^3 = 0,$$
$$p(q'\pm p''\sqrt{-1})\,(r'\mp r''\sqrt{-1})+(\mu_2\pm\mu'_2\sqrt{-1})\,(s_2\pm s'_2\sqrt{-1})^3 = 0,$$
$$(p'\pm p''\sqrt{-1})\,(q'\pm q''\sqrt{-1})\,(r'\pm r''\sqrt{-1})+(\mu_3\pm\mu'_3\sqrt{-1})(s_2\pm s'_3\sqrt{-1})^3 = 0.$$

Wir müssen in dem obigen Schema die drei reellen Wendungspuncte durch solche drei Symbole bezeichnen, die in derselben Gruppe vorkommen, und für die sechs imaginären die Bezeichnung so wählen, dafs in drei andern Gruppen die drei Paare zusammengehöriger imaginären mit den drei reellen Wendungspuncten sich zusammenfinden. Nehmen wir etwa, hiermit in Uebereinstimmung, P, Q und R für die drei reellen Wendungspuncte, mit denen bezüglich die zusammengehörigen imaginären P_1 und P_2, Q_1 und Q_2, und R_1 und R_2 auf denselben drei geraden Linien liegen, so beziehen sich die vier Horizontal-Columnen des Schema auf die vier verschiedenen Fälle und die entsprechenden vier verschiedenen Formen der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung.

323. Die directe Nachweisung, dafs, und unter welchen Modificationen, die allge-

*) Nicht jede Anzahl von Elementen ist von der Art, dafs sie sich so zu drei gruppiren lassen, dafs in den verschiedenen Gruppen alle Combinationen zweier Elemente vorkommen und jede derselben nur ein einziges Mal. Wenn m die Anzahl solcher Elemente und n irgend eine ganze Zahl, Null nicht ausgeschlossen, bedeutet, so überzeugt man sich leicht, dafs m von der Form $6n+3$ sein mufs. Die Anzahl der verschiedenen Gruppen beträgt alsdann ein Drittel der Anzahl der Combinationen von m Elementen zu zwei, mithin $\frac{1}{3}\cdot\frac{m(m-1)}{1\ \ 2}$, und jedes Element kommt in $\frac{m-1}{2}$ verschiedenen Gruppen vor.

meine Gleichung des dritten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen sich immer auf die Form der Gleichung (1) bringen lasse, beruht auf der Discussion von Gleichungen, die wenigstens den 12. Grad erreichen, und die wir auf dieselbe Weise, als wir es im ersten Paragraphen dieses Abschnittes bei einem analogen Gegenstande gethan haben, einleiten können. Was dort aber leicht war, weil die bezügliche Umformung nur auf einzige Art Statt fand, wird hier, wenigstens praktisch, unausführbar. Allen diesen algebraischen Entwicklungen sind wir in der Discussion der vorigen Nummer überhoben worden, indem wir die Form der Gleichung (1) mit dem schon bewiesenen Resultate, dafs eine Curve dritter Ordnung, im Allgemeinen, neun Wendungspuncte und unter diesen immer drei reelle und sechs imaginäre hat, in Verbindung gebracht haben. Wir können aber den Gesichtspunct für diese Discussion noch höher wählen, indem wir die Nothwendigkeit des eben erwähnten Resultates, durch unmittelbare Betrachtungen, ebenfalls wiederum aus der Form der Gleichung (1) herleiten.

Weil nemlich 1) die Gleichung (1) so viele Constante als die allgemeine Gleichung des dritten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen einschliefst, so kann diese Gleichung, bei reeller oder imaginärer Constanten-Bestimmung, immer in jene übergehen. Wenigstens hat also eine Curve dritter Ordnung drei Wendungspuncte, die in gerader Linie liegen, und entweder reell oder imaginär sind.

2) Eine Curve dritter Ordnung kann nicht mehr als drei reelle Wendungspuncte haben. Denn die gerade Linie, welche irgend zwei reelle Wendungspuncte verbindet, schneidet die Curve noch in einem dritten reellen Puncte, der ebenfalls ein Wendungspunct ist; und es gibt kein System von mehr als drei reellen Puncten, von denen je zwei mit einem und nur mit einem einzigen dritten in gerader Linie liegen.

3) Die imaginären Wendungspuncte sind in gerader Anzahl vorhanden und gehören nothwendig paarweise so zusammen, dafs eine reelle gerade Linie durch die beiden Puncte jedes Paares geht und also die Curve aufserdem noch in einem reellen Wendungspuncte schneidet. Es gibt hiernach doppelt so viele imaginäre als reelle Wendungspuncte. Denn, da in der Gleichung (1) die drei (reellen) Functionen p, q und r beliebig mit einander vertauscht werden können, so stehen die reellen Wendungspuncte alle drei in derselben Beziehung zur Curve, und offenbar kann einer derselben nicht mit mehr Paaren imaginärer Wendungspuncte in gerader Linie liegen als ein anderer.

4) Es sind hiernach nur noch zwei Fälle möglich: entweder hat die Curve dritter Ordnung einen reellen und zwei imaginäre oder drei reelle und sechs imaginäre Wendungspuncte. Weil augenfällig die allgemeine Gleichung des dritten Grades nicht auf blofs einzige Art die Form (1) annehmen kann, so ist der zweite Fall allein statthaft *).

324. Wir können, weil eine Curve dritter Ordnung, im Allgemeinen, drei reelle Wendungspuncte hat, jede Curve dieser Ordnung durch die Gleichung:

$$pqr+\mu s^3 = 0, \qquad (1)$$

unter der Beschränkung, dafs p, q, r und s reelle Functionen bedeuten, auf einzige

*) Wir könnten auch noch aus der Note zur 322. Nummer Argumente hernehmen, um das Obige zu bestätigen. Es können z. B. nicht neun Wendungspuncte und unter diesen vier Paare imaginärer vorhanden sein. Dann müfste nemlich der einzige reelle Wendungspunct mit diesen vier Paaren auf vier verschiedenen geraden Linien liegen und sonst in keiner Combination mehr vorkommen. Die Anzahl der imaginären Wendungspuncte müfste also ebenfalls von der Form (6n+3) sein.

Weise darstellen. Die particulären Fälle ergeben sich, indem wir Voraussetzungen darüber machen, dafs Wendungspuncte und Wendungstangenten unendlich weit liegen. Liegt ein Wendungspunct, etwa derjenige auf der Wendungstangente R, unendlich weit, so mufs die Linie S derselben parallel sein, und wir erhalten die folgende Form:

$$pqr + \mu(r + \varkappa)^3 = 0. \qquad (2)$$

Die Wendungstangente R ist alsdann eine osculirende Asymptote der Curve. Liegen die Wendungspuncte alle drei unendlich weit, wonach die drei Linien P, Q und R osculirende Asymptoten sind, so kommt, indem die Function s auf eine blofse Constante sich reducirt:

$$pqr + \mu = 0. \qquad (3)$$

Wenn ein Wendungspunct zugleich mit der bezüglichen Wendungstangente unendlich weit liegt, so mufs die dieser Tangente entsprechende Function auf eine Constante sich reduciren, wonach die allgemeine Gleichung (1) etwa die folgende Form annimmt:

$$pq + \mu s^3 = 0. \qquad (4)$$

Es kann überdiefs einer der beiden übrigen Wendungspuncte unendlich weit liegen, woraus die folgende Form hervorgeht:

$$pq + \mu(q + \varkappa)^3 = 0. \qquad (5)$$

Es können endlich zwei Wendungspuncte zugleich mit den beiden bezüglichen Wendungstangenten unendlich weit liegen. Diesem Falle entspricht die Form:

$$p + \mu s^3 = 0. \qquad (6)$$

Auf die vorstehende Weise erhalten wir sechs sich einander unterordnende Arten von Curven dritter Ordnung, indem wir blofs aus der Betrachtung der drei reellen Wendungspuncte den Eintheilungsgrund hernehmen. Da immer sechs Wendungspuncte imaginär und also ihre Spur für's Auge nicht vorhanden ist, so ist dieses neue Princip der Eintheilung allerdings statthaft, nur müssen wir, wenn wir weiter ins Einzelne gehen und namentlich in Rücksicht auf Doppelpuncte, Analogien aufgeben, die uns bisher als bedeutungsvoll entgegengetreten sind. Wir erhalten die weiteren Unterabtheilungen, wenn wir auf die Natur der Asymptoten der Curve Rücksicht nehmen. Unmittelbar können wir auch in der Form der obigen Gleichungen in Evidenz treten lassen, dafs zwei Wendungs-Tangenten parallel sind.

325. Wir wollen, um zur Betrachtung der Doppelpuncte überzugehen, die Gleichung (1) unter der folgenden Form schreiben:

$$\varphi\psi\chi + \mu \equiv U = 0, \qquad (1)$$

indem wir

$$\frac{p}{s} \equiv \varphi, \qquad \frac{q}{s} \equiv \psi, \qquad \frac{r}{s} \equiv \chi,$$

nehmen. Zugleich wollen wir, mit Rücksicht darauf, dafs μ ein unbestimmter Coefficient ist:

$$\varphi + \psi + \chi \equiv \beta, \qquad \text{oder} \qquad p + q + r \equiv \beta s, \qquad (2)$$

setzen (18), wonach

$$d\varphi + d\psi + d\chi = 0. \qquad (3)$$

Wenn die Curve (1) überhaupt einen Doppelpunct hat, so bestehen für diesen, zugleich mit der Gleichung der Curve, die folgenden beiden Gleichungen:

$$\frac{dU}{d\varphi} = 0, \qquad \frac{dU}{d\psi} = 0,$$

die, mit Berücksichtigung der Gleichung (3), in die folgenden beiden sich entwickeln:

$$\psi(\chi-\varphi) = 0, \qquad \varphi(\chi-\psi) = 0,$$

und auch durch die nachstehenden ersetzt werden können:

$$q(r-p) = 0, \qquad p(r-q) = 0. \tag{4}$$

Diese beiden Gleichungen werden zugleich befriedigt, wenn irgend zwei der drei Functionen p, q und r verschwinden. Wenn die Gleichung der Curve (1) ebenfalls befriedigt werden soll, indem wir etwa $q = 0$ und $r = 0$ setzen, so ist nothwendig $s \equiv q+\varkappa r$, wonach die Gleichung (1) sich folgendergestalt particularisirt:

$$pqr+\mu(q+\mu r)^3 = 0.$$

Der bezügliche Doppelpunct ist alsdann ein solcher, in welchem zwei reelle Zweige sich schneiden.

Die beiden Gleichungen (4) werden aber auch dann befriedigt, wenn wir

$$p = q = r = \tfrac{1}{3}\beta s$$

setzen. Wenn zugleich die Gleichung der Curve bestehen soll, mufs μ durch folgende Gleichung gegeben sein:

$$\tfrac{1}{27}\beta^3+\mu = 0.$$

In diesem Falle ist der Doppelpunct ein isolirter Punct. Da, nach den identischen Gleichungen (2), die Linie S durch die Gleichung:

$$p+q+r = 0,$$

dargestellt wird, so ist der fragliche isolirte Punct der Pol dieser Linie, in Beziehung auf das von den drei Linien P, Q und R gebildete Dreieck (14).

Wenn eine Curve dritter Ordnung einen conjugirten Punct hat, so ist derselbe der Pol derjenigen geraden Linie, welche die drei reellen Wendungspuncte der Curve verbindet, in Beziehung auf das von den drei bezüglichen Wendungstangenten gebildete Dreieck.

Hiernach läfst sich sogleich durch eine lineare Construction der isolirte Punct bestimmen, wenn die drei Wendungspuncte und Wendungstangenten gegeben sind, und andererseits ergeben sich unmittelbar die drei Berührungspuncte auf den Wendungstangenten, wenn diese und der isolirte Punct gegeben sind.

Wir bemerken, wie die Form der Gleichung (1) sich particularisirt, wenn zwei reelle Zweige der bezüglichen Curve sich schneiden, und wie nur eine besondere Bestimmung der Constante μ erfordert wird, wenn die Curve einen conjugirten Punct hat. Diese Ungleichmäfsigkeit in der Bestimmung der beiden Hauptarten von Doppelpuncten liefse allein für sich schon die Existenz der imaginären Wendungspuncte erschliefsen. Die vollständige Symmetrie tritt aber dann wieder ein, wenn wir neben die Fundamental-Gleichung der 324. Nummer die folgende stellen, in der die imaginären Wendungspuncte in Evidenz treten:

$$p(q^2+\varkappa^2r^2)+\mu s^3 = 0.$$

In dem besondern Falle eines Rückkehrpunctes können die identischen Gleichungen (2), im Allgemeinen, nicht statuirt werden. Diesen Fall können wir aber in der folgenden Form:

$$pq^2+\mu s^3 = 0,$$

in welche die Formen der Gleichung (1) der eben angezogenen Nummer und der vorstehenden Gleichung zusammenfallen, unmittelbar in Evidenz bringen. Dann existirt nur noch ein einziger und zwar reeller Wendungspunct.

326. Wenn eine Curve dritter Ordnung durch die Gleichung:

$$pqr+\mu s^3 \equiv U = 0,$$

und auf ihrem Umfange irgend ein Punct, dem die besondern Functionen-Werthe p', q', r' und s' entsprechen mögen, gegeben sind, so erhalten wir, nach der 147. Nummer, für die Tangente in diesem Puncte die Gleichung:

$$\frac{dU}{dp}\cdot p+\frac{dU}{dq}\cdot q+\frac{dU}{dr}\cdot r+\frac{dU}{ds}\cdot s=0,$$

wobei die partiellen Differential-Coefficienten auf die besondern Functionen-Werthe zu beziehen sind. Die vorstehende Gleichung entwickelt sich in die folgende:

$$q'r'p+p'r'q+p'q'r+3\mu s'^2 s=0.$$

Wenn wir auf der bezüglichen Tangente beliebig einen Punct annehmen, so befriedigen die Functionen-Werthe, die demselben entsprechen, und die wir durch p^0, q^0, r^0 und s^0 unterscheiden wollen, diese Gleichung. Setzen wir diese Werthe ein und betrachten dann p', q', r' und s' als veränderlich, so stellt die resultirende Gleichung:

$$p^0qr+q^0pr+r^0pq+3\mu s^0 s^2=0,$$

einen Kegelschnitt dar. Dieser Kegelschnitt geht durch den Berührungspunct auf der obigen Tangente, er geht gleichermafsen durch die sechs Berührungspuncte auf allen sechs Tangenten, welche durch den fraglichen Punct sich im Allgemeinen an die Curve dritter Ordnung legen lassen. Wenn wir insbesondere diesen Punct auf der Linie S annehmen, so ist $s^0=0$, wonach

$$p^0+q^0+r^0=0,$$

und die letzte Gleichung in die folgende übergeht:

$$p^0qr+q^0pr+r^0pq=0. \qquad (5)$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn irgend zwei der drei linearen Functionen p, q und r verschwinden; sie wird es, wenn wir die vorhergehende Bedingungs-Gleichung berücksichtigen, auch dann, wenn wir:

$$p=q=r$$

setzen. Der bezügliche Kegelschnitt geht also, einerseits, durch die drei Winkelpuncte des von den Wendungstangenten gebildeten Dreiecks, und andrerseits durch den Pol der Linie S, in Beziehung auf eben dieses Dreieck.

Wenn der Punct, von welchem aus die Tangenten gezogen werden, insbesondere ein Wendungspunct ist, so fallen in die bezügliche Wendungstangente, etwa in R, drei der sechs Tangenten zusammen, und der fragliche Kegelschnitt (5) artet in ein System von zwei geraden Linien aus. Die eine dieser beiden geraden Linien ist die Wendungstangente selbst, die Gleichung der andern ergibt sich sogleich aus der Gleichung (5); indem wir nemlich $r^0=0$ setzen und den Factor r vernachlässigen, kommt:

$$q^0p+r^0q=0.$$

Die sechs Berührungspuncte auf denjenigen sechs Tangenten einer Curve dritter Ordnung, welche, von irgend einem Puncte der Linie S aus, an die Curve sich legen lassen, liegen auf einer Curve zweiter Ordnung, welche durch die drei Winkelpuncte des von den Wendungstangenten gebildeten Dreiecks und den Pol der Linie S, in Beziehung auf dieses Dreieck, geht. Von jedem der drei Wendungspuncte lassen sich nur noch drei Tangenten an die Curve legen, und die drei Berührungspuncte auf denselben liegen in gerader Linie. Die drei geraden Linien, welche man auf diese Weise erhält, gehen durch die drei Winkelpuncte des obigen Dreiecks und schneiden sich alle drei im Pole der Linie S.

Nach dem vorstehenden Satze entspricht jedem Puncte der Linie S ein Kegelschnitt, der

der durch vier feste Puncte geht, und, umgekehrt, jedem solchen Kegelschnitte ein Punct der Linie S, in der Art, dafs, wenn noch irgend ein Punct von jenem gegeben ist, dieser sich auf lineare Weise bestimmen läfst. Wenn wir nemlich einen Punct des Kegelschnittes durch die besondern Functionen-Werthe p_1, q_1 und r_1 unterscheiden, und dann drei Constante π, $\varkappa$ und ϱ so bestimmen, dafs

$$\pi p_1 = \varkappa q_1 = \varrho r_1, \tag{6}$$

so ist die Gleichung der Polaren dieses Punctes:

$$\pi p + \varkappa q + \varrho r = 0.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes gibt aber auch:

$$p^0 q_1 r_1 + q^0 p_1 r_1 + r^0 p_1 q_1 = 0,$$

und wenn wir die Gleichungen (6) berücksichtigen:

$$\pi p^0 + \varkappa q^0 + \varrho r^0 = 0;$$

woraus wir sehen, dafs die Polare des fraglichen Punctes durch den zu bestimmenden Punct auf der Linie S geht.

Hieran knüpft sich eine bemerkenswerthe Construction der Aufgabe, in einem Puncte einer Curve dritter Ordnung die Tangente zu ziehen, wenn, aufser diesem Puncte, die drei Wendungspuncte und die Tangenten in denselben gegeben sind, die Curve selbst aber nicht gezeichnet ist. Man braucht nemlich nur (14) in Beziehung auf das von den drei Tangenten gebildete Dreieck die Polare des gegebenen Punctes zu construiren. Die verlangte Tangente verbindet alsdann den gegebenen Punct mit dem Durchschnitte dieser Polaren und der Linie S. Wir sehen zugleich, dafs diese Construction dann unbestimmt wird, wenn der gegebene Punct mit dem Pole der Linie S zusammenfällt und also dieser Punct ein conjugirter Punct der Curve ist (325). Wenn insbesondere der gegebene Punct der Schwerpunct des Dreiecks der Wendungstangenten ist, so ist die bezügliche Tangente der Linie S parallel.

Die Construction des Berührungspunctes, wenn, umgekehrt, die Tangente gegeben ist, ist im Allgemeinen vom zweiten Grade, und reducirt sich nur in den Fällen, dafs die Tangente entweder durch einen der drei Wendungspuncte oder durch den Durchschnitt zweier der drei Wendungstangenten, oder endlich durch den Pol der Linie S geht, auf den ersten Grad.

In die Discussion particulärer Fälle kann ich hier nicht eingehen.

327. An die neue Form der allgemeinen Gleichung, die wir diesem Paragraphen zu Grunde gelegt haben, schliefsen sich neue Constructionen der Curven dritter Ordnung an, die wir kurz berühren wollen. Wir können nemlich, indem wir eine neue unbestimmte Constante $\varkappa$ einführen, die allgemeine Gleichung auf folgende Weise schreiben:

$$p(qr + \varkappa s^2) + s^2(\mu s - \varkappa p) = 0,$$

und dann befriedigen, indem wir zugleich:

$$qr + \varkappa s^2 = 0, \qquad \mu s - \varkappa p = 0,$$

setzen. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt einen Kegelschnitt dar, welcher die beiden Wendungstangenten Q und R auf der Linie S, mithin in den bezüglichen Wendungspuncten berührt; die zweite Gleichung stellt eine gerade Linie dar, die durch den dritten Wendungspunct geht. Die beiden Durchschnitte jenes Kegelschnittes und dieser geraden Linie liegen auf der zu construirenden Curve, und wenn einer dieser beiden Durchschnitte gegeben ist, ergibt sich der andere auf linearem Wege, auch ohne dafs es nöthig wäre, den Kegelschnitt selbst zu zeichnen. Wenn also die drei Wendungspuncte und die drei Wendungstangenten und aufserdem noch irgend ein Punct einer Curve

dritter Ordnung gegeben sind, so können wir sogleich denjenigen neuen Punct der Curve bestimmen, welcher auf derjenigen geraden Linie liegt, die den letztgenannten Punct mit jedem der drei Wendungspuncte verbindet. Auf diesem Wege erhalten wir zunächst drei und dann beliebig viele neue Puncte der Curve.

328. Wir können, durch Einführung einer neuen unbestimmten Constanten, der allgemeinen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$p(qr+\varkappa ps)+s(\mu s^2-\varkappa p^2)=0,$$

und also dieselbe befriedigen, indem wir zugleich

$$qr+\varkappa ps=0, \qquad \mu s^2-\varkappa p^2=0,$$

setzen. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt irgend einen Kegelschnitt dar, welcher durch die beiden Wendungspuncte auf den geraden Linien Q und R und durch die beiden Durchschnitte derselben mit der dritten Wendungstangente geht. Die zweite Gleichung stellt ein System von zwei geraden Linien dar, welche mit den Linien P und S vier Harmonicalen bilden. Die vier Durchschnitte dieses Systems mit jenem Kegelschnitte liegen auf der zu construirenden Curve. Ist einer dieser vier Durchschnitte gegeben, so erhalten wir, nach dem Pascalschen Satze, durch eine lineare Construction sogleich einen zweiten. Die Construction der beiden übrigen ist vom zweiten Grade. Hieraus fliefst eine zweite allgemeine Construction einer Curve dritter Ordnung, wenn ihre drei Wendungspuncte und Wendungstangenten und aufserdem noch irgend ein Punct derselben gegeben ist.

Wenn statt des Punctes der Curve eine Tangente derselben gegeben ist, so können wir nach der 326. Nummer den Berührungspunct auf derselben bestimmen. Da diese Bestimmung, im Allgemeinen, eine zwiefache ist, so erhalten wir auch zwei verschiedene Curven dritter Ordnung.

* * *

329. Neben den Curven dritter Ordnung stehen die Curven dritter Classe. An diese Curven lassen sich, von einem gegebenen Puncte aus, drei Tangenten legen; sie werden durch die allgemeine Gleichung des dritten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen, wenn wir diesen die Bedeutung linearer Linien-Coordinaten beilegen, dargestellt. Die Discussion derselben Formen, unter welchen wir diese Gleichung im dritten Abschnitte behandelt haben, liefert uns auch die Eigenschaften der neuen Curven. Namentlich tritt uns die Form:

$$pqr+\mu s^3=0,$$

mit der wir uns zuletzt beschäftigt haben, hier bedeutungsvoll entgegen. Es hat eine Curve dritter Classe im Allgemeinen drei reelle und sechs imaginäre Rückkehrpuncte (den Wendungstangenten der Curven dritter Ordnung entsprechend). Die Tangenten in den drei reellen Rückkehrpuncten schneiden sich in einem und demselben Puncte. Stellen wir diesen durch die Gleichung $s=0$ und jene durch die Gleichungen $p=0$, $q=0$ und $r=0$ dar, so ist die letzte Gleichung bei gehöriger Bestimmung von μ die Gleichung der Curve. Nach den Entwicklungen des zweiten Paragraphen des ersten Abschnittes können wir durch Particularisation der vier linearen Functionen ausdrücken, dafs die bezüglichen Puncte unendlich weit rücken, und erhalten alsdann eben so viele besondere Arten von Curven dritter Classe. Hier aber, wo das Unendliche besonders hervortritt, hört die Analogie mit den Curven dritter Ordnung auf, weil das Unendlichweitrücken eines

Punctes dem Unendlichweitrücken einer geraden Linie keinesweges vollständig analog ist. Weitere Unterscheidungen der Curven dritter Classe liefert die Betrachtung der Asymptoten. Eine solche Curve kann sechs, vier und zwei geradlinige Asymptoten haben, und diese können in Uebergangsfällen auch durch krummlinige ersetzt werden; die Curve kann auch ganz im endlichen Raume eingeschlossen sein. Hiernach kommen verschiedene Formen zum Vorschein, die mannigfaltiger sind, als die Formen der Curven dritter Ordnung; doch eine bildliche Anschauung derselben zu geben, ist hier nicht möglich. Die Construction der Curven dritter Classe durch ihre Tangenten ist eben so leicht als die Construction der Curven dritter Ordnung durch ihre Puncte; und, wie wir hier in jedem Puncte die Tangente (326), können wir dort, auf jeder Tangente den Berührungspunct, sogleich construiren.

Im Allgemeinen hat eine Curve dritter Classe keine Doppeltangente, in besondern Fällen kann eine solche vorhanden und auf derselben alsdann die beiden Berührungspuncte entweder reell oder imaginär sein. In dem letztern Falle ist die Doppeltangente eine ganz von der Curve isolirte gerade Linie. Die beiden Berührungspuncte können endlich auch zusammenfallen, alsdann ist die Doppeltangente eine Wendungstangente. Wenn eine Curve dritter Classe eine Doppeltangente hat, so vertritt diese sechs Rückkehrpuncte, die entweder alle sechs oder von denen vier imaginär sind, je nachdem die Doppeltangente zwei imaginäre oder zwei reelle Zweige berührt. In dem ersten Falle behält die Curve also ihre drei reellen Rückkehrpuncte, und die isolirte Doppeltangente ist alsdann die Polare des gemeinsamen Durchschnittspunctes der Tangenten in den drei Rückkehrpuncten, in Beziehung auf das von diesen Puncten gebildete Dreieck. Wenn die Curve eine Wendungstangente hat, so ist aufserdem nur noch ein einziger und zwar reeller Rückkehrpunct vorhanden.

330. Ich halte es für überflüssig, nach dem Princip der Reciprocität, auch nur eine einzige Eigenschaft der Curven dritter Ordnung auf die Curven dritter Classe zu übertragen. Diese Uebertragungsweisen sind bekannt genug. Dagegen will ich schliefslich Aufklärung über einen Gegenstand geben, an dem bisher alle Anstrengungen der Geometer gescheitert sind. Wir können die Frage, die eine Lebensfrage für die allgemeine Theorie der Curven ist, auf folgende Weise stellen: „Eine gegebene Curve n. Ordnung hat zu ihrer Polar-Curve eine Curve der $n(n-1)$. Ordnung, und diese gegenseitig zu der ihrigen die gegebene der n. Ordnung. Wie kommt es, dafs die Ordnung der Polar-Curve, die für die $n(n-1)$. Ordnung im Allgemeinen bis zur $n(n-1)[n(n-1)-1]$. ansteigt, sich hier insbesondere auf n., also um $n^3(n-2)$ Einheiten reducirt?“

Da für $n = 2$ keine Reduction und keine Schwierigkeit Statt findet, wollen wir die vorstehende Frage zuvörderst für den Fall, dafs $n = 3$, und dann für jeden beliebigen Werth von n beantworten.

Eine Curve dritter Ordnung hat 9 Wendungstangenten; ihre Polar-Curve ist von der 6. Ordnung und hat 9 Rückkehrpuncte, die jenen Wendungstangenten entsprechen. Im Allgemeinen hat eine Curve der 6. Ordnung eine Polar-Curve von der 30. Ordnung; für jeden Rückkehrpunct der Curve reducirt sich diese Ordnung um 3 Einheiten; in dem vorliegenden Falle also im Ganzen um 27 Einheiten, so dafs wir wirklich zur Ordnung der ursprünglichen Curve zurückkommen.

Wenn die Curve dritter Ordnung insbesondere einen Doppelpunct hat, so hat sie aufserdem im Allgemeinen nur noch drei (reelle oder imaginäre) Wendungstangenten. Ihre Polar-Curve reducirt sich, des Doppelpunctes wegen, um 2 Ordnungen; sie ist von der

4. Ordnung und hat eine Doppeltangente und drei Rückkehrpuncte. Eine Curve der 4. Ordnung hat im Allgemeinen eine Polar-Curve von der 12. Ordnung. Diese Ordnung reducirt sich aber in dem vorliegenden Falle, der drei Rückkehrpuncte wegen, um dreimal 3 Einheiten, so dafs sie wieder auf die 3. heruntersinkt.

Wenn die Curve einen Rückkehrpunct hat, so hat sie nur noch eine einzige Wendungstangente. Ihre Polar-Curve reducirt sich, des Rückkehrpunctes wegen, auf die dritte Ordnung. Beide Curven sind zugleich von der dritten Ordnung und der dritten Classe. Jede hat eine Wendungstangente, die dem Rückkehrpuncte der andern entspricht.

Nach dem 6. Paragraphen, auf den ich mich hier stillschweigend öfter bezogen habe, hat eine Curve n. Ordnung

$$3n(n-2)$$

Wendungstangenten, und eben so viele Rückkehrpuncte hat ihre Polar-Curve der $n(n-1)$. Ordnung. Wenn wir gegenseitig die Polar-Curve bestimmen, so reducirt sich, der Rückkehrpuncte wegen, die Ordnung derselben zunächst um $9n(n-2)$ Einheiten. Die Reduction, die hiernach, wenn $n>3$, unerklärt bleibt, beträgt noch $n^3(n-2)-9n(n-2) = n(n-2)(n^2-9)$ Einheiten. Sie wird durch die Doppeltangenten der ursprünglichen Curve, denen eben so viele Doppelpuncte ihrer Polar-Curve entsprechen, bedingt. Da jeder dieser Doppelpuncte eine Reduction von 2 Einheiten mit sich bringt, so würde hiernach die Anzahl dieser Doppelpuncte, und also auch die Anzahl jener Doppeltangenten

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$

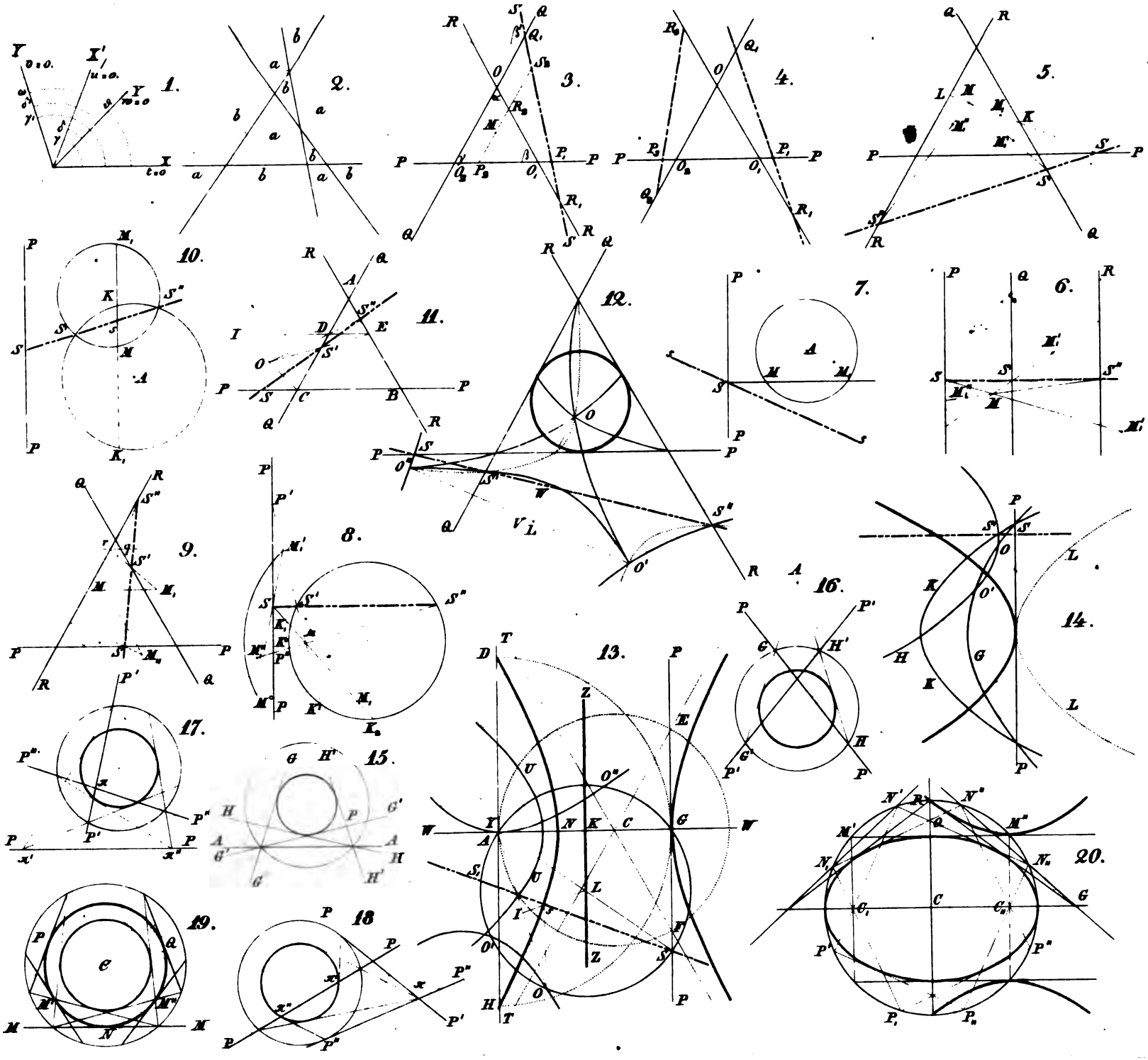
betragen.

Es ist hiernach, zum Beispiel, die Polar-Curve einer Curve 10. Classe defshalb auch blofs nur von der 10. Ordnung, weil diese Curve 240 Rückkehrpuncte und 3640 Doppelpuncte hat. Die Ordnung der Polar-Curve erleidet dadurch eine Reduction von $3 \cdot 240 + 2 \cdot 3640 = 8000$ Einheiten. Aehnlich ist die Polar-Curve einer Curve 10. Ordnung auch nur von der 10. Classe, weil diese Curve 240 Wendungstangenten und 3640 Doppeltangenten hat.

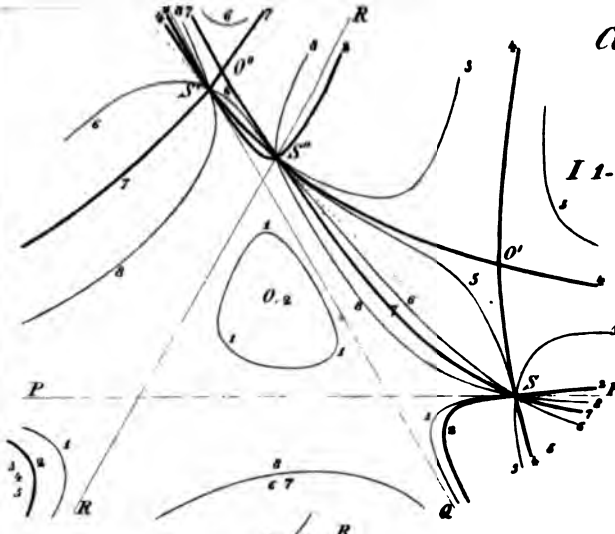
Gedruckt bei A. W. Schade.

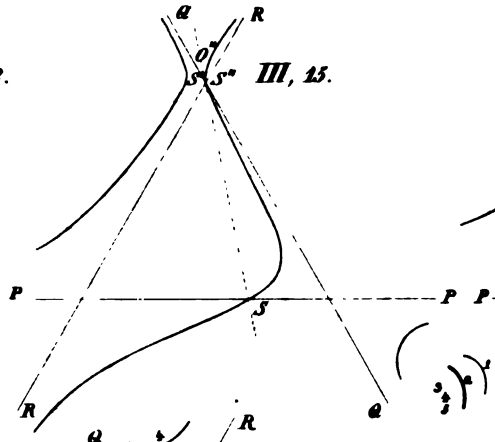
Berichtigungen.

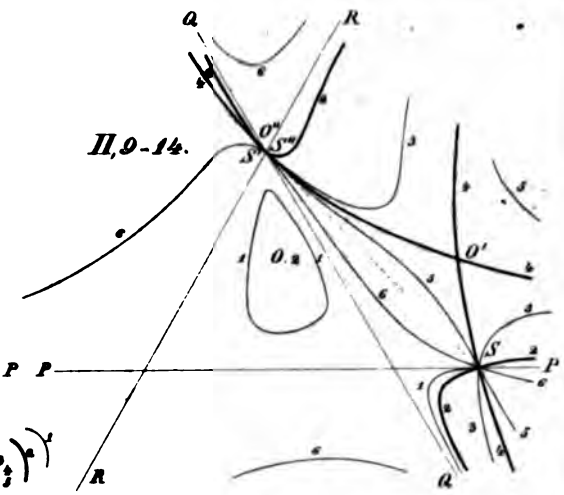
Seite	46	Zeile	24 v. o.	statt „wir aus gleichem Grunde als früher das obere Zeichen nehmen müssen“ lies „entweder das untere oder obere Zeichen gilt“
»	—	»	27 v. o.	nach „so“ ist einzuschalten: „liegen entweder die drei Berührungspuncte in gerader Linie, oder es“
»	76	»	11 v. u.	st. Linin l. Linie.
»	122	»	2 v. u.	st. Beziehung l. Bezeichnung.
»	196	»	14 v. o.	st. $\frac{1}{4}$ l. $\frac{1}{4}$.
»	208	»	23 v. o.	st. Ort, zwei l. Ort für zwei.
»	216	»	1 v. u.	st. $(p+\sigma)$ l. $(p+\sigma)x$.
»	251	»	7 v. u.	st. ϱ' l. ϱ.
»	252	»	18 v. o.	st. ϑ l. ω.
»	253	»	19 v. u.	
»	—	»	10 v. u.	
»	—	»	3 v. u.	
»	—	»	1 v. u.	
»	255	»	15 v. o.	st. $(cotg\,\pi+cotg\,x-2cotg\,\varrho)$ l. $(cotg\,\pi-cotg\,x)^2$.
»	256	»	3 v. u.	st. umhült l. umhüllt.
»	—	»	1 v. u.	st. könnten l. konnten.
»	267	»	3 v. o.	nach „und“ mufs der Satz auf folgende Weise schliefsen: „ihre vier imaginären Wendungspuncte verliert.“

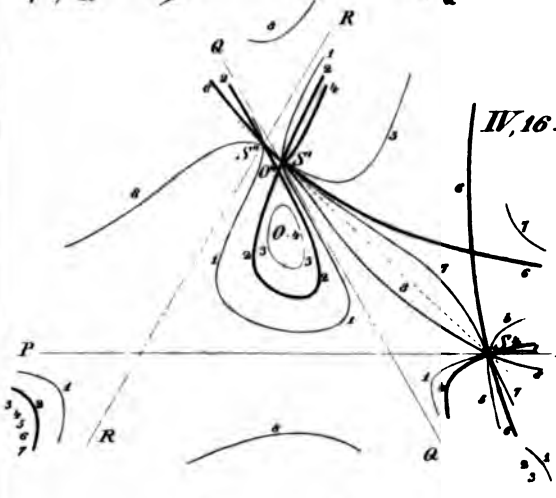


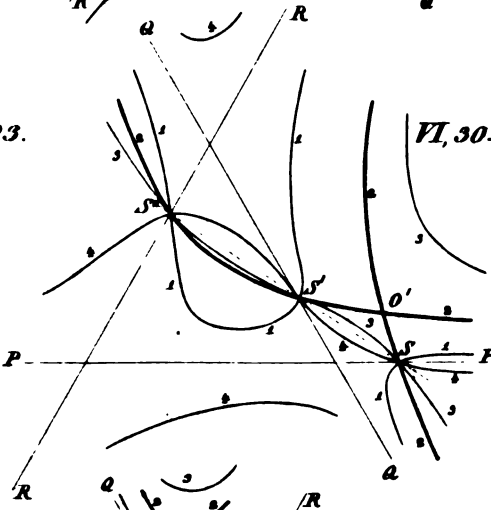
Curven dritter Ordnung, 1 - 47.

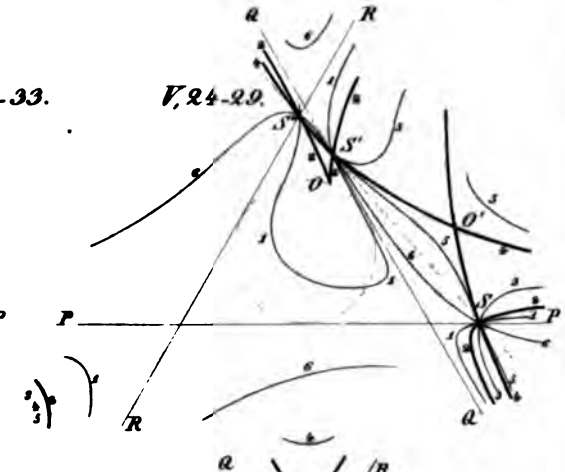


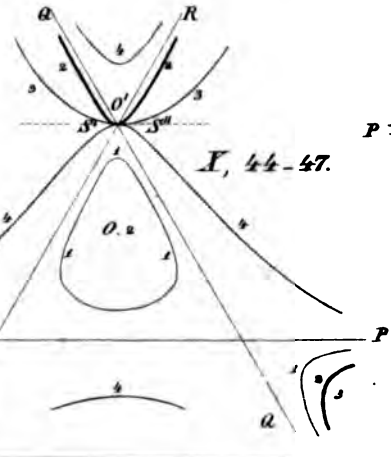


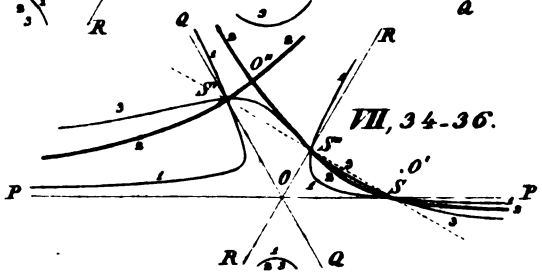


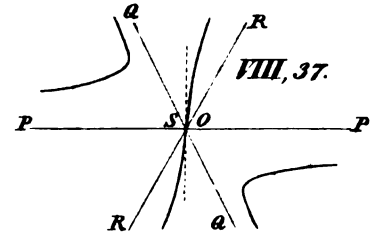


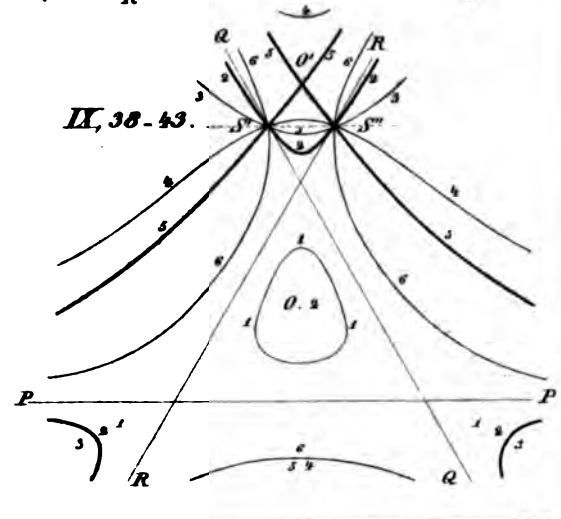




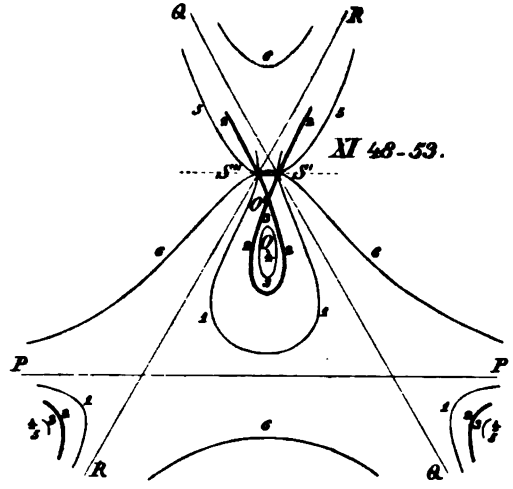


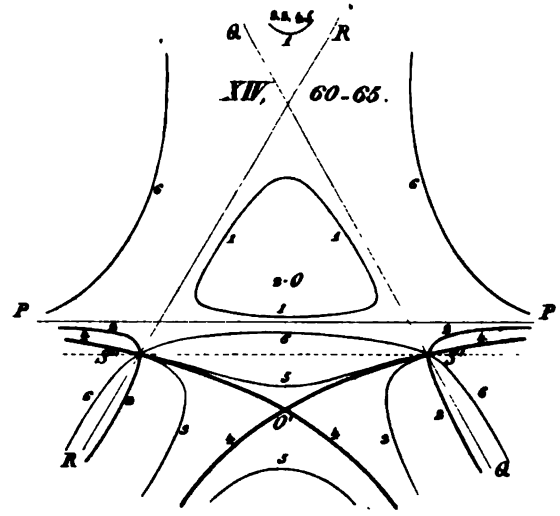


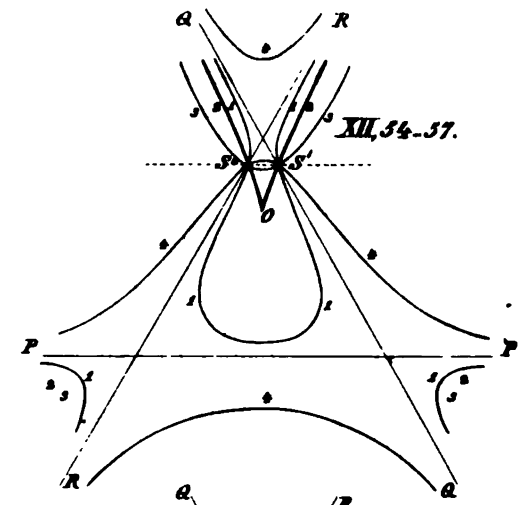


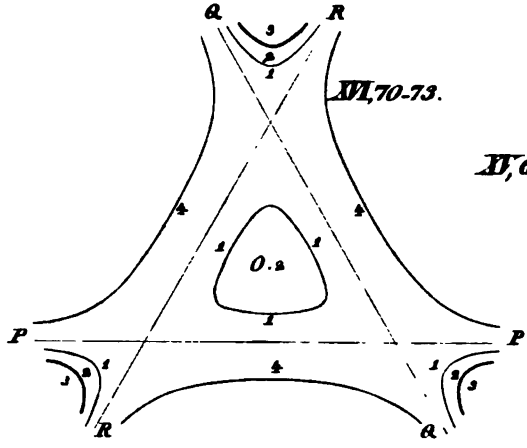


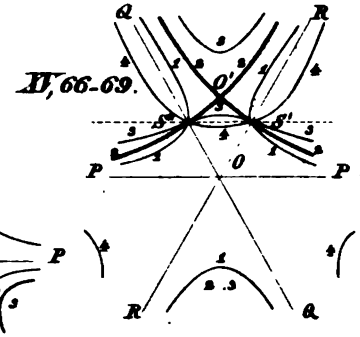
Curven dritter Ordnung, 48 - 91.

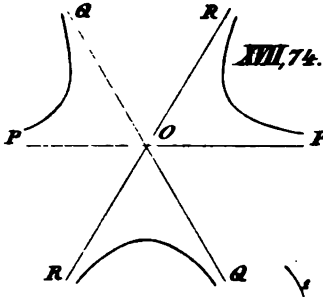


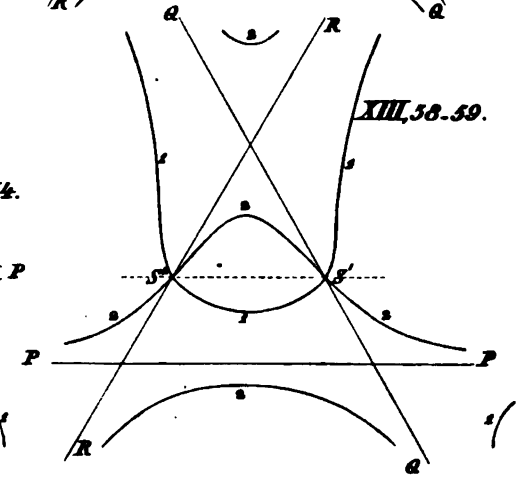


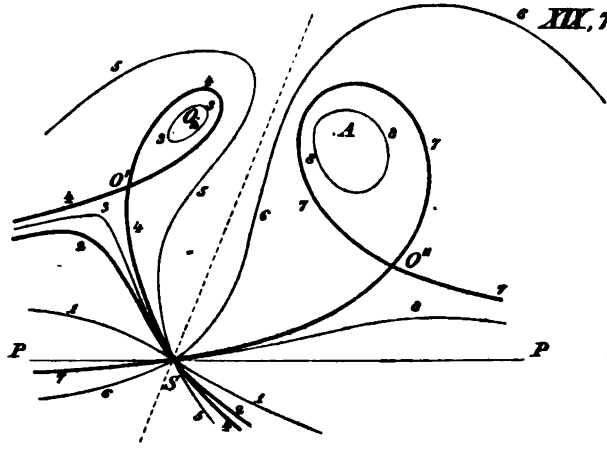


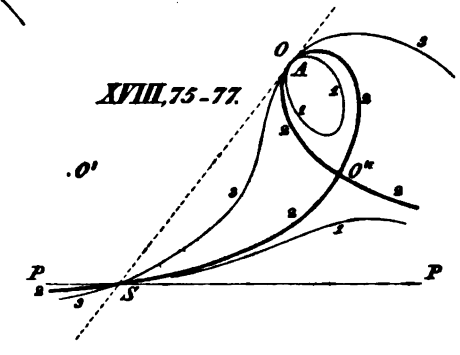


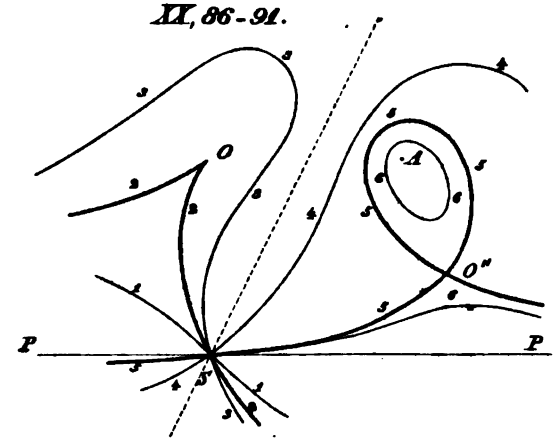






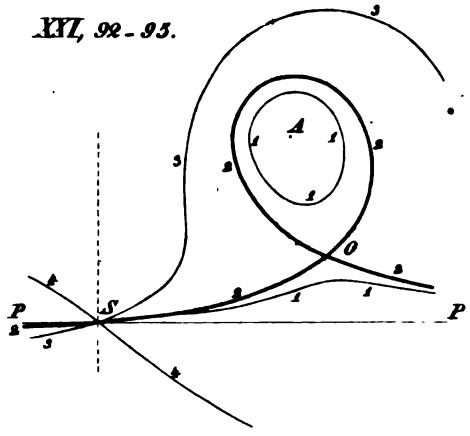




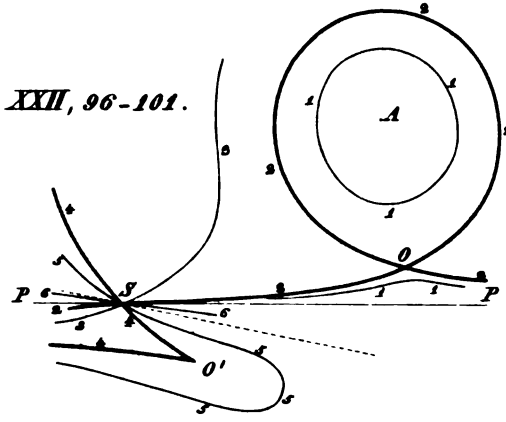


Curven dritter Ordnung, 92-149.

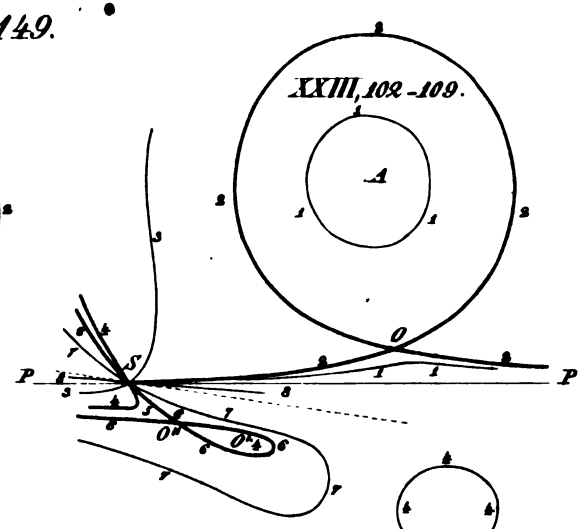
XXI, 92-95.

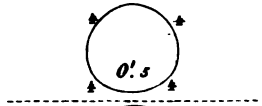


XXII, 96-101.

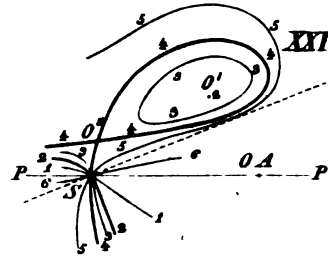


XXIII, 102-109.

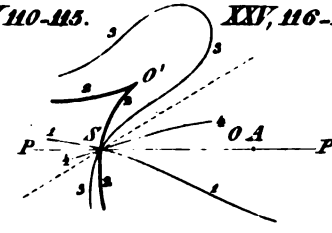




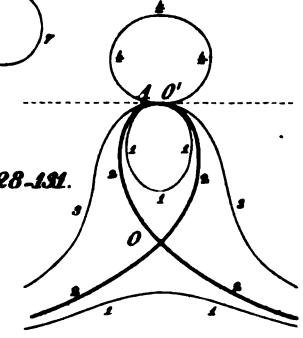
XXIV, 110-115.



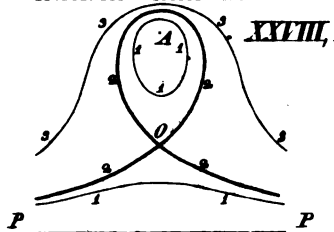
XXV, 116-119.



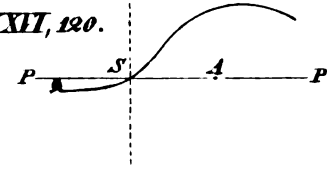
XXIX, 128-131.



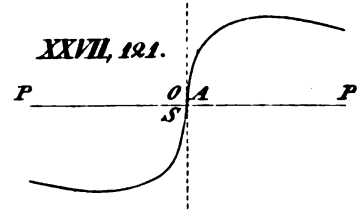
XXVIII, 122-127.

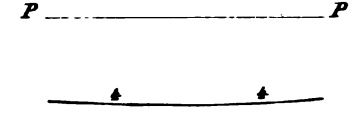


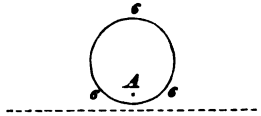
XXVI, 120.



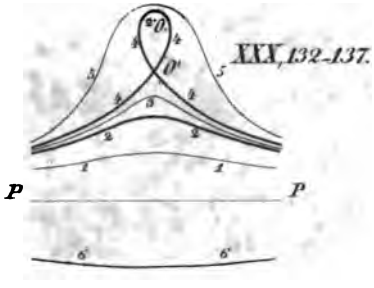
XXVII, 121.



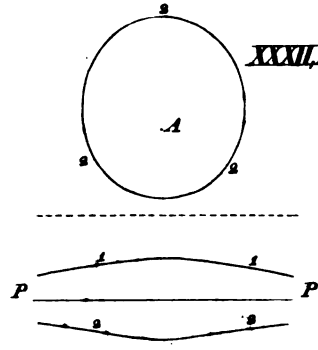




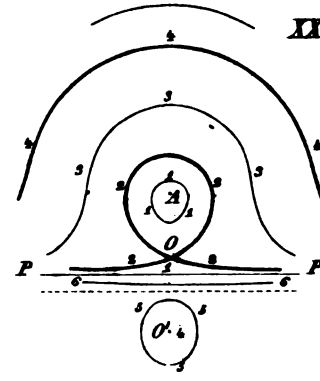
XXX, 132-137.



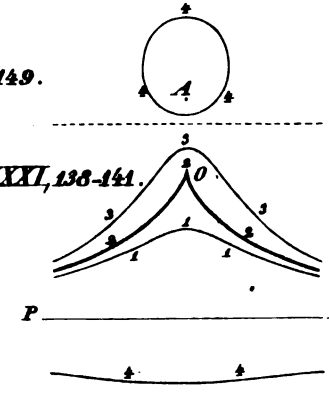
XXXII, 142-143.



XXXIII, 144-149.

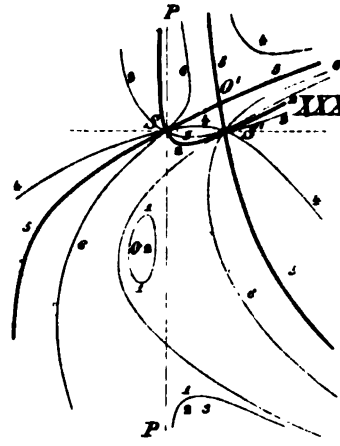


XXXI, 138-141.

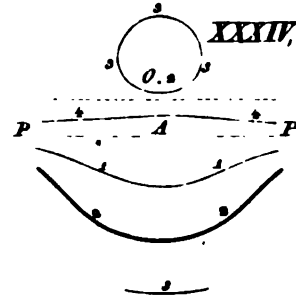


Curven dritter Ordnung,

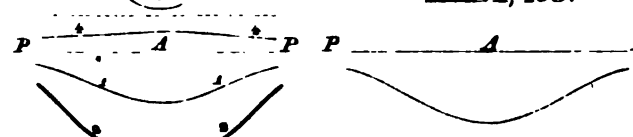
150-197.



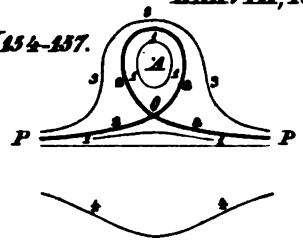
XXXVII, 159-164.



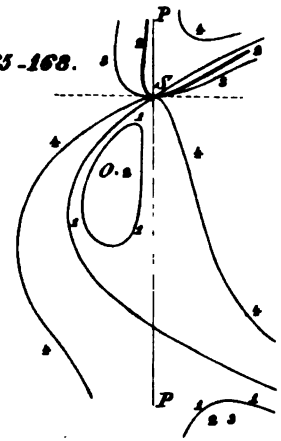
XXXIV, 150-153.



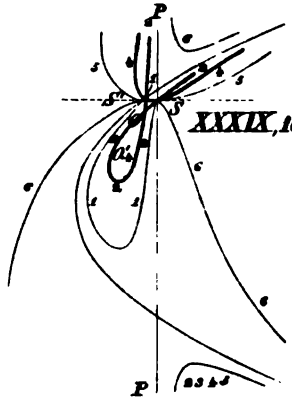
XXXVI, 158.



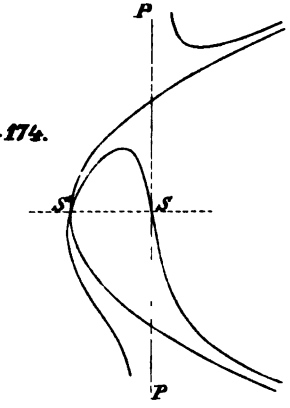
XXXV, 154-157.



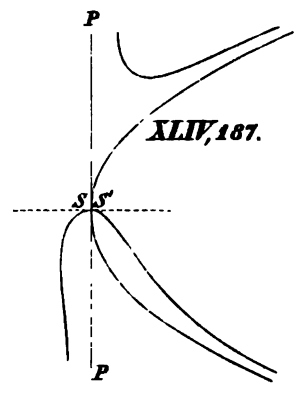
XXXVIII, 165-168.



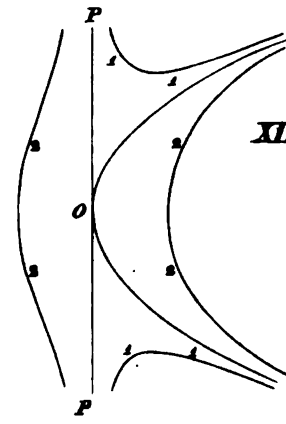
XXXIX, 169-174.



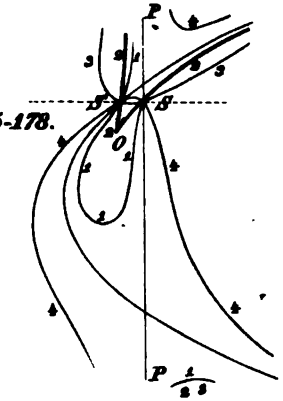
XLI, 179.



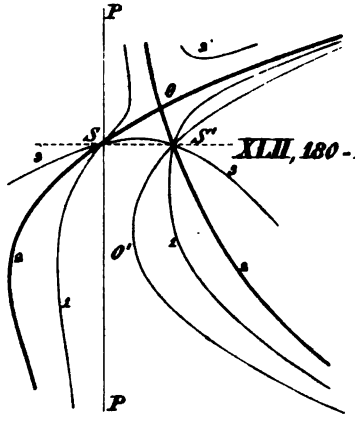
XLIV, 187.



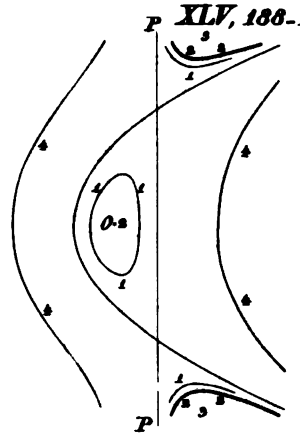
XLVII 196-197.



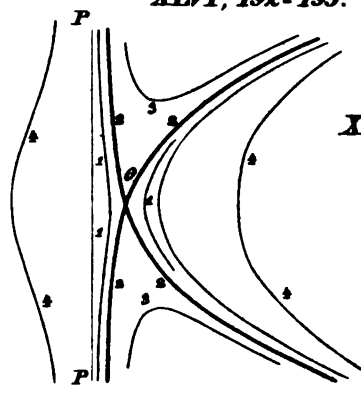
XL, 175-178.



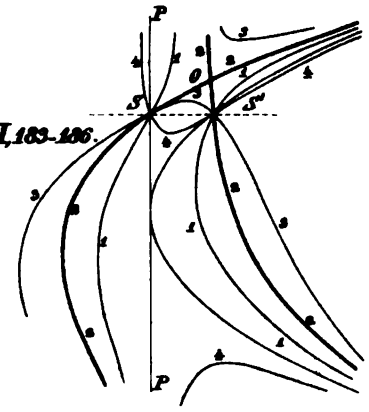
XLII, 180-182.



XLV, 188-191.

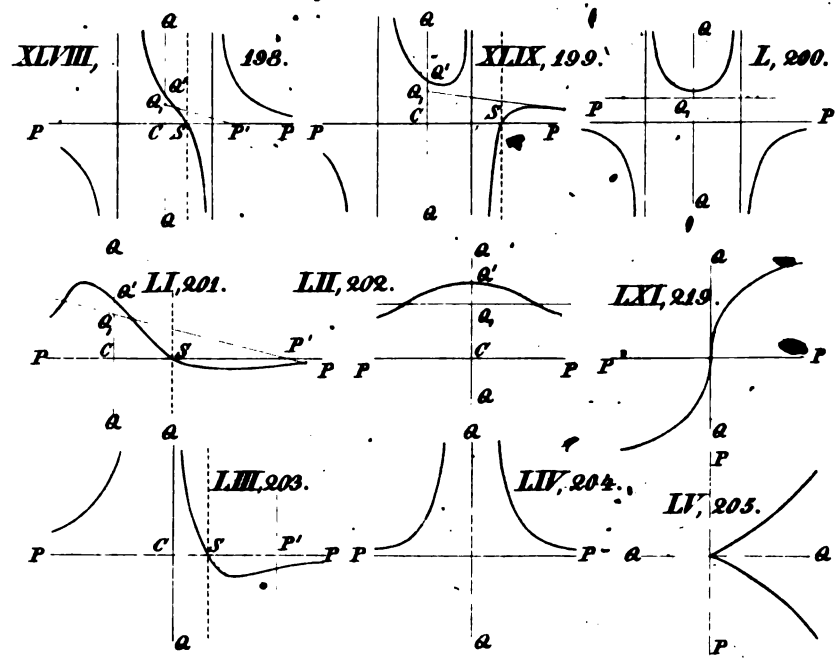


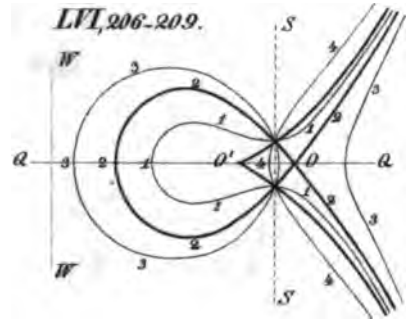
XLVI, 192-195.

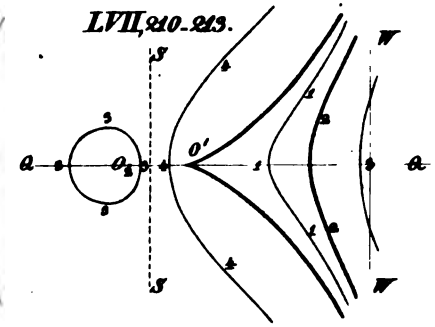


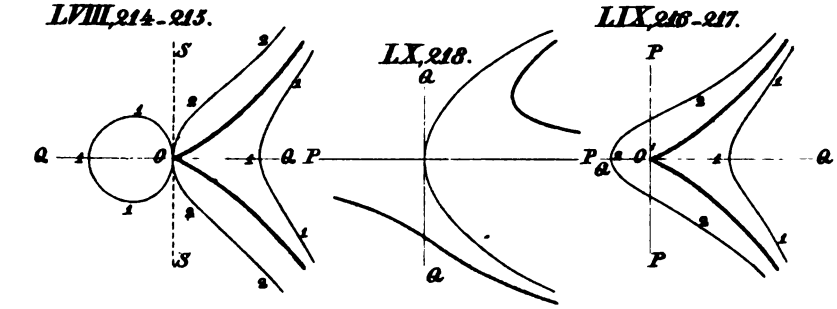
XLIII, 183-186.

Curven dritter Ordnung,
198-219.









This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

426902

CANCELLED

OCT 29 1973 H

OCT 30 1973